

<u>Premières bases de</u> <u>TRANSMISSION DE PUISSANCE PAR ENGRENAGES</u>
--

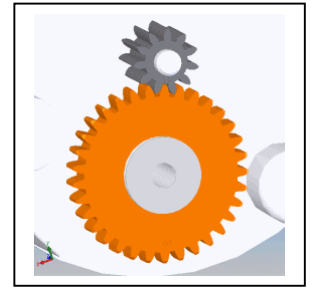
Table des matières

1.	Généralités.....	2
2.	Connaissance de quelques types d'engrenages	2
	2-1 Les engrenages à axes parallèles (engrenages cylindriques)	2
	2-2 Engrenage à axes concourants (engrenage conique)	5
	2-3 Engrenage gauche (système roue et vis sans fin).....	5
3.	Caractéristiques de l'engrenage cylindrique	6
	3-1 Condition d'engrènement.....	6
	3-2 Diamètre primitif et Module	6
	3-3 Rapport de transmission.....	7
	3-4 Cas particulier de l'engrenage Pignon-Crémaillère.....	10
4.	Association d'engrenages.....	12
	4-1 Association d'étages d'engrenages	12
	4-2 Association de réducteurs ou de multiplicateurs	13

1. Généralités

Définition :

un **ENGRENAGE** est un **mécanisme constitué de deux roues dentées**, chacune étant en rotation autour d'un axe, les deux axes restant fixes l'un par rapport à l'autre, de sorte que une des roues entraîne l'autre, par action de dents successivement en contact.



Vocabulaire :

La plus petite des roues est appelée **PIGNON**.

2. Connaissance de quelques types d'engrenages

La position relative des axes permet de classer les types d'engrenages :

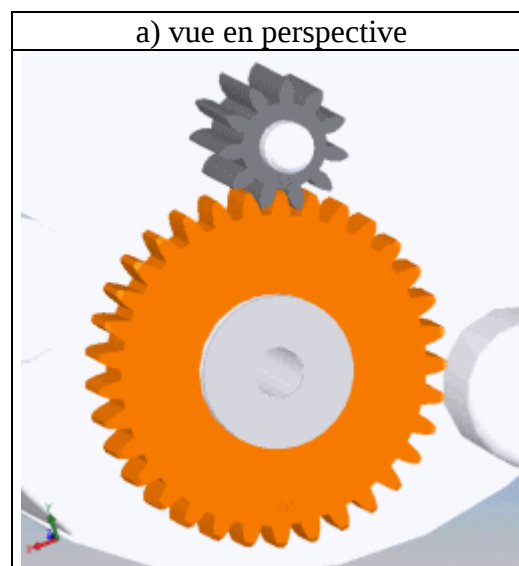
Cette étude présentera :

- les engrenages à axes parallèles (engrenages cylindriques) ;
- les engrenages à axes concourants (engrenages coniques) ;
- les engrenages gauches pour lesquels les axes ne sont pas dans le même plan (système roue et vis-sans-fin).

2-1 Les engrenages à axes parallèles (engrenages cylindriques)

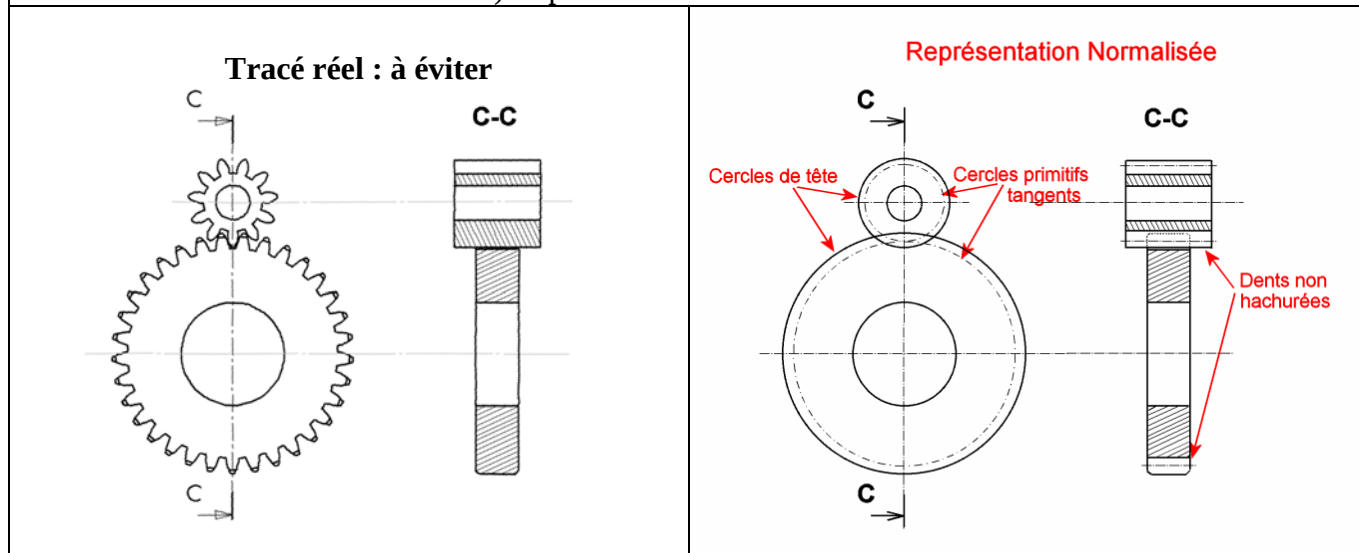
2-1-1 Engrenage cylindrique à denture droite

