Métrique LTB

$$
\begin{aligned}
&ds^2 = -t^2 + \frac{A'^2}{1+2E}dr^2 + A^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = -dt^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j \\
&\dot{A}^2 = 2\frac{M}{A} + 2E \\
&2\dot{A}'\dot{A} = 2\frac{M'A - MA'}{A^2} + 2E' \\
&M' = M\frac{A'}{A} + A(\dot{A}'\dot{A} - E') = 4\pi A' A^2 \rho
\end{aligned}
$$

Les coordonnées spatiales induites à partir du système de coordonnées de la métrique LTB par le feuilletage en hypersurfaces à t constant sont des coordonnées gaussiennes normales. En notant γ_{ij} la métrique de ces hypersurfaces, $\mathcal{K}_{ij}$ leur tenseur de courbure extrinsèque et $\mathcal{R}_{ij}$ leur tenseur de Ricci,

$$
\begin{aligned}
&-2\mathcal{K}_{ij} = \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} \\
&\mathcal{R} + \mathcal{K} - \mathcal{K}_{ij}\mathcal{K}^{ij} = 16\pi\rho
\end{aligned}
$$

[Cf. le cours d'E. Gourgoulhon : "3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity", chapitre 4: 3+1 decomposition of Einstein equation, section 4.4.2: Analysis within Gaussian normal coordinates.]

Les seules composantes non nulles de $\mathcal{K}_{ij}$ sont

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}_{rr} = -\frac{\dot{A}'A'}{1+2E} \\
&\mathcal{K}_{\theta\theta} = -\dot{A}A \\
&\mathcal{K}_{\phi\phi} = -\sin^2\theta\dot{A}A
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\mathcal{R} + (\gamma^{ij}\mathcal{K}_{ij})^2 - \gamma^{ik}\gamma^{jl}\mathcal{K}_{ij}\mathcal{K}_{kl} = \mathcal{R} + \left(\frac{\dot{A}'}{A'} + 2\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - \left(\frac{\dot{A}'^2}{A'^2} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2}\right) = \mathcal{R} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 4\frac{\dot{A}'\dot{A}}{A'A}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 4\frac{\dot{A}'\dot{A}}{A'A} = 16\pi\rho = 4\frac{M'}{A'A^2} = 4\frac{M}{A^3} + 4\frac{\dot{A}'\dot{A} - E'}{A'A} \\
&\mathcal{R} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} = 4\frac{M}{A^3} - 4\frac{E'}{A'A} \\
&\dot{A}^2 = 2\frac{M}{A} - 2\frac{E'A}{A'} - \frac{1}{2}\mathcal{R}A^2
\end{aligned}
$$

On en déduit

$$
E = -\frac{E'A}{A'} - \frac{1}{4}\mathcal{R}A^2 \quad \Rightarrow \quad (EA)' = -\frac{1}{4}\mathcal{R}A'A^2
$$