

Introduction

On cherche à établir un "toy model" de formation d'un trou noir cosmique à partir de l'évolution d'un volume spatial de symétrie sphérique dont la densité de matière moyenne est initialement légèrement supérieure à celle de l'espace-temps homogène dans lequel ce volume est plongé. Ce modèle pourrait être représentatif de la formation des trous noirs centraux des premières grandes galaxies à partir de faibles inhomogénéités du CMB.

On va utiliser pour cela la métrique établie indépendamment par Lemaître et Tolman dans les années 1930, puis popularisée par les travaux de Bondi et connue aujourd'hui sous le nom Lemaître-Tolman-Bondi (LTB).

La métrique LTB

La métrique LTB décrit la géométrie d'un espace-temps empli d'un fluide parfait sans pression, dont la densité d'énergie présente à tout époque une symétrie sphérique mais n'est pas nécessairement homogène radialement. En choisissant un système de coordonnées comobiles dont l'origine est le centre de symétrie on peut écrire cette métrique sous la forme

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + B(R, t)^2 dR^2 + A(R, t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1)$$

La coordonnée radiale R est un nombre sans dimension, A et B ont la dimension d'une longueur.

On se limite à un modèle d'espace-temps dans lequel $\Lambda = 0$. L'équation d'Einstein pour la métrique LTB conduit alors aux équations¹

$$B^2 = \frac{A'^2}{1 + 2E} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \dot{A}^2 - \frac{GM}{A} = c^2 E \quad (3)$$

$$\frac{M'}{A'A^2} = 4\pi\rho \quad (4)$$

$$\frac{\dot{A}^2 - 2c^2 E}{A^2} + \frac{2\dot{A}'\dot{A} - 2c^2 E'}{A'A} = 8\pi G\rho \quad (5)$$

où E et M sont des fonctions arbitraires de R , et $\rho(R, t)$ la densité d'énergie.

$E(R)$ peut être interprétée comme l'énergie totale par unité de masse d'une particule comobile de coordonnée radiale R , et $M(R)$ comme la masse² de matière à l'intérieur de la sphère de coordonnée radiale comobile R .

On s'intéresse ici à la solution à laquelle conduit la métrique LTB lorsque les hypersurfaces spatiales à t constant ont une courbure intrinsèque positive ($-0.5 < E < 0$ pour tout R). Celle-ci s'exprime à l'aide d'un paramètre sans dimension $\eta(R, t)$ tel que :

$$A = \frac{GM}{-2E c^2} (1 - \cos \eta) \quad (6)$$

$$t - t_B = \frac{GM}{(-2E c^2)^{3/2}} (\eta - \sin \eta) \quad (7)$$

où t_B est une troisième fonction arbitraire de R .

1. Remarque : les quatre équations ne sont pas indépendantes, l'équation (5) pouvant être par exemple déduite des équations (3) et (4).

2. L'élément de volume comobile étant $dV = BA^2 dR d\theta d\phi$, on pourrait être surpris de voir apparaître $A'A^2$ au lieu de BA^2 dans l'équation (4) reliant M' à ρ . Mais, la fonction E étant indépendante de t ,

$$\rho(R, t) = \rho(R, t_0) \frac{dV(R, t_0)}{dV(R, t)} = \rho(R, t_0) \frac{A^2(R, t_0) \frac{A'(R, t_0)}{\sqrt{1+E(R)}}}{A^2(R, t) \frac{A'(R)}{\sqrt{1+E(R)}}} = \rho(R, t_0) \frac{A^2(R, t_0) A'(R, t_0)}{A^2(R, t) A'(R)}$$

Modélisation d'une zone de sur-densité

Résultats généraux

La zone de sur-densité est décrite par la métrique LTB avec courbure spatiale positive ($E < 0$), pour $R < 1$. On impose $t_B \equiv 0$. Les équations ci-dessous, exprimées dans un système d'unité tel que $G = c = 1$, sont valides pour $0 < \eta < 2\pi$.

$$A = \frac{M}{(-2E)}(1 - \cos \eta) \quad (8)$$

$$t = \frac{M}{(-2E)^{3/2}}(\eta - \sin \eta) \quad (9)$$

On dérive par rapport à t l'équation (??) puis l'équation (??) :

$$\dot{\eta} = \frac{(-2E)^{3/2}}{M} \frac{1}{1 - \cos \eta} \quad (10)$$

$$\dot{A} = \sqrt{(-2E)} \frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta} \quad (11)$$

$$\ddot{A} = \frac{(-2E)^2}{M} \frac{\cos \eta(1 - \cos \eta) - \sin^2 \eta}{(1 - \cos \eta)^3} = \frac{(-2E)^2}{M} \frac{-1}{(1 - \cos \eta)^2} \quad (12)$$

On remarque que $\ddot{A}$ est toujours négative. D'autre part, $\dot{\eta}$ étant toujours positive, pour une valeur de R donnée η croît avec t , et $\dot{A}(R, t)$ devient négative lorsque $\eta(R, t) > \pi$, début de la phase de contraction de la coquille sphérique de coordonnée radiale R .