2-1-1-1 Engrenage cylindrique à denture droite **Extérieure**

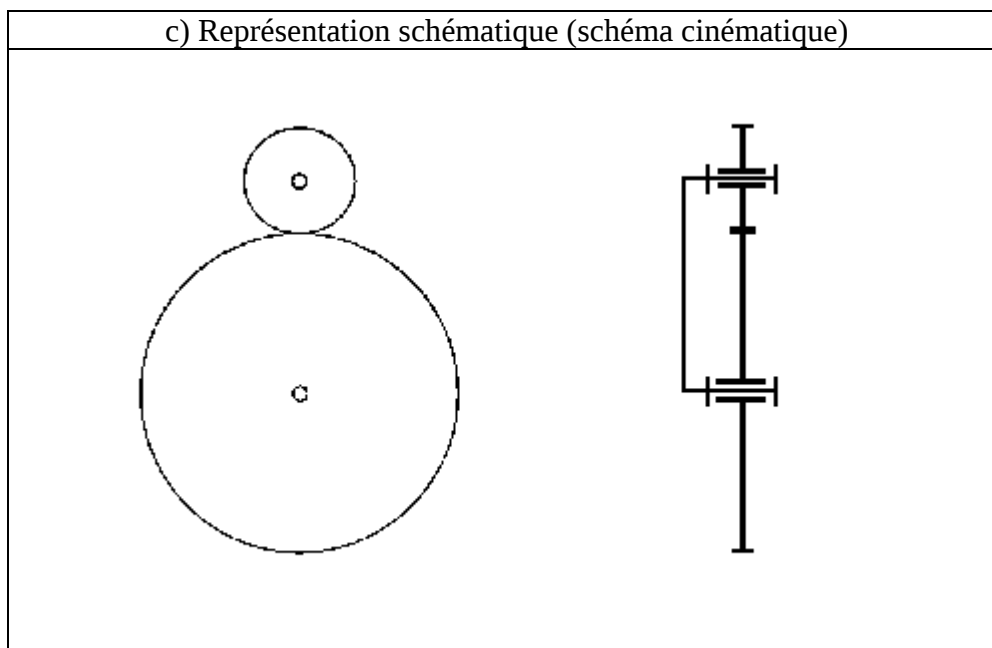


On remarquera que les roues tournent (par rapport au support) en sens opposé l'une de l'autre.

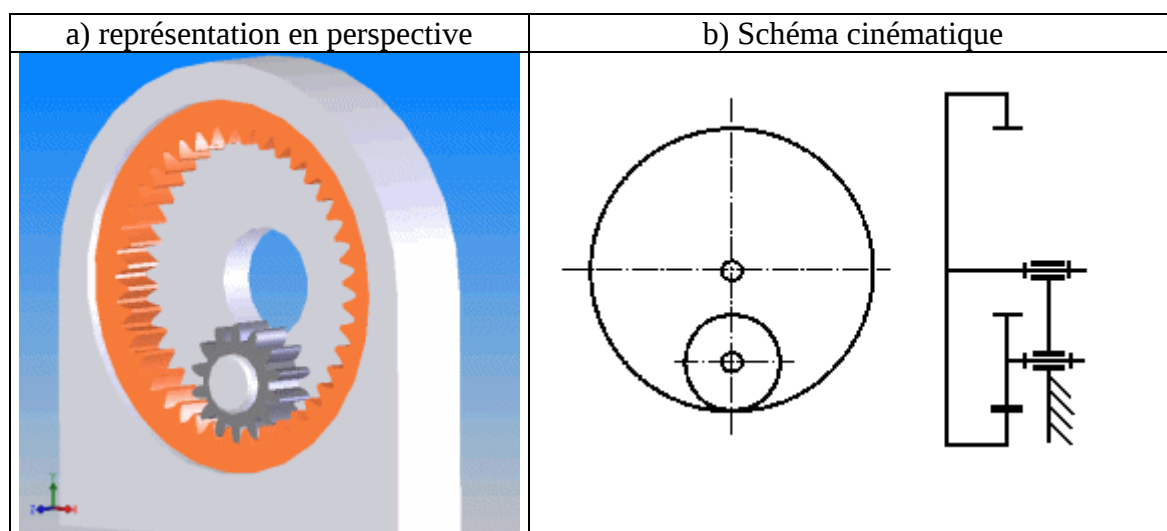
b) Représentation 2D normalisée



c) Représentation schématique (schéma cinématique)

