Sur la métrique de Schwarzschild en espace fini

Application à la théorie MOND

On the Schwarzschild metric in finite space

Application to the MOND theory

Michel Canac*

* E-mail: markusbloch690@orange.fr

Résumé: Ce document présente une variante de la métrique de Schwarzschild, définie dans un espace fini. Cette métrique nécessite l'introduction de deux fonctions arbitraires. En général, ces fonctions n'induisent pas de différence avec la métrique classique de Schwarzschild en milieu infini. Cependant, on montre dans ce document qu'il existe au moins un cas particulier basé sur un signal triangulaire qui ne peut pas se ramener à la métrique classique de Schwarzschild par un changement de coordonnées, par suite de la permutation continue du rôle spatial/temporel des coordonnée r et t. Ce cas particulier conduit à une configuration d'espace fini dans lequel la courbure Riemannienne de l'espace-temps est oscillatoire ; la vitesse des étoiles dans cet espace est pratiquement constante, ce qui permet de retrouver le résultat de la zone asymptotique de la théorie MOND de Mordehai Milgrom. Cette métrique s'applique donc dans la zone où la loi de Tully-Fisher s'applique, sans l'adjonction de matière noire dans cette région. Pour représenter la zone intermédiaire de MOND, nous avons utilisé une métrique hybride, combinant cette métrique oscillatoire et la métrique classique de Schwarzschild ; nous parvenons ainsi à justifier entièrement la théorie MOND dans le cadre de la Relativité Générale.

Abstract: this document presents a variant of the Schwarzschild metric, defined in a finite space. Two arbitrary functions are needed in this metric. In general, these functions do not induce any difference between this metric and the classical Schwarzschild metric in infinite space. However, we prove in this document that at least one solution exists, based on a triangular signal, which is different from the classical Schwarzschild metric, due to the continuous permutation of the spatial/temporal role of the r and t coordinates. In this particular case, the Riemann space-time curvature is oscillatory; the star orbital velocity in this space is approximately constant, which allows recovering the result obtained in the asymptotic region of the MOND theory by Mordehai Milgrom. Then, this metric applies in a region which is governed by the Tully-Fisher law, without any dark matter in this region. For modeling the MOND intermediate region, we have used an hybrid metric, combining this oscillatory metric and the Schwarzschild metric; this method allows to justify completely the MOND theory in the framework of General Relativity.

Mots-clés: métrique, non statique, galaxie, Schwarzschild, Tully-Fisher, MOND, courbure, oscillatoire

Keywords: metric, non static, galaxy, Schwarzschild, Tully-Fisher, MOND, curvature, oscillatory

1 Introduction

On sait, depuis la publication de la métrique de Schwarzschild (1916) et du théorème de Birkhoff (1923), qu'un champ de gravitation central symétrique dans le vide dans un espace infini est automatiquement statique dans le cadre de la Relativité Générale. En coordonnées sphériques (R, θ, φ), la métrique de Schwarzschild est définie par l'intervalle d'espace-temps ds:

$$\mathrm{ds}^2 = (1 - \mathrm{R}_0/\mathrm{R})\mathrm{dt}^2 - \mathrm{dR}^2/(1 - \mathrm{R}_0/\mathrm{R}) - \mathrm{R}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) \tag{1.1}$$

où t est la coordonnée de temps en mètres ($\mathrm{t} = c \times \mathrm{t_s}$ où $\mathrm{t_s}$ est la coordonnée de temps en sec), c est la vitesse de la lumière, R est la coordonnée radiale d'espace, θ est la colatitude, φ est la longitude, G est la constante gravitationnelle, M est la masse du corps central sphérique, et $\mathrm{R}_0 = 2\ GM/c^2$.

Nous allons présenter dans ce document une variante de la métrique de Schwarzschild, définie dans un espace fini. Cette variante nécessite l'introduction de deux fonctions arbitraires. La plupart de ces fonctions n'induisent pas de changement par rapport à la métrique classique de Schwarzschild. Cependant, nous verrons qu'il existe au moins un cas particulier utilisant une fonction périodique, qui induit un comportement différent par rapport à la métrique de Schwarzschild. Ce cas particulier a une incidence sur la trajectoire des étoiles en périphérie des galaxies. Il permet de représenter la loi de Tully-Fisher telle qu'elle est modélisée dans la partie asymptotique de la théorie MOND [1],[2],[3] de Mordehai Milgrom.

Dans les expressions mathématiques de ce document, les exposants t, r représentent les dérivées partielles par rapport aux coordonnées t, r; les exposants u, v représentent les dérivées par rapport aux fonctions u, v.

2 Transformation de l'intervalle d'espace-temps

Utilisant la transformation:

$$\mathrm{dr} = \mathrm{dR}/|1 - \mathrm{R}_0/\mathrm{R}| \tag{2.1}$$

nous transformons l'intervalle ds (1.1) dans la forme suivante, en coordonnées (r, θ, φ) de la tortue:

$$\mathrm{ds}^2 = [1 - \mathrm{R}_0/\mathrm{R(r)}](\mathrm{dt}^2 - \mathrm{dr}^2) - [\mathrm{R(r)}]^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) \tag{2.2}$$

$$\mathrm{r} = \mathrm{R} + \mathrm{R}_0\mathrm{Log}\,|(\ \mathrm{R}/\mathrm{R}_0) - 1| \tag{2.3}$$

Nous réécrivons l'intervalle ds (2.2) dans la forme équivalente :

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{e}^{2\nu(\mathrm{r})}\mathrm{dt}^2 - \mathrm{e}^{2\nu(\mathrm{r})}\mathrm{dr}^2 - [\mathrm{R(r)}]^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{2.4}$$

où ν(r), R(r) sont les fonctions définies par les relations (2.2) et (2.3). Nous postulons que cette métrique peut être étendue sous la forme d'une métrique non statique dans un espace fini, en faisant l'hypothèse que les fonctions ν(r), R(r) peuvent être étendues dans le domaine temporel sous la forme : ν(t,r), R(t,r), ces fonctions étant définies comme étant les solutions de l'équation tensorielle: $\mathbf{R_{ij}} = 0$, où $\mathbf{R_{ij}}$ est le tenseur de Ricci. Par hypothèse, nous définissons la métrique non statique par l'intervalle d'espace-temps :

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{e}^{2\nu(\mathrm{t,r})}\mathrm{dt}^2 - \mathrm{e}^{2\nu(\mathrm{t,r})}\mathrm{dr}^2 - [\mathrm{R(t,r)}]^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{2.5}$$

3 Synthèse de la métrique non statique en espace fini

La démonstration complète est reportée en Annexe A.

