Métrique LTB

$$
\begin{aligned}
&ds^2 = -t^2 + \frac{A'^2}{1+2E}dr^2 + A^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = -dt^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j \\
&\dot{A}^2 = 2\frac{M}{A} + 2E \\
&2\dot{A}'\dot{A} = 2\frac{M'A - MA'}{A^2} + 2E' \\
&M' = M\frac{A'}{A} + A(\dot{A}'\dot{A} - E') = 4\pi A'A^2\rho
\end{aligned}
$$

Les coordonnées spatiales induites à partir du système de coordonnées de la métrique LTB par le feuilletage en hypersurfaces à t constant sont des coordonnées gaussiennes normales. En notant γ_{ij} la métrique de ces hypersurfaces, $\mathcal{K}_{ij}$ leur tenseur de courbure extrinsèque et $\mathcal{R}_{ij}$ leur tenseur de Ricci,

$$
\begin{aligned}
&-2\mathcal{K}_{ij} = \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} \\
&\mathcal{R} + \mathcal{K} - \mathcal{K}_{ij}\mathcal{K}^{ij} = 16\pi\rho
\end{aligned}
$$

[Cf. le cours d'E. Gourgoulhon : "3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity", chapitre 4: 3+1 decomposition of Einstein equation, section 4.4.2: Analysis within Gaussian normal coordinates.]

Les seules composantes non nulles de $\mathcal{K}_{ij}$ sont

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}_{rr} = -\frac{\dot{A}'A'}{1+2E} \\
&\mathcal{K}_{\theta\theta} = -\dot{A}A \\
&\mathcal{K}_{\phi\phi} = -\sin^2\theta\dot{A}A
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\mathcal{R} + (\gamma^{ij}\mathcal{K}_{ij})^2 - \gamma^{ik}\gamma^{jl}\mathcal{K}_{ij}\mathcal{K}_{kl} = \mathcal{R} + \left(\frac{\dot{A}'}{A'} + 2\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - \left(\frac{\dot{A}'^2}{A'^2} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2}\right) = \mathcal{R} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 4\frac{\dot{A}'\dot{A}}{A'A}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 4\frac{\dot{A}'\dot{A}}{A'A} = 16\pi\rho = 4\frac{M'}{A'A^2} = 4\frac{M}{A^3} + 4\frac{\dot{A}'\dot{A} - E'}{A'A} \\
&\mathcal{R} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} = 4\frac{M}{A^3} - 4\frac{E'}{A'A} \\
&\dot{A}^2 = 2\frac{M}{A} - 2\frac{E'A}{A'} - \frac{1}{2}\mathcal{R}A^2
\end{aligned}
$$

On en déduit

$$
E = -\frac{E'A}{A'} - \frac{1}{4}\mathcal{R}A^2 \quad \Rightarrow \quad (EA)' = -\frac{1}{4}\mathcal{R}A'A^2
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R} + 4\frac{M}{A^3} + 4\frac{E}{A^2} = 4\frac{M}{A^3} - 4\frac{E'}{A'A} \\
&\mathcal{R} = -4\frac{E}{A^2} - 4\frac{E'}{A'A} = -4\frac{(EA)'}{A'A^2}
\end{aligned}
$$

$$\theta = \frac{\frac{d\sqrt{\det(\gamma_{i,j})}}{dt}}{\det(\gamma_{i,j})} = \frac{\frac{d(A'A^2)}{dt}}{A'A^2} = \frac{\dot{A}'A^2 + 2A'\dot{A}A}{A'A^2} = \frac{\dot{A}'A + 2A'\dot{A}}{A'A} = \frac{\dot{A}'}{A'} + \frac{2\dot{A}}{A}$$

$$\theta = \Theta^l_l = -\mathcal{K}^l_l = -\gamma^{ll}\mathcal{K}_{ll} = \frac{(1+2E)}{A'^2}\frac{\dot{A}'A'}{(1+2E)} + \frac{1}{A^2}\dot{A}A + \frac{1}{A^2\sin^2\theta}\dot{A}A\sin^2\theta = \frac{\dot{A}'}{A'} + \frac{2\dot{A}}{A}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -\mathcal{K}_{ij} - \frac{1}{3}\theta\gamma_{ij} \\
\sigma_{rr} &= \frac{\dot{A}'A'}{1+2E} - \frac{1}{3}\frac{A'^2}{1+2E}\left(\frac{\dot{A}'}{A'} + \frac{2\dot{A}}{A}\right) = \frac{2}{3}\frac{\dot{A}'A'}{(1+2E)} - \frac{2}{3}\frac{A'^2\dot{A}}{(1+2E)A} \\
\sigma_{\theta\theta} &= \dot{A}A - \frac{1}{3}A^2\left(\frac{\dot{A}'}{A'} + \frac{2\dot{A}}{A}\right) = \frac{1}{3}\dot{A}A - \frac{1}{3}\frac{\dot{A}'A^2}{A'} \\
\sigma_{\phi\phi} &= \dot{A}A\sin^2\theta - \frac{1}{3}A^2\sin^2\theta\left(\frac{\dot{A}'}{A'} + \frac{2\dot{A}}{A}\right) = \frac{1}{3}\dot{A}A\sin^2\theta - \frac{1}{3}\frac{\dot{A}'A^2}{A'}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Les autres composantes (non diagonales) de σ_{ij} sont nulles.

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{2}\sigma^i_j\sigma^j_i = \frac{1}{2}({\gamma^{rr}}^2{\sigma_{rr}}^2 + {\gamma^{\theta\theta}}^2{\sigma_{\theta\theta}}^2 + {\gamma^{\phi\phi}}^2{\sigma_{\phi\phi}}^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+2E)^2}{A'^4}\left(\frac{2}{3}\frac{\dot{A}'A'}{(1+2E)} - \frac{2}{3}\frac{A'^2\dot{A}}{(1+2E)A}\right)^2 + \frac{2}{A^4}\left(\frac{1}{3}\dot{A}A - \frac{1}{3}\frac{\dot{A}'A^2}{A'}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9A'^4A^2}(\dot{A}'A'A - \dot{A}A'^2)^2 + \frac{2}{9A'^2A^4}(\dot{A}A'A - \dot{A}'A^2)^2\right] \\
&= \frac{1}{9A'^2A^2}\left[\frac{2}{A'^2}({\dot{A}'}^2A'^2A^2 - 2\dot{A}'\dot{A}A'^3A + \dot{A}^2A'^4) + \frac{1}{A^2}(\dot{A}^2A'^2A^2 - 2\dot{A}'\dot{A}A'A^3 + {\dot{A}'}^2A^4)\right] \\
&= \frac{1}{9A'^2A^2}\left[3{\dot{A}'}^2A^2 - 6\dot{A}'\dot{A}A'A + \dot{A}^2A'^2\right] \\
&= \frac{\left[\dot{A}'A - \dot{A}A'\right]^2}{3A'^2A^2} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{A}'}{A'} - \frac{\dot{A}}{A}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta^2 - 3\sigma^2 &= \left(\frac{\dot{A}'}{A'} + \frac{2\dot{A}}{A}\right)^2 - \left(\frac{\dot{A}'}{A'} - \frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = 3\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 6\frac{\dot{A}'\dot{A}}{A'A} \\
&= 3\left(\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 2\frac{\dot{A}'\dot{A}}{A'A}\right)
\end{aligned}$$