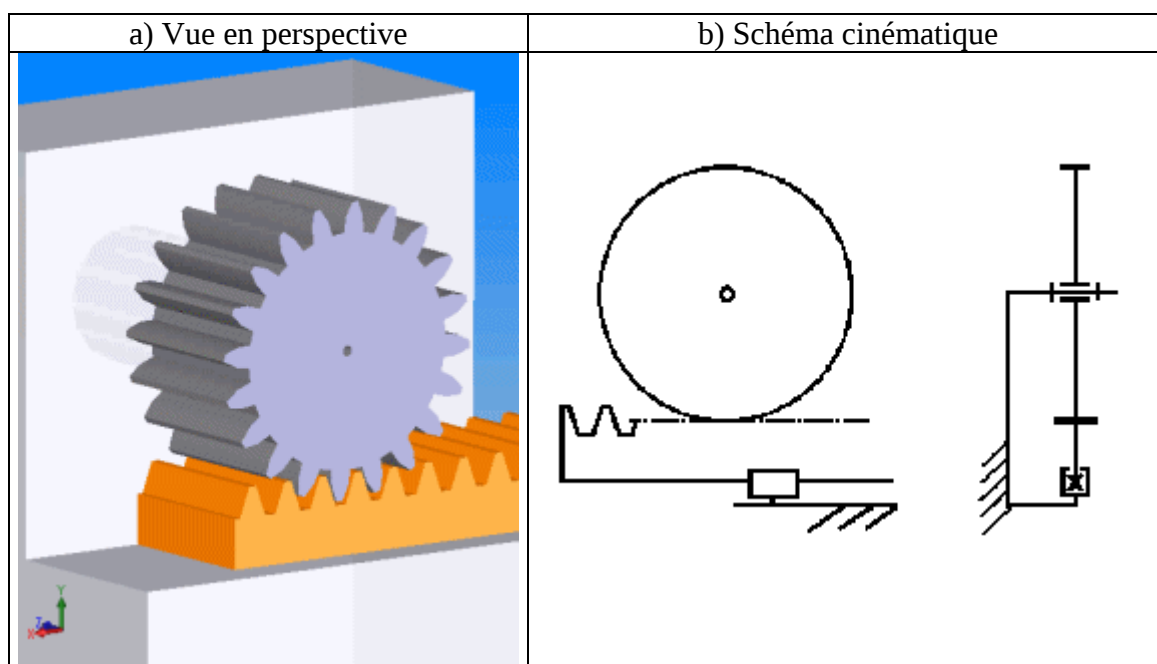


2-1-1-2 Engrenage cylindrique à denture droite **Intérieure**



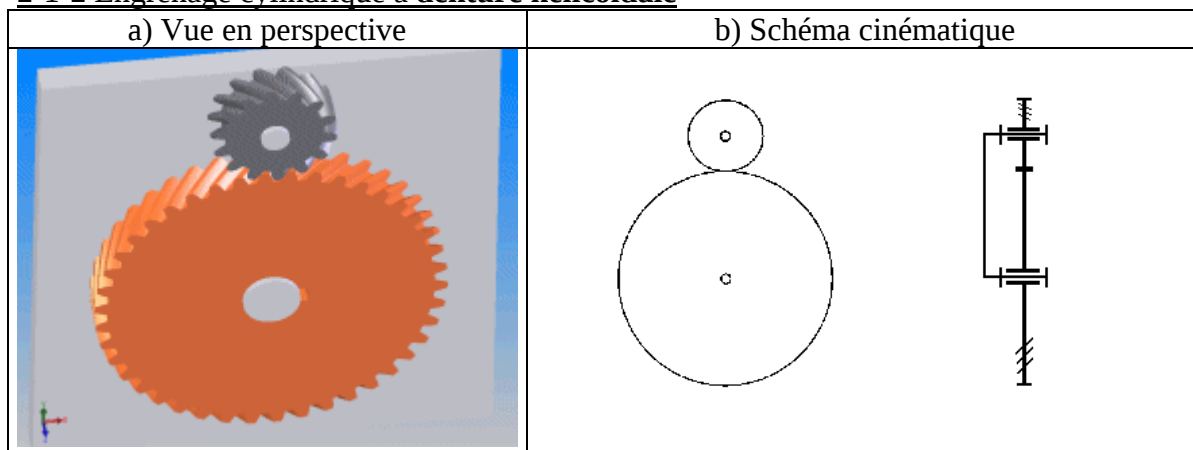
On remarquera que les roues tournent dans le même sens par rapport au support, alors que dans l'engrenage à denture extérieure, les roues dentées tournent dans des sens opposés.

2-1-1-3 Engrenage **Pignon-crémaillère**



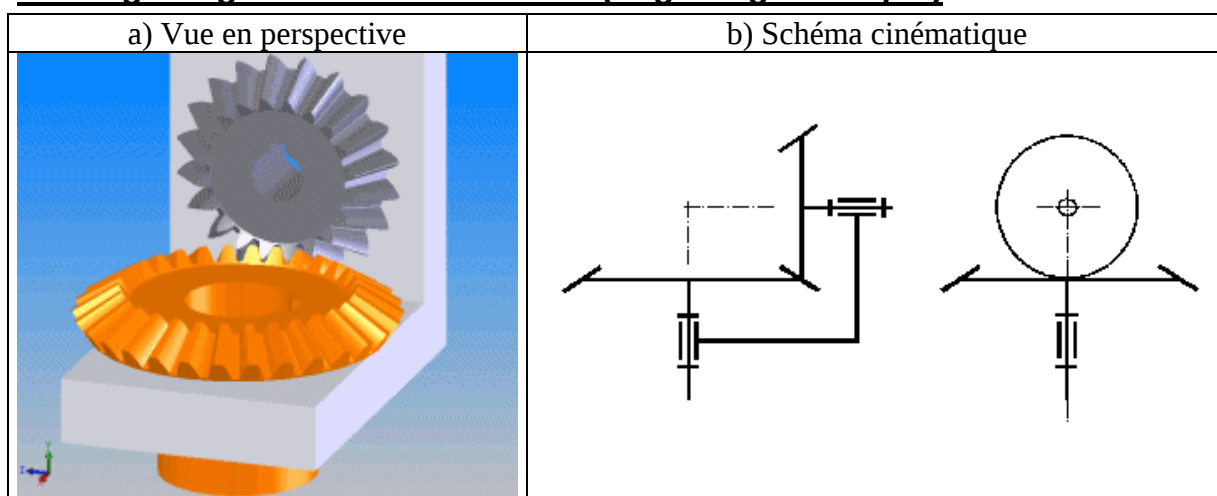
Intérêt : le système permet de transmettre la puissance d'un solide en mouvement de rotation vers un solide en mouvement de translation (ou inversement).

2-1-2 Engrenage cylindrique à denture hélicoïdale



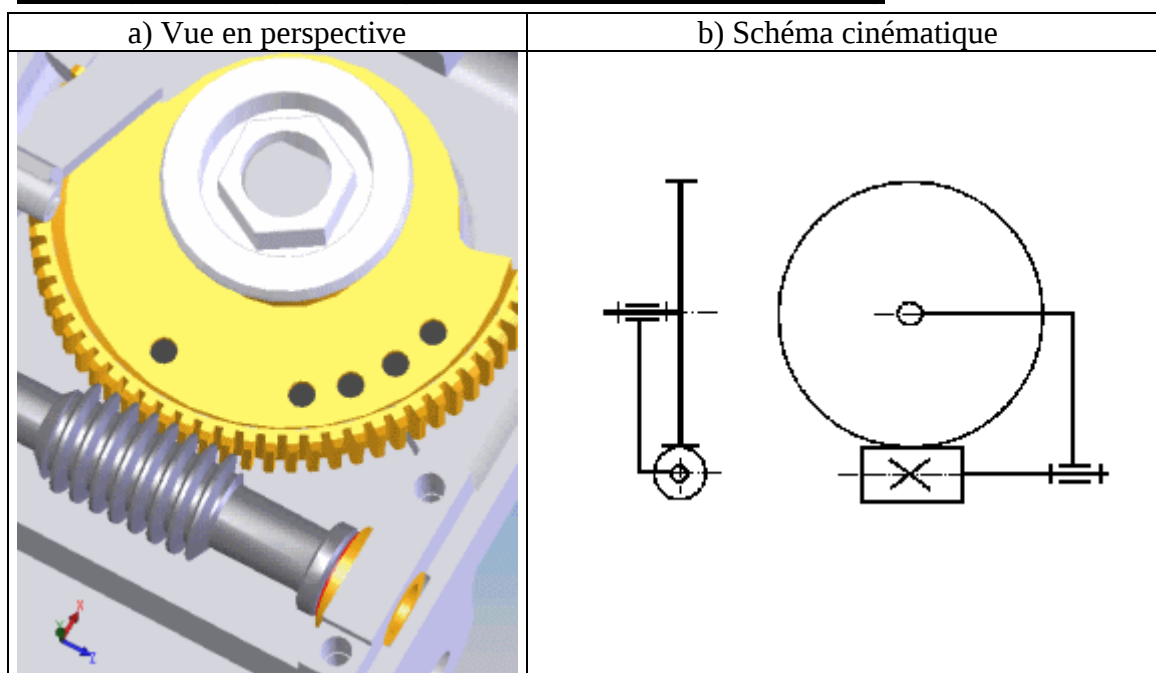
Intérêt : L'engrènement de chaque dent est plus progressif ; ils sont plus silencieux que les engrenages à denture droite.