Définissons deux coordonnées radiales arbitraires : $\mathrm{r_B}$ et $\mathrm{r_M}$ ($\mathrm{r_B} < \mathrm{r_M}$), et deux fonctions arbitraires deux fois différentiables: HP(u) et HM(v). Dans un espace fini, la solution de l'équation tensorielle: $\mathbf{R_{ij}} = 0$ est définie par les relations suivantes:

$$\mathrm{r_B} \le \mathrm{r} \le \mathrm{r_M} \tag{3.1}$$

$$\mathrm{z} = \mathrm{R(t,r)} + \mathrm{R}_0\mathrm{Log}\,|(\mathrm{R(t,r)}/\mathrm{R}_0) - 1| \tag{3.2}$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{t} + \mathrm{r}\ ;\ \mathrm{v} = \mathrm{t} - \mathrm{r} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial \mathrm{t}^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial \mathrm{r}^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{z} = \mathrm{HP(u)} - \mathrm{HM(v)} \tag{3.4}$$

$$\mathrm{e}^{2\nu(\mathrm{t,r})} = 4\mathrm{HP^u}\ \mathrm{HM^v}[1 - \mathrm{R}_0/\mathrm{R(t,r)}] \tag{3.5}$$

$$ds^2 = 4\,HP^u\,HM^v[1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.6)$$

La fonction R(t,r) est définie implicitement par les relations (3.2) et (3.4). Les transformations mathématiques ci-après montrent qu'il semble qu'on puisse, a priori, se ramener toujours à la métrique classique de Schwarzschild. Nous effectuons les transformations suivantes sur la métrique (3.6), en supposant qu'elles soient toutes légitimes :

$$ds^2 = 4\,HP^u\,HM^v[1 - R_0/R(t,r)]\,du\,dv - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.7)$$

$$ds^2 = 4\,[1 - R_0/R(t,r)]\,dHP\,dHM - \{R[HP(u) - HM(v)]\}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.8)$$

$$ds^2 = (1 - R_0/R)\,[(dHP + dHM)^2 - (dHP - dHM)^2] - [R(HP(u) - HM(v))]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.9)$$

$$z = HP(u) - HM(v) = R + R_0 \mathrm{Log}\,|(R/R_0) - 1| \quad (3.10)$$

Renommons: $HP(u)+HM(v) = t'$; $HP(u)-HM(v) = r'$, nous obtenons:

$$ds^2 = [1 - R_0/R(r')]\,[(dt')^2 - (dr')^2] - [R(r')]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.11)$$

$$z = r' = R + R_0 \mathrm{Log}\,|(R/R_0) - 1| \quad (3.12)$$

Les relations (3.11) et (3.12) définissent la métrique de Schwarzschild écrite en coordonnées de la tortue. La métrique (3.6) peut être déduite directement de la métrique statique en effectuant à l'envers les opérations (3.7) à (3.12). Cependant, dans ce cas, lorsque nous effectuons à l'envers les transformations (3.8) → (3.7), les fonctions HP(u) et HM(v) sont introduites artificiellement sans aucune justification, tandis que dans la démonstration complète (cf. Annexe A), ces fonctions sont introduites comme solutions d'une équation de transport (cf. relations (A2.7) et (A2.8)) ; de plus, dans la procédure de calcul inverse, nous ne prouvons pas que la métrique (3.6) est la solution unique de l'équation $\mathbf{R_{ij}} = 0$ obtenue à partir de la métrique (2.5).

Enfin, pour certaines catégories de fonctions HP(u) et HM(v), les coordonnées t et r échangent au cours du temps leur rôle temporel/spatial, ce qui peut rendre impossible les transformations de coordonnées permettant de se ramener à la métrique classique de Schwarzschild.

Raisonnons maintenant dans un espace fini. Nous devons définir les fonctions HP(u) et HM(v). Supposons que la fonction R(t,r) soit physiquement bornée supérieurement, et telle que : $R(t,r) \leq R_C$, où R_C est une grandeur physique dépendant uniquement de la masse *M* du corps central. Il est clair que la métrique classique de Schwarzschild ne pourrait pas prendre en compte cette contrainte physique. Nous allons montrer que cela est possible avec la métrique (3.6).

4 Métrique à fonction z bornée

Définissons un espace sphérique fini par : $r_B \leq r \leq r_M$, où r_B et r_M sont deux coordonnées radiales finies arbitraires.

Soient deux nombres positifs arbitraires ω et R_c. Soit le signal triangulaire $F^{\omega}_{tr}(x)$ de pulsation ω et d'amplitude $\frac{\pi}{2\omega}$:

$$F^{\omega}_{tr}(x) = -\frac{4}{\pi\omega} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\cos(2k+1)\omega x}{(2k+1)^2} \quad (4.1)$$

Sa dérivée est le signal carré $F^{\omega}_{sq}(x)$ d'amplitude 1 :

$$\frac{d\,F^{\omega}_{tr}(x)}{d\,x} = F^{\omega}_{sq}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\sin(2k+1)\omega x}{(2k+1)} \quad (4.2)$$

On pose: $$HP(u) = F^{\omega}_{tr}(u)/2 \;;\; HM(v) = -R_c + F^{\omega}_{tr}(v)/2 \quad (4.3)$$

$$HP^u = F^{\omega}_{sq}(u)/2 \;;\; HM^v = F^{\omega}_{sq}(v)/2 \quad (4.4)$$

$$z = HP(u) - HM(v) = R_c + [F^{\omega}_{tr}(u) - F^{\omega}_{tr}(v)]/2 = R + R_0 \mathrm{Log}\,|(R/R_0) - 1| \quad (4.5)$$

D'où: $$R_c - \frac{\pi}{2\omega} \leq R + R_0 \mathrm{Log}\,|(R/R_0) - 1| \leq R_c + \frac{\pi}{2\omega} \quad (4.6)$$

Soit R_C tel que: $$R_c = R_C + R_0 \mathrm{Log}\,|(R_C/R_0) - 1| \quad (4.7)$$

D'où: $$R_C - \frac{\pi}{2\omega} \leq R + R_0 \mathrm{Log}\,\frac{|(R/R_0) - 1|}{|(R_C/R_0) - 1|} \leq R_C + \frac{\pi}{2\omega} \quad (4.8)$$

R(t,r) ne dépend que de fonctions cosinus en t+r et t−r, donc R(r,t) = R(t,r). La métrique (3.6) devient :

$$ds^2 = F^{\omega}_{sq}(u)\,F^{\omega}_{sq}(v)[1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.9)$$

ou $$ds^2 = F^{\omega}_{sq}(t + r)\,F^{\omega}_{sq}(t - r)[1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.10)$$

Analyse de l'impact des changements de signe des dérivées HP^u et HM^v sur la métrique :

Nous utilisons la propriété du signal carré : $F_{sq}^{\omega}(x-y) = -F_{sq}^{\omega}(y-x)$; soit $\Omega^2 = [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.

1^{er} cas: $F_{sq}^{\omega}(t+r) = 1$ et $F_{sq}^{\omega}(t-r) = 1 \Rightarrow ds^2 = [1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$

$2^{ème}$ cas: $F_{sq}^{\omega}(t+r) = 1$ et $F_{sq}^{\omega}(t-r) = -1 \Rightarrow ds^2 = F_{sq}^{\omega}(t+r)F_{sq}^{\omega}(r-t)\,[1 - R_0/R(t,r)](dr^2 - dt^2) - \Omega^2$

$$ds^2 = (1)(1)\,[1 - R_0/R(t,r)](dr^2 - dt^2) - \Omega^2 \Rightarrow HP^u = 1/2 \text{ et } HM^v = 1/2$$

La coordonnée r devient temporelle, la coordonnée t devient spatiale ; permutons les symboles r et t :

$$ds^2 = [1 - R_0/R(r,t)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$$

$3^{ème}$ cas: $F_{sq}^{\omega}(t+r) = -1$ et $F_{sq}^{\omega}(t-r) = 1 \Rightarrow ds^2 = F_{sq}^{\omega}(t+r)F_{sq}^{\omega}(r-t)\,[1 - R_0/R(t,r)](dr^2 - dt^2) - \Omega^2$

$$ds^2 = (-1)(-1)[1 - R_0/R(t,r)](dr^2 - dt^2) - \Omega^2 \Rightarrow HP^u = -1/2 \text{ et } HM^v = -1/2$$