On dérive par rapport à R l'équation (??) puis l'équation (??) :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{M'}{(-2E)^{3/2}} - \frac{3ME'}{(-2E)^{5/2}} \right) (\eta - \sin \eta) + \frac{M}{(-2E)^{3/2}} \eta' (1 - \cos \eta) \\ 0 &= \left(\frac{M'}{M} + \frac{3E'}{2E} \right) (\eta - \sin \eta) + \eta' (1 - \cos \eta) \\ \eta' &= - \left(\frac{M'}{M} + \frac{3E'}{2E} \right) \frac{\eta - \sin \eta}{1 - \cos \eta} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A' &= \left(-\frac{M'}{2E} + \frac{ME'}{2E^2} \right) (1 - \cos \eta) - \frac{M}{2E} \left(\frac{M'}{M} + \frac{3E'}{2E} \right) \frac{\eta - \sin \eta}{1 - \cos \eta} \sin \eta \\ A' &= \frac{M}{(-2E)(1 - \cos \eta)} \left[\left(\frac{M'}{M} - \frac{E'}{E} \right) (1 - \cos \eta)^2 + \left(\frac{M'}{M} + \frac{3E'}{2E} \right) (\eta - \sin \eta) \sin \eta \right] \end{aligned} \quad (14)$$

On remarque que η' est toujours négative. Donc, à t constant, η est une fonction décroissante de R .

En revanche on ne peut pas déterminer le signe de A' pour tout R sans faire d'hypothèses sur les fonctions M et E . On peut au moins adopter les hypothèses suivantes :

- M est une fonction croissante de R . Quand R tend vers 1, $\rho(R, t)$ tend vers $\rho_M(t)$, la densité de matière de l'espace-temps homogène dans lequel la zone de sur-densité est plongée.
- La courbure spatiale intrinsèque des hypersurfaces à t constant tend asymptotiquement vers celle de l'espace-temps dans lequel la zone de sur-densité est plongée.
Si la géométrie de cet espace-temps est décrite par la métrique FLRW avec $k = 0$ (il est spatialement "plat") et une coordonnée de temps représentant également le temps propre des observateurs comobiles, en considérant par analogie avec la métrique FLRW que la courbure intrinsèque des hypersurfaces à t constant de la métrique LTB est $\propto -E/A^2$ (ce qu'il faudrait justifier plus rigoureusement), cela impose les contraintes suivantes :

- E tend vers 0 quand R tend vers 1.

$$- \frac{\delta}{\delta_R} \left(\frac{E}{A^2} \right) \text{ tend vers 0 quand } R \text{ tend vers 1.}$$

Donc, pour tout t , $E'A - 2EA'$ tend vers 0 quand R tend vers 1.

- En revanche, on n'impose pas a priori de valeur maximale à $|E|$ autre que la valeur limite $|E| < 0.5$ imposée par la présence du terme $1 + 2E$ au dénominateur de la composante g_{RR} de la métrique.

Le profil de densité dans la zone décrite par la métrique LTB dépendra du choix de la fonction E . On vérifiera a posteriori s'il peut être rendu compatible avec l'hypothèse de l'évolution de cette zone à partir de l'époque de quasi-homogénéité, donc avec les contraintes déduites des observations du CMB.

On vérifiera également que le choix de E n'entraîne pas un phénomène de "shell-crossing" (A' devenant négatif pour certaines valeurs de R et conduisant à l'apparition d'une singularité), ou au moins qu'il ne se produit pas "trop tôt" - sachant que le modèle adopté ne peut de toute façon être appliqué à l'évolution de la zone considérée que tant que l'approximation par un fluide parfait sans pression reste acceptable.

Horizons

Pour déterminer l'existence d'un horizon on s'intéresse à l'équation des géodésiques lumière.

$$dt^2 = B^2 dR^2$$

$$dt = \pm B dR = \pm (1 + 2E)^{-1/2} \frac{\partial A}{\partial R} dR = \pm (1 + 2E)^{-1/2} \left[dA - \frac{\partial A}{\partial t} dt \right]$$

Pour une géodésique lumière sortante,

$$dt = (1 + 2E)^{-1/2} \left[dA - \frac{\partial A}{\partial t} dt \right]$$

$$\left[1 + (1 + 2E)^{-1/2} \dot{A} \right] dt = (1 + 2E)^{-1/2} dA$$

Sur l'horizon, $dA = 0$, d'où la condition d'existence de cet horizon :

$$(1 + 2E)^{-1/2} \dot{A} = -1$$

$$\left(\frac{-2E}{1 + 2E} \right)^{1/2} \frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta} = -1$$

Cela impose évidemment que $\eta > \pi$, et d'autre part,

$$\frac{-2E}{1 + 2E} \frac{\sin^2 \eta}{(1 - \cos \eta)^2} = \frac{-2E}{1 + 2E} \frac{(1 - \cos^2 \eta)}{(1 - \cos \eta)^2} = \frac{-2E}{1 + 2E} \frac{(1 + \cos \eta)}{(1 - \cos \eta)} = 1$$

$$-2E(1 + \cos \eta) = (1 + 2E)(1 - \cos \eta)$$

$$\cos \eta(R_h(t), t) = 1 + 4E(R_h(t))$$

On a alors en $t, R_h(t)$

$$A_h(t) = 2M_h(t)$$

où $R_h(t)$ est la coordonnée radiale de l'horizon à la date t , $A_h(t)$ son rayon aréal et $M_h(t)$ la masse à l'intérieur de l'horizon.

D'autre part, $\ddot{A}$ étant toujours négative, $\dot{A}$ devient de plus en plus négative. En notant t_0 l'instant de l'apparition de l'horizon (instant avant lequel $\dot{A}$ était supérieure à $-c$ pour tout R), la coquille sphérique de coordonnée radiale $R_h(t_0)$ s'effondre de plus en plus vite, et les photons de coordonnée radiale $R < R_h(t_0)$ sont définitivement piégés sous l'horizon.

En revanche, à $t > t_0$, rien n'empêche (et il est même probable) que $\dot{A}$ atteigne $-c$ pour des valeurs de R supérieures à $R_h(t_0)$ et de plus en plus grandes. On va s'intéresser à l'évolution de A_h .