2-2 Engrenage à axes concourants (engrenage conique)



Intérêt : ils permettent la transmission de puissance entre des arbres concourants.

2-3 Engrenage gauche (système roue et vis sans fin)

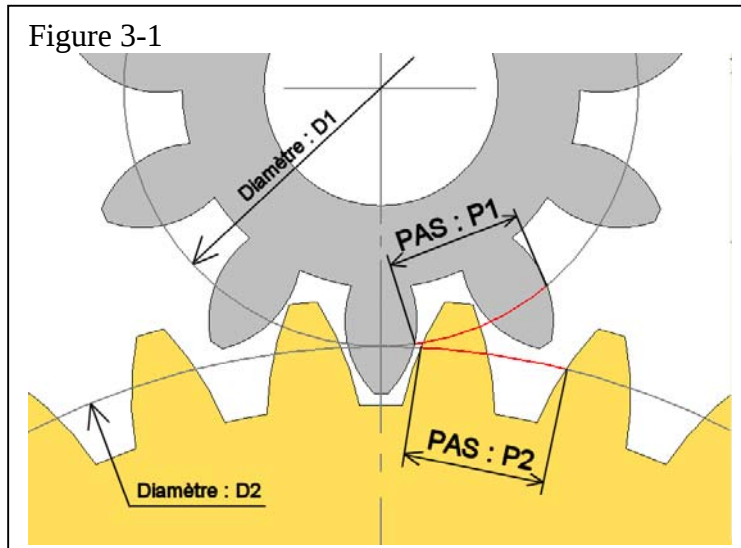


Intérêt : ils permettent d'obtenir une très faible vitesse de rotation en sortie (grands rapports de transmission), entre des arbres perpendiculaires.

3. Caractéristiques de l'engrenage cylindrique

3-1 Condition d'engrènement

Pour assurer l'engrènement on doit faire en sorte que les dents d'une roue s'intercalent bien entre les dents de l'autre roue ; pour cela, il faut introduire la notion de « PAS » de la denture (voir la figure 3-1) ;



le « PAS » doit être identique sur chacune des deux roues : $P1 = P2$

3-2 Diamètre primitif et Module

On appelle « **cercles primitifs** », ou « **cylindres primitifs** », le contour de roues cylindriques qui remplaceraient les roues dentées, en transmettant le mouvement sans glissement, de la même façon que l'engrenage (figure 3-2) ; on appelle « **diamètres primitifs** » les diamètres de ces roues cylindriques fictives.

Soit $D1$ le diamètre primitif de la roue 1 ;

Soit $D2$ le diamètre primitif de la roue 2 ;

Le pas s'exprime en fonction de la circonférence et du nombre de dent sur chaque roue :

Soit $Z1$ le nombre de dents de la roue 1 ;

Soit $Z2$ le nombre de dents de la roue 2 ;

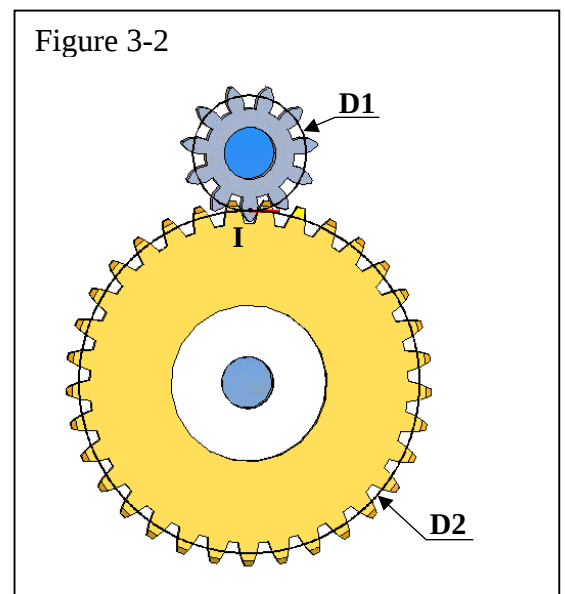
$$P1 = \pi D1 / Z1 ;$$

$$P2 = \pi D2 / Z2 ;$$

Et lorsqu'on exprime la relation « $P1 = P2$ », on obtient : $\frac{D1}{Z1} = \frac{D2}{Z2}$

Ce rapport est appelé « **module de la denture** » : $\frac{D1}{Z1} = \frac{D2}{Z2} = m$