La coordonnée r devient temporelle, la coordonnée t devient spatiale ; permutons les symboles r et t :

$$ds^2 = [1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$$

$4^{ème}$cas : $F_{sq}^{\omega}(t+r) = -1$ et $F_{sq}^{\omega}(t-r) = -1 \Rightarrow ds^2 = (-1)(-1)\,[1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$

On constate donc que, dans tous les cas, la métrique se ramène à la formule :

$$ds^2 = [1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{4.11}$$

Pour les cas 1 et 2, on obtient: $HP^u = 1/2$ et $HM^v = 1/2$ (4.12)

Pour les cas 3 et 4, on obtient: $HP^u = -1/2$ et $HM^v = -1/2$ (4.13)

La fonction R reste continue au cours de l'évolution temporelle, et elle est pratiquement constante (cas envisagé : $\omega \gg \pi/2$) la différentielle de l'intervalle de temps réel dT entre deux évènements localisés à (r, θ, φ) est :

$$c\, dT = \sqrt{1 - R_0/R(t,r)}\,|dt| \approx |dt| \qquad (\text{cas envisagé: } R_0/R(t,r) \ll 1) \tag{4.14}$$

la différentielle de l'intervalle de distance radiale réelle dL_r est :

$$dL_r = \sqrt{1 - R_0/R(t,r)}\, dr \approx dr \qquad (\text{cas envisagé: } R_0/R(t,r) \ll 1) \tag{4.15}$$

Analysons la fonction z : $dz = du\, HP^u - dv\, HM^v = dR/(1 - R_0/R)$ (4.16)

1^{er}cas et $2^{ème}$cas : $dz = (du - dv)/2 = dr$

$3^{ème}$cas et $4^{ème}$cas : $dz = -(du - dv)/2 = -dr$

On a donc, avec $\varepsilon = \pm 1$: $dz = \varepsilon\, dr = dR/(1 - R_0/R)$ (4.17)

D'où la relation: $dr = \varepsilon\, dR/(1 - R_0/R)$ (4.18)

La formule de la métrique (4.11) est similaire à la formule de la métrique de Schwarzschild en coordonnées de la tortue, mais dans la formule (4.11) R est fonction du temps.

Si on utilisait la transformation : $dr^2 = dR^2/(1 - R_0/R)^2$, la métrique (4.11) pourrait être transformée sous la forme :

$$ds^2 = [1 - R_0/R]dt^2 - dR^2/[1 - R_0/R] - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{4.19}$$

La formule (4.19) est formellement identique à celle de la métrique classique de Schwarzschild ; cependant cette formule n'est pas légitime, car, d'après les relations (4.17) et (4.18) la fonction r(R) n'existe pas, puisque ε oscille dans l'espace au cours du temps ($\varepsilon = \pm 1$). Ce résultat prouve qu'une métrique non statique ne peut pas se ramener dans tous les cas à la métrique classique de Schwarzschild.

Soit le scalaire de Kretschmann $Kr = \boldsymbol{R^{abcd}R_{abcd}}$ obtenu par contraction du tenseur de Riemann :

$$Kr = 48\ (G^2M^2)/[c^4 R(t,r)^6] \tag{4.20}$$

Il s'ensuit que la courbure Riemannienne de l'espace-temps est oscillatoire. Dans cette métrique non statique, la fonction R(t,r) est bornée (cf. inégalités (4.8)) ; l'encadrement de la fonction peut être arbitrairement petit, puisque la valeur de la pulsation ω peut être arbitrairement grande. Si $\omega \gg \pi/2$, la fonction R(t,r) devient pratiquement égale à une constante : $R(t,r) \approx R_C$.

5 Intégrales premières des géodésiques dans le cas général de la métrique non statique

Posons : κ=1 pour les particules massives, et κ=0 pour les particules sans masse ; soient Er : l'énergie de la particule, h : le moment cinétique de la particule, σ: le temps propre de la particule en mètres ($\sigma = c\,\tau$ où τ est le temps propre en secondes) pour une particule massive, ou un paramètre affine pour une particule sans masse, et soit w=1/R.

Les intégrales premières peuvent être déduites simplement des intégrales premières de la métrique de Schwarzschild ; cependant, leur calcul direct a été reporté en Annexe B. Ces intégrales premières sont définies par les relations suivantes, où R, w, r, t sont les coordonnées d'une particule massive ou sans masse suivant la valeur de κ :

$$\theta = \pi/2 \tag{5.1}$$

$$\mathrm{R}^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma} = \mathrm{h} \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + (1 - \mathrm{R_0/R})\,[(\mathrm{h^2/R^2}) + \boldsymbol{\kappa}] = (\mathrm{E_r})^2 \tag{5.3}$$

$$\frac{\mathrm{d^2w}}{\mathrm{d}\varphi^2} + \mathrm{w} - 3\,\mathrm{w^2\,R_0}/2 = \boldsymbol{\kappa}\ \mathrm{R_0}/(2\mathrm{h}^2) \tag{5.4}$$

$$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(\mathrm{R^2E_r/h})(\mathrm{HM^v+HP^u}) + (\mathrm{dR/d\varphi})(\mathrm{HM^v-HP^u})}{4\mathrm{HP^uHM^v}(1-\mathrm{R_0/R})} \tag{5.5}$$

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(\mathrm{R^2E_r/h})(\mathrm{HM^v-HP^u}) + (\mathrm{dR/d\varphi})(\mathrm{HM^v+HP^u})}{4\mathrm{HP^uHM^v}(1-\mathrm{R_0/R})} \tag{5.6}$$

Soit $\mathrm{V_T}$ la vitesse orbitale d'une particule massive en orbite circulaire : $\mathrm{R = R_s}$, on obtient:

$$(\mathrm{E_r})^2 = \frac{[1-\mathrm{R_0/R_s}]^2}{[1-(3/2)\mathrm{R_0/R_s}]} \tag{5.7}$$

$$\frac{(\mathrm{R_s})^2\ \mathrm{E_r/h}}{(1-\mathrm{R_0/R_s})} = \frac{\mathrm{R_s}\sqrt{\mathrm{R_s}}}{\sqrt{G\ M/c^2}} \tag{5.8}$$

$$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(\mathrm{R_s})^2\ \mathrm{E_r/h}}{(1-\mathrm{R_0/R_s})}\frac{(\mathrm{HM^v+HP^u})}{4\mathrm{HP^uHM^v}} = \frac{\mathrm{R_s}\sqrt{\mathrm{R_s}}}{\sqrt{G\ M/c^2}}\ \frac{(\mathrm{HM^v+HP^u})}{4\mathrm{HP^uHM^v}} \tag{5.9}$$

$$(\mathrm{V_T})^2 = (\mathrm{R_s})^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dT}}\right)^2 = (\mathrm{R_s})^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^2\left(\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dT}}\right)^2 = \frac{G\ M/\mathrm{R_s}}{(1-\mathrm{R_0/R_s})}\frac{4\mathrm{HP^uHM^v}}{(\mathrm{HM^v+HP^u})^2} \tag{5.10}$$

Pour le détail d'établissement de ces formules cf. Annexe B §2 et §3. Les relations (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) sont identiques aux relations correspondantes de la métrique de Schwarzschild. En conséquence, la fonction $\mathrm{w}(\varphi) = 1/\mathrm{R}(\varphi)$ est strictement identique à la fonction équivalente de la métrique statique. Des différences apparaissent uniquement quand on calcule les coordonnées t, r et les valeurs réelles de temps et distances. Pour calculer les géodésiques, nous devons procéder de la manière suivante : 1/ calcul de la fonction w(φ) déduite de la relation (5.4), d'où $\mathrm{R}(\varphi) = 1/\mathrm{w}(\varphi)$; 2/ calcul des fonctions HP(u) et HM(v) ; 3/ calcul des coordonnées t et r à partir des relations (5.5), (5.6) ; 4/ calcul des grandeurs réelles.