On retiendra : $D1 = m \cdot Z1$ et $D2 = m \cdot Z2$

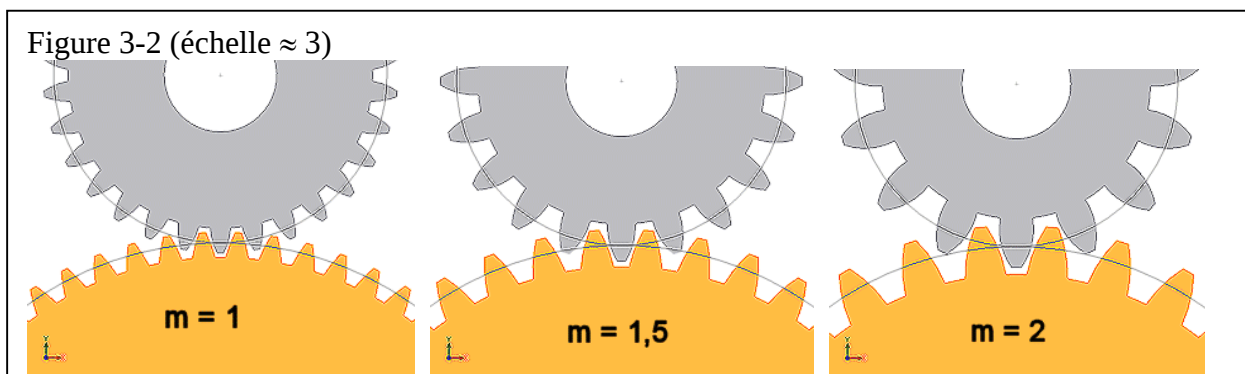


pour que deux roues dentées puissent engrener l'une avec l'autre il est nécessaire qu'elles aient le même module.

Nota : le choix du module d'un engrenage s'effectue (parmi des valeurs normalisées) à partir de critères de résistance à la rupture, ou de résistance à l'usure.

Pour un même rapport D_2 / D_1 , on peut observer (voir la figure 3-2) que :

- le choix d'un petit module donne un nombre de dents élevé ;
- le choix d'un gros module donne un nombre de dents faible.



3-3 Rapport de transmission

Les démarches sont effectuées sur l'engrenage cylindrique et peuvent être généralisées aux autres types d'engrenages.

3-3-1 Rapport de Transmission (Etude Géométrique et Cinématique)

Définition :

le rapport de transmission « r » d'un engrenage est défini par :

Le rapport des vitesses	Le rapport des angles parcourus
vitesse « Ω_s » de l'arbre de sortie / vitesse « Ω_e » de l'arbre d'entrée	angle « θ_s » parcouru par l'arbre de sortie / angle « θ_e » parcouru par l'arbre d'entrée
$r = \frac{\Omega_s}{\Omega_e}$	$r = \frac{\theta_s}{\theta_e}$

Nota : la définition du rapport de transmission donnée ci-dessus est une définition qui tient compte de l'usage habituel ; alors que la norme **NF ISO 1122-1**, donne une définition inverse :

le rapport de transmission noté « i » a pour définition : $i = \frac{\Omega_e}{\Omega_s}$

Observations :

- Si l'engrenage est réducteur de vitesse ($\Omega_s < \Omega_e$), alors : $r < 1$;
- Si l'engrenage est multiplicateur de vitesse ($\Omega_s > \Omega_e$), alors : $r > 1$.

Propriété :

Pour l'engrenage cylindrique, le rapport de transmission s'exprime :

A partir des diamètres primitifs : $r = \frac{\Omega_s}{\Omega_e} = \frac{D_e}{D_s}$ ou encore : $r = \frac{\theta_s}{\theta_e} = \frac{D_e}{D_s}$

A partir des nombres de dents : $r = \frac{\Omega_s}{\Omega_e} = \frac{Z_e}{Z_s}$ ou encore : $r = \frac{\theta_s}{\theta_e} = \frac{Z_e}{Z_s}$

Démonstration :

Soit « I », le point de tangence des cercles primitifs de chaque pignon ;
Soit « e » le pignon d'entrée ;
Soit « s » le pignon de sortie ;
Soit « 0 » le support fixe.

On utilise le vecteur vitesse du point I appartenant à chacun des pignons, et le fait qu'il y a roulement sans

glissement au point I : $\vec{V}_{I,e/0} = \vec{V}_{I,s/0}$

$$\text{Donc : } \Omega_e \cdot \frac{D_e}{2} = \Omega_s \cdot \frac{D_s}{2}$$

$$\text{Alors : } r = \frac{\Omega_s}{\Omega_e} = \frac{D_e}{D_s} ;$$

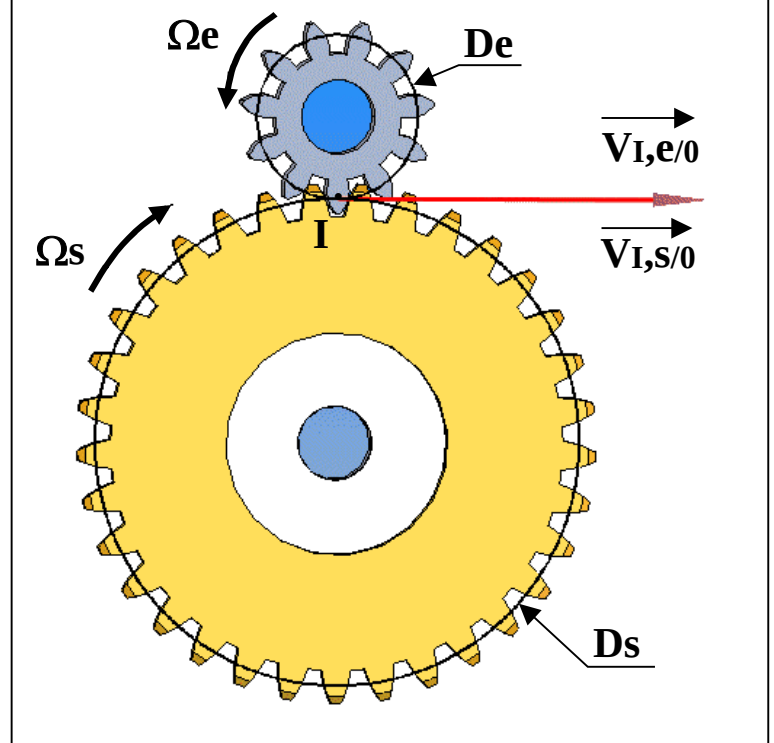
D'autre part on exprime les diamètres en fonction des nombres de dents :

$$\frac{D_e}{D_s} = \frac{m \cdot Z_e}{m \cdot Z_s}$$

$$\text{Alors : } r = \frac{\Omega_s}{\Omega_e} = \frac{D_e}{D_s} = \frac{Z_e}{Z_s} ;$$

$$\text{Comme } \Omega = \theta / t, \text{ on déduit : } r = \frac{\theta_s}{\theta_e} = \frac{D_e}{D_s} = \frac{Z_e}{Z_s}$$