La déviation δ_R des rayons lumineux est obtenue par la relation classique :

$$\delta_\mathrm{R} = 4GM/[c^2\mathrm{R(t,r)}] \tag{5.11}$$

6 Géodésiques de la métrique à fonction z bornée

Il y a quatre cas possibles ; utilisant les relations (5.5) et (5.6), on obtient :

$$1^{\mathrm{er}}\text{cas et } 2^{\grave{\mathrm{e}}\mathrm{me}}\text{ cas : } \mathrm{HP^u} = \frac{1}{2};\ \mathrm{HM^v} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(\mathrm{R^2E_r/h})}{(1-\mathrm{R_0/R})}\ ;\ \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(\mathrm{dR/d\varphi})}{(1-\mathrm{R_0/R})} \tag{6.1}$$

$$3^{\grave{\mathrm{e}}\mathrm{me}}\text{cas et } 4^{\grave{\mathrm{e}}\mathrm{me}}\text{cas: } \mathrm{HP^u} = -\frac{1}{2};\ \mathrm{HM^v} = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{(\mathrm{R^2E_r/h})}{(1-\mathrm{R_0/R})}\ ;\ \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{(\mathrm{dR/d\varphi})}{(1-\mathrm{R_0/R})} \tag{6.2}$$

Mise en cohérence des différentielles des coordonnées :

On est amené à effectuer des moyennes sur les quatre cas référencés. Il faut donc que dans chaque cas les coordonnées soient mises en cohérence avec les grandeurs réelles. Nous prenons le premier cas comme cas de référence. D'après la formule (4.17), les différentielles dr sont cohérentes avec les différentielles dR, puisque la moyenne de dR est nulle. D'après les relations (6.1) et (6.2), on obtient en moyenne : $\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\varphi} = 0$. Pour analyser la dérivée $\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\varphi}$, nous devons prendre en compte l'intégrale première: $R^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} = h$: la variation de l'angle φ en fonction du temps propre est monotone. La relation que nous prenons en référence est : $\frac{dt}{d\varphi} = \frac{(R^2 E_r/h)}{(1-R_0/R)}$. Le rapport $\frac{dt}{d\varphi}$ ne peut pas changer de signe au cours du temps si les différentielles dt des quatre cas sont rendues cohérentes par rapport au temps réel. En conséquence, il faut changer le signe de la différentielle dt pour le 3ème et le 4ème cas. Cette transformation sera à nouveau utilisée au §8.

On obtient donc, dans tous les cas, les formules suivantes, où $\varepsilon = \pm 1$ et dT est la différentielle du temps réel:

$$\left|\frac{dt}{d\varphi}\right| = \frac{(R^2 E_r/h)}{(1-R_0/R)} \;\Rightarrow\; \frac{dT}{d\varphi} = \frac{(R^2 E_r/h)}{c\sqrt{1-R_0/R}} \tag{6.3}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \varepsilon \frac{(dR/d\varphi)}{(1-R_0/R)} \tag{6.4}$$

Considérons le cas d'une particule massive dont la trajectoire est telle que $R(\varphi) = R_s$ = constante. Soient V_r la vitesse radiale et V_T la vitesse orbitale. Nous obtenons les résultats suivants :

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0 \tag{6.5}$$

$$(V_r/c) = 0 \tag{6.6}$$

$$(V_T)^2 = (R_s)^2 \left(\frac{d\varphi}{dT}\right)^2 = \frac{(G\,M/R_s)}{(1-R_0/R_s)} \tag{6.7}$$

Si $R_0/R_C \ll 1$ et $\omega \gg \pi/2$: $$(V_T)^2 \approx (G\,M/R_C) \tag{6.8}$$

On obtient donc pour la vitesse orbitale (6.8) la formule classique de Newton, à condition de remplacer dans la formule le paramètre de distance par la valeur locale de la fonction R. La fonction R étant pratiquement constante dans l'espace fini, la vitesse orbitale des étoiles localisées dans cette zone reste constante. Ce résultat est en accord avec la tendance asymptotique de la théorie MOND [1], [2], [3]. Dans cette théorie, la vitesse orbitale asymptotique V_{outM} des étoiles dans une galaxie est définie par la relation : $(V_{outM})^4 = G\,M_b\,a_0$, où $a_0 \sim 1.2 \times 10^{-10}\ \mathrm{m.s^{-2}}$ et où M_b est la masse baryonique de la galaxie. En identifiant la vitesse orbitale V_T et la vitesse V_{outM} , on obtient :

$$(V_{outM})^4 = (V_T)^4 = G\,M_b\,a_0 = (G\,M_b/R_C)^2 \Rightarrow R_C = \sqrt{G\,M_b/a_0} \tag{6.9}$$

Cette relation établit donc un lien entre la valeur moyenne R_C de la fonction R et la constante de Milgrom a_0 . Nous en arrivons à la conclusion que la modélisation de la zone asymptotique de la théorie MOND est en accord avec une solution particulière de la métrique non statique de Schwarzschild en espace fini. Selon ces résultats, la courbure de l'espace-temps est oscillatoire dans la zone asymptotique de MOND. Dans cette zone, la déviation de la lumière δ_R et le scalaire de Kretschmann Kr sont obtenus en valeur moyenne par les relations :

$$\delta_R \approx 4GM_b/[c^2 R_C] \tag{6.10}$$

$$Kr \approx 48\ (G\,M_b)^2/[c^4 (R_C)^6] \tag{6.11}$$

L'oscillation du scalaire de Kretschmann se produit autour de la valeur Kr_{min}:

$$Kr_{min} = 48\ (G\,M_b)^2/(c^4 (R_C)^6) = 48\ (G\,M_b)^2/[c^4 (G\,M_b/a_0)^3] = 48\ (a_0)^3/(c^4\,G\,M_b) \tag{6.12}$$

Soit $Ckr = 48\,(a_0)^3/(c^4\,G) \sim 1.5 \times 10^{-52}\ Kg.m^{-4}$ $$\Rightarrow \quad Kr_{min} = Ckr/M_b \tag{6.13}$$

Nota : Dans les formules (6.10) et (6.11), nous avons utilisé la masse baryonique, ce qui implique que nous supposons qu'il n'y a pas de matière noire dans toute la galaxie, alors que nous n'avons analysé précédemment que la zone asymptotique de MOND. Nous anticipons ainsi les résultats de l'analyse de la zone de transition de MOND, décrite en §8 et §9.

7 Rappel sur la théorie MOND

La théorie MOND, développée par Mordehai Milgrom (Milgrom 1983 [1]), fait l'hypothèse que l'accélération gravitationnelle Newtonienne a_N, décrite par la formule: $a_N = GM/r^2$ change de forme pour une valeur particulière de l'accélération, la valeur critique: $a_0 \sim 1.2 \times 10^{-10} m.s^{-2}$; la relation $a = a_N$ devient: $a_N = a \times \mu(a/a_0)$, où $\mu(a/a_0)$ est une fonction d'interpolation empirique, égale à 1 pour $a >> a_0$, et égale à : $\mu = a/a_0$ si $a << a_0$ dans le régime d'accélération faible. La valeur limite de l'accélération faible a_f est : $a_f = \sqrt{a_N \times a_0} = \sqrt{GM_b a_0}/r$. La formule classique de l'accélération en $1/r^2$est remplacée par une formule en $1/r$. Une fonction $\mu(a/a_0)$ utilisée couramment est définie par:

$$\mu(a/a_0) = (a/a_0)/\sqrt{1+(a/a_0)^2} \tag{7.1}$$

En conséquence, la vitesse asymptotique $\mathrm{V_{outM}}$ atteinte par les étoiles sur les bords des galaxies est donnée par la formule : $\mathrm{V}^2_{\mathrm{outM}}/r = \sqrt{GM_b a_0}/r \Rightarrow \mathrm{V}^4_{\mathrm{outM}} = GM_b a_0$. MOND retrouve la loi empirique de Tully-Fisher, dans laquelle la masse baryonique de la galaxie est proportionnelle à $\mathrm{V}^4_{\mathrm{outM}}$(Moffat 2005 [2]). Milgrom a calculé a_0 pour être en accord avec les mesures de vitesses des étoiles.

Pour préciser la localisation de la zone intermédiaire de MOND dans la galaxie, posons : $\mathrm{L_A = k_A R_C}$ et $\mathrm{L_B = k_B R_C}$. Nous faisons l'hypothèse que la zone intermédiaire commence à la distance $\mathrm{L_A}$ et se termine à la distance $\mathrm{L_B}$. En utilisant la formule (7.1), nous avons obtenu les ordres de grandeurs suivants : $\mathrm{k_A} \approx 0.4$ et $\mathrm{k_B} \approx 2.5 \Rightarrow \mathrm{k_A k_B} = 1$. La formule d'interpolation (7.1) donne les résultats suivants :

pour $\mathrm{k_A} = 0.4$: accélération interpolée/accélération de Newton = 1.01

pour $\mathrm{k_B} = 2.5$: accélération interpolée/accélération asymptotique MOND = 1.04

MOND a obtenu de bons résultats pour décrire les profils de vitesses dans de nombreuses galaxies. Les résultats obtenus au §6 (cf. relation (6.8)) montrent que l'on peut interpréter la zone asymptotique de MOND par un effet de la métrique non statique à fonction z bornée. Le comportement asymptotique de MOND est donc explicable par la Relativité Générale sans présence de matière noire.

8 Métrique hybride

Cette métrique est une combinaison de la métrique classique de Schwarzschild et de la métrique à fonction z bornée. Nous allons l'utiliser pour interpréter le comportement de la zone intermédiaire de MOND. Nous définissons un espace sphérique fini par : $\mathrm{r_A \le r \le r_B}$, où $\mathrm{r_A}$ et $\mathrm{r_B}$ sont deux coordonnées radiales finies arbitraires. Soient deux nombres positifs arbitraires α et ω. Soient les fonctions HP(u) et HM(v) :

$$\mathrm{HP(u)} = \alpha\,\mathrm{u}/2 + \mathrm{F^{\omega}_{tr}(u)}/2 \;\; ; \;\; \mathrm{HM(v)} = -\mathrm{r_A} + \alpha\,\mathrm{v}/2 + \mathrm{F^{\omega}_{tr}(v)}/2 \tag{8.1}$$

$$\mathrm{HP^u} = \left[\alpha + \mathrm{F^{\omega}_{sq}(u)}\right]/2 \;\; ; \;\; \mathrm{HM^v} = \left[\alpha + \mathrm{F^{\omega}_{sq}(v)}\right]/2 \tag{8.2}$$

$$\mathrm{z} = \mathrm{HP(u)} - \mathrm{HM(v)} = \mathrm{r_A} + \alpha\,(\mathrm{u}-\mathrm{v})/2 + \left[\mathrm{F^{\omega}_{tr}(u)} - \mathrm{F^{\omega}_{tr}v}\right]/2 = \mathrm{R} + \mathrm{R_0 Log}\,|(\mathrm{R/R_0}) - 1| \tag{8.3}$$

$$\mathrm{dz} = \mathrm{du\,HP^u} - \mathrm{dv\,HM^v} = \alpha\,\mathrm{dr} + \left[\mathrm{F^{\omega}_{sq}(u)du} - \mathrm{F^{\omega}_{sq}(v)dv}\right]/2 = \mathrm{dR}/(1-\mathrm{R_0/R}) \tag{8.4}$$

La métrique (3.6) devient :

$$\mathrm{ds^2} = \left[\alpha + \mathrm{F^{\omega}_{sq}(u)}\right]\left[\alpha + \mathrm{F^{\omega}_{sq}(v)}\right](1-\mathrm{R_0/R})(\mathrm{dt^2}-\mathrm{dr^2}) - [\mathrm{R(t,r)}]^2(\mathrm{d\theta^2} + \sin^2\theta\,\mathrm{d\varphi^2}) \tag{8.5}$$

A/ Première possibilité : $\alpha > 1$

1^{er}cas : $\mathrm{F^{\omega}_{sq}(t+r)} = 1$ et $\mathrm{F^{\omega}_{sq}(t-r)} = 1 \Rightarrow \mathrm{ds^2} = (\alpha+1)(\alpha+1)\,[1-\mathrm{R_0/R(t,r)}](\mathrm{dt^2}-\mathrm{dr^2}) - \Omega^2$

$2^{ème}$cas : $\mathrm{F^{\omega}_{sq}(t+r)} = 1$ et $\mathrm{F^{\omega}_{sq}(t-r)} = -1 \Rightarrow \mathrm{ds^2} = (\alpha+1)(\alpha-1)\,[1-\mathrm{R_0/R(t,r)}](\mathrm{dt^2}-\mathrm{dr^2}) - \Omega^2$

$3^{ème}$cas : $\mathrm{F^{\omega}_{sq}(t+r)} = -1$ et $\mathrm{F^{\omega}_{sq}(t-r)} = 1 \Rightarrow \mathrm{ds^2} = (\alpha-1)(\alpha+1)\,[1-\mathrm{R_0/R(t,r)}](\mathrm{dt^2}-\mathrm{dr^2}) - \Omega^2$

$4^{ème}$cas : $\mathrm{F^{\omega}_{sq}(t+r)} = -1$ et $\mathrm{F^{\omega}_{sq}(t-r)} = -1 \Rightarrow \mathrm{ds^2} = (\alpha-1)(\alpha-1)\,[1-\mathrm{R_0/R(t,r)}](\mathrm{dt^2}-\mathrm{dr^2}) - \Omega^2$

Le produit $\mathrm{Y} = \left[\alpha + \mathrm{F^{\omega}_{sq}(u)}\right]\left[\alpha + \mathrm{F^{\omega}_{sq}(v)}\right]$ est donc égal, en moyenne à : $\mathrm{Y} = \frac{(1+\alpha)^2 + 2(\alpha^2-1) + (1-\alpha)^2}{4} = \alpha^2$

1^{er} cas : $\mathrm{HP^u} = (\alpha+1)/2$; $\mathrm{HM^v} = (\alpha+1)/2$; $2^{ème}$cas : $\mathrm{HP^u} = (\alpha+1)/2$; $\mathrm{HM^v} = (\alpha-1)/2$ (8.6)

$3^{ème}$cas : $\mathrm{HP^u} = (\alpha-1)/2$; $\mathrm{HM^v} = (\alpha+1)/2$; $4^{ème}$cas : $\mathrm{HP^u} = (\alpha-1)/2$; $\mathrm{HM^v} = (\alpha-1)/2$ (8.7)

Calcul de la différentielle dz : $\mathrm{dz} = \mathrm{du\,HP^u} - \mathrm{dv\,HM^v}$:

1^{er} cas: $\mathrm{dz} = \mathrm{du}\,(\alpha+1)/2 - \mathrm{dv}\,(\alpha+1)/2 = \alpha\,\mathrm{dr} + \mathrm{dr}$

$2^{ème}$ cas: $\mathrm{dz} = \mathrm{du}\,(\alpha+1)/2 - \mathrm{dv}\,(\alpha-1)/2 = \alpha\,\mathrm{dr} + \mathrm{dt}$

$3^{ème}$ cas: $\mathrm{dz} = \mathrm{du}\,(\alpha-1)/2 - \mathrm{dv}\,(\alpha+1)/2 = \alpha\,\mathrm{dr} - \mathrm{dt}$

$$4^{\text{ème}}\text{ cas: } dz = \quad du\ (\alpha - 1)/2 - dv\,(\alpha - 1)/2 = \quad \alpha\, dr \quad - dr$$

En moyenne sur les 4 cas: $dz = \alpha\, dr$.