Figure 3-3



3-3-2 Transmission des actions mécaniques (transmission de couple)

Notations :

Soit C_e le couple fourni par le milieu extérieur (souvent un moteur), à la roue « e » ;
Soit C_s le couple transmis (en sortie) au milieu extérieur, par la roue « s » ;

Propriété :

Le rapport des couples transmis est l'inverse du rapport de transmission : $\frac{C_s}{C_e} = \frac{\Omega_e}{\Omega_s} = \frac{1}{r}$

Autrement dit : un réducteur de vitesse est un multiplicateur de couple.

Démonstration (méthode 1 : « étude statique ») :

On cherche à exprimer l'effort tangentiel au contact (voir la figure 3-4) ;

Le profil de denture majoritairement utilisé pour le taillage des dents d'engrenages est un profil en « développante de cercle » ;

l'intérêt de ce profil est qu'il transmet une action mécanique « $F_e \rightarrow s$ » toujours orientée dans la même direction : cette direction est la « droite de pression ». Son inclinaison est normalisée et définie par « l'angle de pression » : α .

La valeur normalisée la plus courante est : $\alpha = 20^\circ$.

On utilise la composante tangentielle
« F_t » de cette action mécanique.

L'application du principe fondamental de la statique et de l'équation des moments autour de l'axe de rotation, donne :

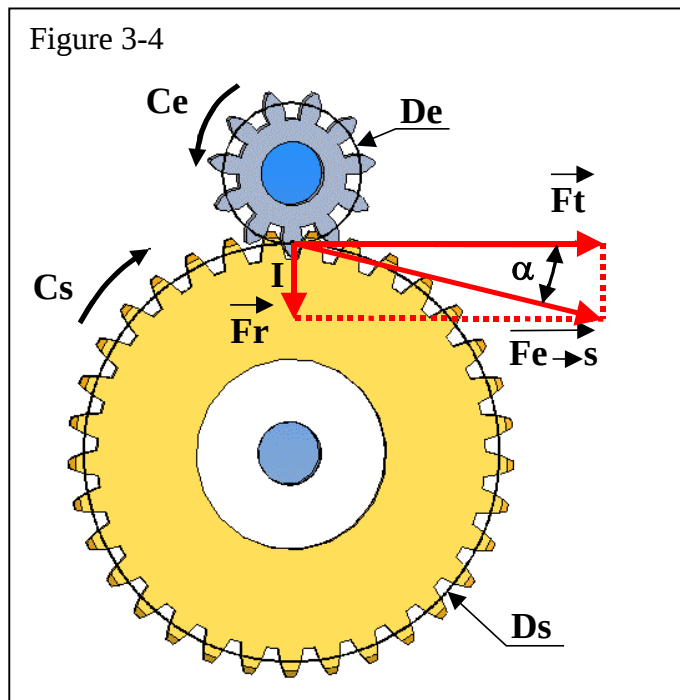
Pour la roue « e » : $F_t = \frac{2 C_e}{D_e}$;

Pour la roue « s » : $F_t = \frac{2 C_s}{D_s}$

En égalisant ces deux valeurs de F_t , on

obtient bien : $\frac{C_s}{C_e} = \frac{D_s}{D_e} = \frac{1}{r}$

Toutefois, cette première méthode suppose qu'il n'y a pas de perte lors de la transmission d'effort d'une roue sur l'autre ; en réalité les profils de denture glissent tangentiellement l'un sur l'autre, ce qui génère une perte énergétique.



Démonstration (méthode 2 : « étude énergétique ») :

On exprime la conservation de la puissance, en faisant intervenir le rendement.

Soit P_e la puissance fournie par le milieu extérieur (souvent un moteur), à la roue « e » ;

Soit P_s la puissance transmise (en sortie) au milieu extérieur, par la roue « s » ;

Le rendement de l'engrenage est défini par : $\eta = \frac{P_s}{P_e}$ ($\eta < 1$)

Or la puissance est le produit du couple par la vitesse de rotation :

Donc $P_e = C_e \cdot \Omega_e$ et $P_s = C_s \cdot \Omega_s$;

Alors le rendement est : $\eta = \frac{C_s \cdot \Omega_s}{C_e \cdot \Omega_e} = \frac{C_s}{C_e} \cdot r$;

on en déduit : $\frac{C_s}{C_e} = \frac{\eta}{r}$

Si l'on néglige les pertes énergétiques, on a $\eta = 1$; et alors on retrouve : $\frac{C_s}{C_e} = \frac{1}{r}$

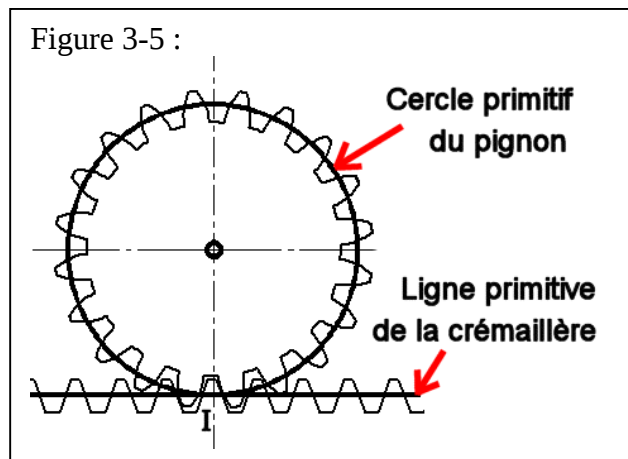
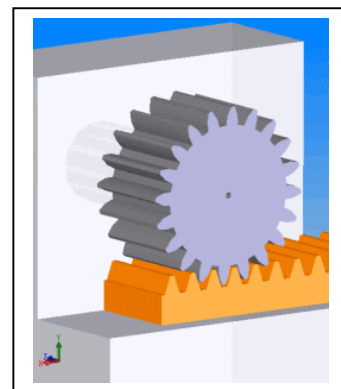
Remarque :

les valeurs habituelles du rendement d'un étage d'engrenage sont comprises entre 0,95 et 0,98.