En moyenne, on obtient donc la métrique:

$$ds^2 = (1 - R_0/R)[(\alpha dt)^2 - (\alpha dr)^2] - [R(r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{et} \quad \alpha\, dr = dR/(1 - R_0/R) \tag{8.8}$$

Cette métrique est la métrique classique de Schwarzschild écrite en coordonnées de la tortue. Si la fréquence du signal triangulaire est suffisamment grande, il n'y a donc pratiquement pas de différence entre la métrique (8.5) et la métrique classique de Schwarzschild pour $\alpha > 1$.

B/ Deuxième possibilité : $\alpha < 1$

Analyse des changements de signe des dérivées HP^u et HM^v sur la métrique :

1^{er}cas : $F^{\omega}_{sq}(t + r) = 1$ et $F^{\omega}_{sq}(t - r) = 1 \Rightarrow ds^2 = (\alpha + 1)(\alpha + 1)\,[1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$

d'où : $HP^u = (1 + \alpha)/2$; $HM^v = (1 + \alpha)/2$; $ds^2 = (1 + \alpha)^2\ [1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$

$2^{\text{ème}}$cas : $F^{\omega}_{sq}(t + r) = 1$ et $F^{\omega}_{sq}(t - r) = -1 \Rightarrow ds^2 = [\alpha + F^{\omega}_{sq}(t + r)][-\alpha + F^{\omega}_{sq}(r - t)]\,[1 - R_0/R(t,r)](dr^2 - dt^2) - \Omega^2$

$$ds^2 = (1 + \alpha)(1 - \alpha)\,[1 - R_0/R(t,r)](dr^2 - dt^2) - \Omega^2 \Rightarrow HP^u = (1 + \alpha)/2;\ HM^v = (1 - \alpha)/2$$

La coordonnée r devient temporelle, la coordonnée t devient spatiale ; permutons les symboles r et t :

$$ds^2 = (1 - \alpha^2)\ [1 - R_0/R(r,t)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$$

$3^{\text{ème}}$cas : $F^{\omega}_{sq}(t + r) = -1$ et $F^{\omega}_{sq}(t - r) = 1 \Rightarrow ds^2 = [\alpha + F^{\omega}_{sq}(t + r)][-\alpha + F^{\omega}_{sq}(r - t)]\,[1 - R_0/R(t,r)](dr^2 - dt^2) - \Omega^2$

$$ds^2 = (\alpha - 1)(-\alpha - 1)\,[1 - R_0/R(r,t)](dr^2 - dt^2) - \Omega^2 \Rightarrow HP^u = -(1 - \alpha)/2;\ HM^v = -(1 + \alpha)/2$$

La coordonnée r devient temporelle, la coordonnée t devient spatiale ; permutons les symboles r et t :

$$ds^2 = (1 - \alpha^2)\ [1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$$

$4^{\text{ème}}$cas : $F^{\omega}_{sq}(t + r) = -1$ et $F^{\omega}_{sq}(t - r) = -1 \Rightarrow ds^2 = (\alpha - 1)(\alpha - 1)\,[1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$

d'où : $HP^u = -(1 - \alpha)/2$; $HM^v = -(1 - \alpha)/2$; $ds^2 = (1 - \alpha)^2\ [1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - \Omega^2$

Le produit $Y = [\alpha + F^{\omega}_{sq}(u)]\,[\alpha + F^{\omega}_{sq}(v)]$ est donc égal, en moyenne à : $Y = \frac{(1+\alpha)^2 + 2(1-\alpha^2) + (1-\alpha)^2}{4} = 1$

$$1^{\text{er}}\text{ cas : } HP^u = (1 + \alpha)/2\ ;\ HM^v = (1 + \alpha)/2\ ;\ 2^{\text{ème}}\text{cas : } HP^u = (1 + \alpha)/2\ ;\ HM^v = (1 - \alpha)/2 \tag{8.9}$$

$$3^{\text{ème}}\text{cas : } HP^u = -(1 - \alpha)/2\ ;\ HM^v = -(1 + \alpha)/2\ ;\ 4^{\text{ème}}\text{cas : } HP^u = -(1 - \alpha)/2\ ;\ HM^v = -(1 - \alpha)/2 \tag{8.10}$$

$$\Rightarrow \text{moyenne de } [4\, HP^u HM^v] = 1 \quad ; \quad \text{moyenne de } |HP^u + HM^v| = 1 \tag{8.11}$$

Calcul de la différentielle dz : $dz = du\, HP^u - dv\, HM^v$:

$$1^{\text{er}}\text{ cas: } dz = \quad du\ (1 + \alpha)/2 - dv\,(1 + \alpha)/2 = \quad \alpha\, dr \quad + dr$$

$$2^{\text{ème}}\text{ cas: } dz = \quad du\ (1 + \alpha)/2 - dv\,(1 - \alpha)/2 = \quad \alpha\, dt \quad + dr$$

$$3^{\text{ème}}\text{ cas: } dz = -du\ (1 - \alpha)/2 + dv\,(1 + \alpha)/2 = -\alpha\, dt^{(*)} \quad - dr$$

$$4^{\text{ème}}\text{ cas: } dz = -du\ (1 - \alpha)/2 + dv\,(1 - \alpha)/2 = \quad \alpha\, dr \quad - dr$$

(∗) dans le $3^{\text{ème}}$ cas, la différentielle dt a été changée de signe pour mise en cohérence des différentielles (cf. §6).

Sur la moyenne des 4 cas :
$$dz = (\alpha/2)\ dr = dR/(1 - R_0/R) \tag{8.12}$$

En moyenne, la métrique (8.5) est obtenue sous la forme suivante:

$$ds^2 = (1 - R_0/R)[dt^2 - dr^2] - [R(r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{8.13}$$

$$(\alpha/2)\, dr = dR/(1 - R_0/R) \tag{8.14}$$

Cette métrique est donc différente de la métrique classique de Schwarzschild à cause de la relation (8.14).

En moyenne, la fonction R ne dépend que de r. Soit $\beta = 2/\alpha$. On obtient, dans le cas : $\omega \gg \pi/2$ et $R_0/R \ll 1$:

$$dr \approx \beta\, dR \tag{8.15}$$

la différentielle de l'intervalle de temps réel dT entre deux évènements localisés à (r, θ, φ) est :

$$c\, dT = \sqrt{1 - R_0/R(r)}\,|dt| \approx |dt| \qquad (\text{cas envisagé: } R_0/R(t,r) \ll 1) \tag{8.16}$$

la différentielle de l'intervalle de distance radiale réelle dL_r est :

$$dL_r = \sqrt{1 - R_0/R(r)}\ dr \quad \approx \ dr \qquad (\text{cas envisagé: } R_0/R(t,r) \ll 1) \tag{8.17}$$

De la relation (8.15) on déduit: $\quad dL_r \approx dr \approx \beta\, dR \qquad (8.18)$

9 Géodésiques de la métrique hybride

Des relations (5.9) et (8.11), on obtient : $4HP^u HM^v \left|\frac{dt}{d\varphi}\right| = \frac{R_s\sqrt{R_s}}{\sqrt{G\,M/c^2}}\ |HM^v + HP^u| \Rightarrow \left|\frac{dt}{d\varphi}\right| = \frac{R_s\sqrt{R_s}}{\sqrt{G\,M/c^2}}$ en moyenne. La vitesse orbitale V_T d'une particule massive en orbite circulaire définie par $R = R_s$ est: $(V_T)^2 = \frac{G\,M/R_s}{(1-R_0/R_s)}$. Cette formule s'avère donc valide dans tout le domaine de la galaxie.

Le début de la zone intermédiaire de MOND est situé à la distance radiale L_A, où l'on a : $R_A \approx L_A$, puisque l'on est à la fin de la zone Newtonienne. D'après la relation (8.18), dans cette zone intermédiaire, une distance radiale L est obtenue en fonction de R par la formule : $L \approx L_A + \beta(R - R_A) \ \Rightarrow$ à la fin de la zone de transition: $L_B \approx L_A + \beta(R_C - L_A)$

$$\beta = \frac{L_B - L_A}{R_C - L_A} = \frac{k_B - k_A}{1-k_A} \sim \frac{2.5-0.4}{1-0.4} = 3.5 \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{2}{3.5} = 0.57$$

$$R \approx L_A + (L - L_A)/\beta \Rightarrow R \approx R_C[k_A + (L/R_C - k_A)/\beta] \ = (L + R_C)/\beta$$

D'où la vitesse orbitale pour une étoile située à la distance L_s du centre de la galaxie $(0.4 \le L_s/R_C \le 2.5)$.

$$V_T = \sqrt{\frac{GM/R_C}{k_A + (L_s/R_C - k_A)/\beta}} = \sqrt{\beta\,\frac{GM/R_C}{1 + L_s/R_C}}$$

$$V_T \ \cong \ 1.87 \ \frac{V_{outM}}{\sqrt{1 + L_s/R_C}} \tag{9.1}$$

Si, dans le cadre de réévaluations ultérieures, on est amené à modifier β, tout en maintenant la relation : $k_A\, k_B = 1$, on aura toujours les relations : $k_A = 1/(\beta - 1)$ et $k_B = (\beta - 1)$.

La déviation δ_R des rayons lumineux est obtenue par la relation classique : $\delta_R = \frac{4GM}{c^2 R}$. D'où la formule (L= distance réelle) :

$$\delta_R = \frac{4GM/(c^2 R_C)}{k_A + (L/R_C - k_A)/\beta} \cong \ 3.5 \ \frac{4GM/(c^2 R_C)}{1 + L/R_C} \tag{9.2}$$

10 Délimitation de la zone de transition

Suivant nos résultats, dans une galaxie, le scalaire de Kretschmann Kr a une borne inférieure $Kr_{min} \sim 1.5 \times 10^{-52}/M_b$. L'existence de cette limite provoque l'existence d'une zone asymptotique en périphérie de la galaxie, s'étendant jusqu'à une distance où l'interaction avec les galaxies voisines se fait sentir. Dans cette zone, la fonction R oscille à haute fréquence avec une faible amplitude suivant un signal triangulaire : elle est donc constante en moyenne sur la zone asymptotique; on obtient : $R \ \cong R_C = \sqrt{G\,M_b/a_0}$.

Première hypothèse :

Nous revenons sur la définition des bornes de la zone de transition. En nous basant sur les données de la théorie MOND, nous avons défini le démarrage de la zone de transition à la distance : $L_A = k_A R_C$. Cela revient à admettre que le coefficient α, caractéristique de la métrique hybride, change de valeur et devient supérieur à 1 si le scalaire de Kretschmann est supérieur à une certaine valeur $Kr_{trans} \Rightarrow$ si $Kr > Kr_{trans} = (R_C/R_A)^6\, Kr_{min} \ \Rightarrow \ \alpha > 1$.

$$Kr_{trans} \sim (2.5)^6 \times 1.5 \times 10^{-52}/M_b \tag{10.1}$$

Si $Kr > Kr_{trans}$ on est dans la zone de Schwarzschild. La fin de la zone de transition est localisée à la distance $L_B = k_B R_C$. Pour définir k_B, nous proposons la conjecture suivante : au début de la formation de la galaxie, nous admettons qu'il n'existe que deux zones : la zone de Schwarzschild et la zone asymptotique ; on a alors : $k_A = k_B = 1$. Le signal à haute fréquence se propage alors en direction du centre de la galaxie suivant l'équation d'onde linéaire : $z^{tt} = z^{rr}$ tout en maintenant l'égalité : $k_A k_B = 1$. Le signal se combine avec la métrique de Schwarzschild, générant progressivement la zone de transition. L'accroissement de la zone de transition s'arrête lorsque le signal à haute fréquence devient pratiquement inopérant (α>1) à la valeur du scalaire de Kretschmann : $Kr = Kr_{trans}$.

Deuxième hypothèse :

Dans cette hypothèse, envisageons la possibilité que la fonction α soit une fonction continue de la densité de masse baryonique locale dans une métrique générale définie dans un espace sphérique fini empli de matière. Dans ce cas, il n'existerait plus de zone de transition, et le problème de la définition des deux points de transition ne se poserait plus. Cette hypothèse serait à développer dans un document ultérieur.

11 Synthèse des métriques

Selon les résultats de ce document, la métrique dans une galaxie est de la forme :

$$ds^2 = [1 - R_0/R(t,r)](dt^2 - dr^2) - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$z = R(t,r) + R_0 \mathrm{Log}\,|(R(t,r)/R_0) - 1|$$

L'espace radial de la galaxie est composé de trois zones. Chaque zone a une fonction z particulière.

Soient $R_C = \sqrt{G\,M_b/a_0}$; $a_0 \sim 1.2 \times 10^{-10} m.s^{-2}$; $r_A = k_A R_C$; $r_B = k_B R_C$ où $k_A \sim 0.4$; $k_B \sim 2.5$;

Dans toutes les zones, la fonction z contient un signal triangulaire à haute fréquence de moyenne nulle (STHF).

$$1^{\text{ère}}\text{zone : zone (quasi) de Schwarzschild } (\alpha > 1) : r \le r_A \Rightarrow z = r + \text{STHF}$$

$$2^{\text{ème}}\text{zone : zone de transition } (\alpha \sim 0.57) : r_A < r < r_B \Rightarrow z = r_A + (r - r_A)\,\alpha/2 + \text{STHF}$$

$$3^{\text{ème}}\text{zone : zone symptotique } (\alpha = 0) : r \ge r_B \Rightarrow z = R_C + \text{STHF}$$

En négligeant le rapport $R_0/R(t,r)$, on obtient pour la distance réelle radiale L : $L \approx r \Rightarrow L_A \approx r_A$; $L_B \approx r_B$

La vitesse orbitale V_T des étoiles décrivant une orbite circulaire définie par $R = R_s$ est : $V_T \approx \sqrt{G\,M/R_s(L)}$.