3-4 Cas particulier de l'engrenage Pignon-Crémaillère

L'engrenage pignon-crémaillère peut être considéré comme un engrenage cylindrique dont une des roues dentée possède un diamètre infini ;

Le cercle primitif de cette roue (crémaillère) est alors une ligne nommée « **ligne primitive** » (figure 3-5).

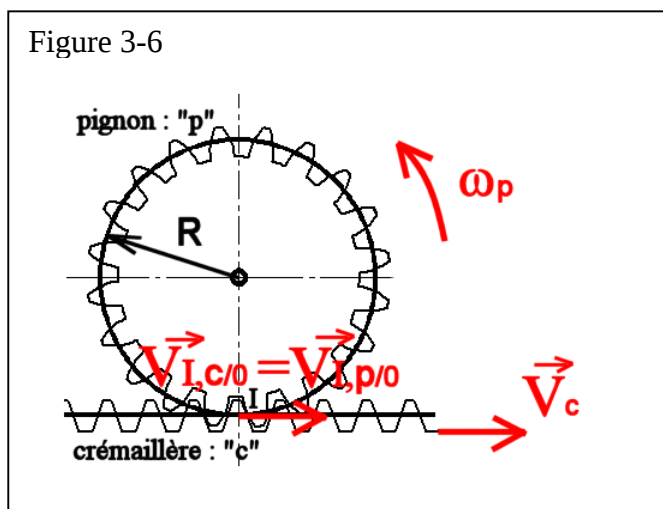


3-4-1 Etude Géométrique et Cinématique

Soit « I » le point de tangence entre le cercle primitif du pignon et la ligne primitive de la crémaillère.

L'étude géométrique et cinématique est basée sur le phénomène de **roulement sans glissement qui se produit au point « I »** : la vitesse du point « I » appartenant à la crémaillère est la même que la vitesse du point « I » qui appartient au pignon, dans le repère lié au support fixe « 0 ».(figure 3-6) :

$$\vec{V}_{I,C/0} = \vec{V}_{I,P/0} ;$$



R étant le rayon primitif du pignon on obtient alors :

Loi cinématique	Loi géométrique
Vitesse crémaillère = (Rayon pignon) x (Vitesse angulaire pignon)	Déplacement crémaillère = (Rayon pignon) x (Angle de rotation pignon)
$V_c = R \cdot \omega_p$	$D_c = R \cdot \theta_p$

3-4-2 Transmission des actions mécaniques

L'étude est effectuée ici pour un engrenage à denture droite ;

soit « C » le couple extérieur exercé sur l'arbre du pignon « p » ;

On cherche à exprimer l'action transmise par le pignon « p » sur le crémaillère « c » :
Le profil de denture en « développante de cercle » transmet une action mécanique « $\vec{F}_{p \rightarrow c}$ » orientée dans la direction de la « droite de pression » (inclinaison normalisée définie par « l'angle de pression » : α) (souvent $\alpha = 20^\circ$).

Voir la figure 3-7 ;

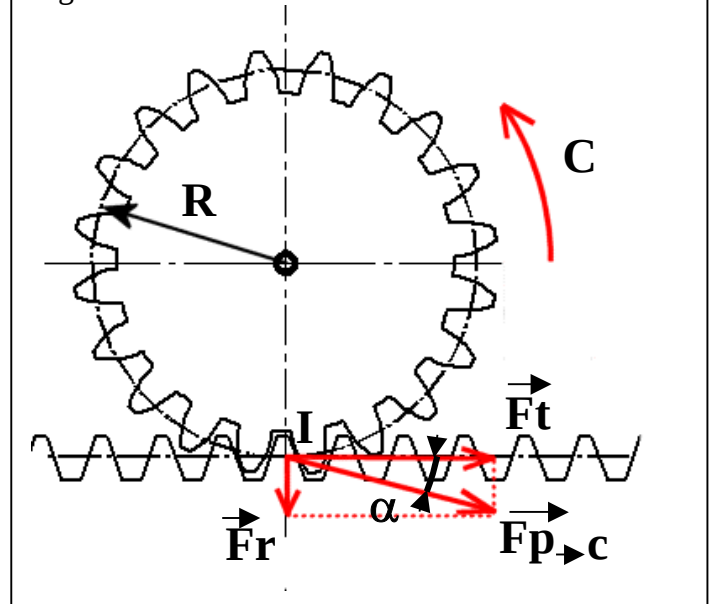
Si l'on isole le pignon « p » par la pensée et que l'on applique le théorème du moment autour de l'axe de rotation (Principe Fondamental de la Statique), on obtient :

$$C - R \cdot F_t = 0$$

Ce qui donne F_t en fonction de C : $F_t = \frac{C}{R}$,

qui permet de poursuivre l'étude des actions exercées sur la crémaillère.

Figure 3-7



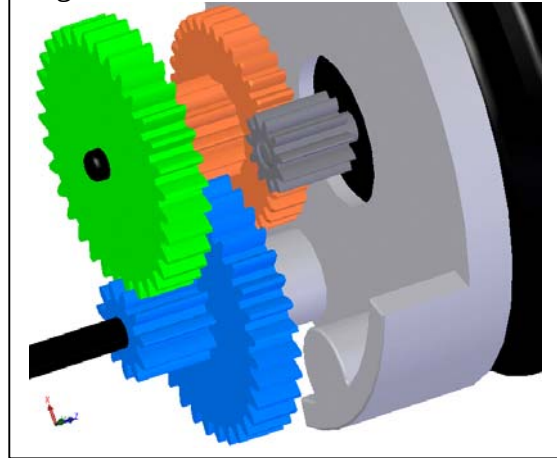
4. Association d'engrenages

Les démarches sont effectuées pour le cas le plus courant d'une chaîne cinématique dans laquelle les engrenages sont associés en série.

4-1 Association d'étages d'engrenages

L'étude est conduite pour le cas des engrenages cylindriques, avec une transmission à trois étages (figures 4-1 et 4-2), mais elle peut être généralisée à un nombre « n » d'étages, et à tous les types d'engrenages.

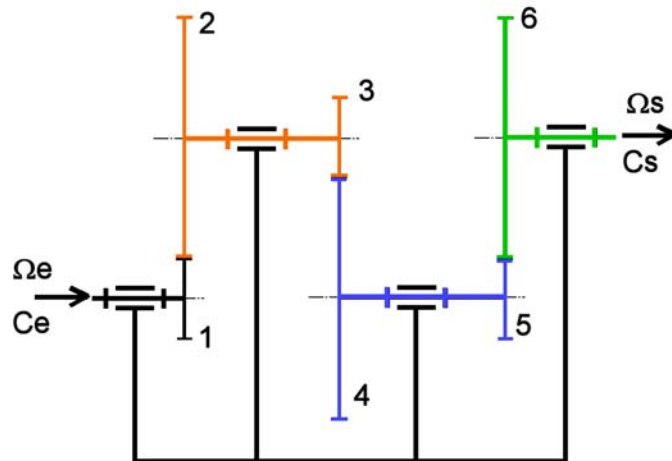
Figure 4-1



Notations :

- arbre d'entrée « e » :
vitesse : Ω_e ;
Couple : C_e .
- arbre de sortie « s » :
vitesse : Ω_s ;
Couple : C_s .
- 1^{er} arbre intermédiaire : « 2-3 ».
- 2^{ème} arbre intermédiaire : « 4-5 ».

Figure 4-2



4-1-1 Etude Cinématique

Soit « $r = r_{1-6}$ » le rapport de transmission global ; on cherche à exprimer « r » :

On a : $r = \frac{\Omega_6}{\Omega_1} = \frac{\Omega_6}{\Omega_5} \cdot \frac{\Omega_4}{\Omega_3} \cdot \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ (car $\Omega_5 = \Omega_{4-5} = \Omega_4$ et $\Omega_3 = \Omega_{3-2} = \Omega_2$) ;

Dans chacun des étages d'engrenages (1-2), (3,4), (5,6), on peut appliquer la loi de transmission ;

on obtient « r » en fonction des diamètres primitifs : $r = \frac{D_5}{D_6} \cdot \frac{D_3}{D_4} \cdot \frac{D_1}{D_2}$

En utilisant la relation : $D = m \cdot Z$, on obtient :

$$r = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} \cdot \frac{Z_5}{Z_6} \quad \text{que l'on mémorise par : } r = \frac{\Omega_{\text{sortie}}}{\Omega_{\text{entrée}}} = \frac{\text{Produit } [Z_{\text{roues menantes}}]}{\text{Produit } [Z_{\text{roues menées}]}}$$

Nota : pour un réducteur de vitesse, on a : $r < 1$

Si l'on pose $r_{1-2} = \frac{Z_1}{Z_2}$ et $r_{3-4} = \frac{Z_3}{Z_4}$ et $r_{5-6} = \frac{Z_5}{Z_6}$

on peut aussi écrire : $r = r_{1-6} = r_{1-2} \cdot r_{3-4} \cdot r_{5-6}$

4-1-2 Transmission des actions mécaniques

L'objectif est d'exprimer la relation entre le couple « C_e » exercé par le milieu extérieur (moteur) sur l'arbre d'entrée, et le couple « C_s » exercé par l'arbre de sortie sur le milieu extérieur (récepteur).

En appliquant à chaque étage, la relation mise en place pour un étage d'engrenages, on démontre que :

- si les pertes par frottement sont négligées :

$$\frac{C_s}{C_e} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_{1-2} \cdot r_{3-4} \cdot r_{5-6}}$$

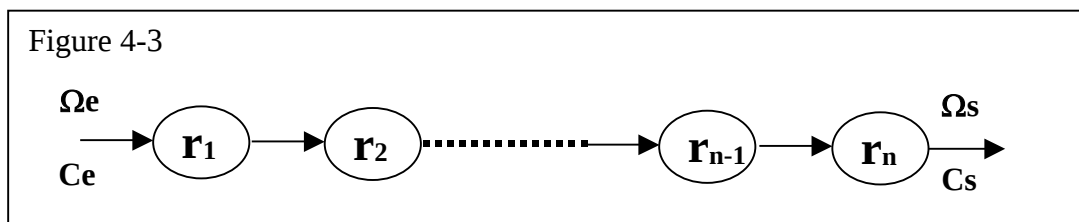
- Et en tenant compte des pertes :

$$\frac{C_s}{C_e} = \frac{\eta}{r} = \frac{\eta}{r_{1-2} \cdot r_{3-4} \cdot r_{5-6}}$$

η étant le rendement global de la transmission ($\eta < 1$)

4-2 Association de réducteurs ou de multiplicateurs

L'étude est conduite pour une association de réducteurs ou de multiplicateurs, placés en série comme le montre la figure 4-3.



Les rapports de transmission de chaque composant sont : $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$.

Etude Cinématique :

Le rapport de transmission global est le produit des rapport de transmission de chaque composant :

$$r = \frac{\Omega_s}{\Omega_e} = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{n-1} \cdot r_n \quad \text{et aussi :} \quad r = \frac{\theta_s}{\theta_e} = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{n-1} \cdot r_n$$

Transmission des actions mécaniques

Le rapport des couples transmis est l'inverse du rapport de transmission, au rendement près :

- si les pertes par frottement sont négligées :

$$\frac{C_s}{C_e} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1 \cdot \dots \cdot r_{n-1} \cdot r_n}$$

- Et en tenant compte des pertes :

$$\frac{C_s}{C_e} = \frac{\eta}{r} = \frac{\eta}{r_1 \cdot \dots \cdot r_{n-1} \cdot r_n}$$

η étant le rendement global de la transmission ($\eta < 1$)