La déviation d'un rayon lumineux est obtenue par la formule : $\delta_R = 4GM/[c^2 R(L)]$

R(L) est la fonction obtenue en négligeant le signal STHF et le rapport R_0/R.

$$1^{\text{ère}}\text{zone : } R(L) = L; \quad 2^{\text{ème}}\text{zone : } R(L) = L_A + (L - L_A)\,\alpha/2 \;; \quad 3^{\text{ème}}\text{zone : } R(L) = R_C$$

12 Conclusion

Il existe une solution pour interpréter la théorie MOND de Mordehai Milgrom dans le cadre de la Relativité Générale : dans un espace fini à symétrique sphérique dans le vide, il existe une métrique non statique, dans laquelle la courbure Riemannienne de l'espace-temps oscille en permanence autour d'une valeur moyenne ; la vitesse orbitale des étoiles dans cet espace est pratiquement constante. Ce résultat permet d'expliquer la loi de Tully-Fisher par la Relativité Générale sans l'apport de matière noire, ce qui est en accord avec la modélisation de la zone asymptotique de MOND. Nous interprétons le déclenchement de la métrique non statique dans une galaxie comme étant dû à l'existence d'une borne inférieure Kr_{min} du scalaire de Kretschmann Kr : $Kr_{min} \sim 1.5 \times 10^{-52}/M_b$ où M_b est la masse baryonique de la galaxie. Une métrique hybride, obtenue en composant cette métrique oscillatoire avec la métrique classique de Schwarzschild permet de modéliser la zone de transition de la théorie MOND. Nous parvenons ainsi interpréter l'intégralité de la théorie MOND dans une galaxie par la Relativité Générale. Il faudrait, dans de futurs développements, définir une métrique dans un espace fini empli de matière sans zone de transition, et appliquer ces résultats à l'interaction des galaxies dans un amas. Il est possible qu'il existe d'autres métriques non statiques présentant un intérêt sur le plan physique.

Références

[1] M.Milgrom(1983): The Astrophysical Journal, 270:365,1983 A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis

[2] J.R.Brownstein and J.W.Moffat: Galaxy Rotation Curves Without Non-Baryonic Dark Matter arXiv:astroph/0506370v4 22 Sep2005

[3] Riccardo Scarpa: Modified Newtonian Dynamics, an Introductory Review 2006

Annexe A

Calcul de la métrique non statique

Dans les expressions mathématiques de ce document, les exposants t, r définissent les dérivées partielles par rapport aux coordonnées t, r. Les exposants u, v, z, R définissent les dérivées exactes par rapport aux fonctions u, v, z, R; R_0 est défini par la relation : $R_0 = 2GM/c^2$

1 Le tenseur de Ricci

Pour l'intervalle d'espace-temps défini par: $ds^2 = e^{2\nu(t,r)}dt^2 - e^{2\lambda(t,r)}dr^2 - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, les composantes différentes de zéro du tenseur de Ricci sont définies par les expressions suivantes:

$$R_{00} = \nu^t(\lambda^t + 2R^t/R) - (\lambda^t\lambda^t + \lambda^{tt} + 2R^{tt}/R) + e^{2\nu-2\lambda}[\nu^{rr} + \nu^r(\nu^r - \lambda^r) + 2\nu^r R^r/R] = 0 \quad \text{(A1.1)}$$

$$R_{11} = \lambda^r(\nu^r + 2R^r/R) - (\nu^r\nu^r + \nu^{rr} + 2R^{rr}/R) + e^{2\lambda-2\nu}[\lambda^{tt} - \lambda^t(\nu^t - \lambda^t) + 2\lambda^t R^t/R] = 0 \quad \text{(A1.2)}$$

$$R_{22} = 1 + e^{-2\nu}[R^{tt}R + R^tR^t - R^tR(\nu^t - \lambda^t)] - e^{-2\lambda}[R^{rr}R + R^rR^r + R^rR(\nu^r - \lambda^r)] = 0 \quad \text{(A1.3)}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\{1 + e^{-2\nu}[R^{tt}R + R^tR^t - R^tR(\nu^t - \lambda^t)] - e^{-2\lambda}[R^{rr}R + R^rR^r + R^rR(\nu^r - \lambda^r)]\} = 0 \quad \text{(A1.4)}$$

$$R_{01} = R_{10} = (2/R)(-R^{tr} + \nu^rR^t + \lambda^tR^r) = 0 \quad \text{(A1.5)}$$

On peut vérifier, en posant R(t,r) = r, que l'on obtient l'expression du tenseur de Ricci conduisant à la définition de la métrique de Schwarzschild. Maintenant, au lieu de poser : R(t,r) = r, nous posons: $\lambda(t,r) = \nu(t,r)$. Ce choix est fait pour obtenir une extension, dans le domaine temporel, de la métrique de Schwarzschild écrite en coordonnées de la tortue. Nous ignorons la composante R_{33}, qui est proportionnelle à R_{22} , et multiplions chaque composante du tenseur par un terme approprié, pour obtenir un nouveau système de quatre équations :

$$ds^2 = e^{2\nu(t,r)}dt^2 - e^{2\nu(t,r)}dr^2 - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{(A1.6)}$$

$$R\,R_{00} = 2\nu^tR^t - R\nu^{tt} - 2R^{tt} + R\nu^{rr} + 2\nu^rR^r = 0 \quad \text{(A1.7)}$$

$$R\,R_{11} = 2\nu^rR^r - R\nu^{rr} - 2R^{rr} + R\nu^{tt} + 2\nu^tR^t = 0 \quad \text{(A1.8)}$$

$$e^{2\nu}R_{22} = e^{2\nu} + (R^tR^t + RR^{tt}) - (R^{rr}R + R^rR^r) = 0 \quad \text{(A1.9)}$$

$$(R/2)\,R_{01} = -R^{tr} + \nu^rR^t + \nu^tR^r = 0 \quad \text{(A1.10)}$$

Nous effectuons deux combinaisons des équations (A1.7) et (A1.8) :

L'opposé de la demi somme: équation (A1.7)/2 + équation (A1.8) /2, et ses conséquences:

$$-2\nu^tR^t + R^{tt} - 2\nu^rR^r + R^{rr} = 0 \Rightarrow e^{-2\nu}(-2\nu^tR^t + R^{tt}) + e^{-2\nu}(-2\nu^rR^r + 2R^{rr}) = 0 \Rightarrow (R^te^{-2\nu})^t + (R^re^{-2\nu})^r = 0$$

La demi différence: équation (A1.7)/2 − équation (A1.8)/2

$$-R\nu^{tt} - R^{tt} + R\nu^{rr} + R^{rr} = 0$$

De l'équation (A1.9): $e^{2\nu} + (R^tR^t + RR^{tt}) - (R^{rr}R + R^rR^r) = 0 \Rightarrow (RR^r)^r - (RR^t)^t = e^{2\nu}$

Introduisant une fonction arbitraire deux fois différentiable: F(t,r), nous obtenons le système final de quatre équations:

$$(R^te^{-2\nu} + F^r)^t + (R^re^{-2\nu} - F^t)^r = 0 \quad \text{(A1.11)}$$

$$(RR^r)^r - (RR^t)^t - e^{2\nu} = 0 \quad \text{(A1.12)}$$

$$R^{tt} - R^{rr} + R\nu^{tt} - R\nu^{rr} = 0 \quad \text{(A1.13)}$$

$$-R^{tr} + \nu^rR^t + \nu^tR^r = 0 \quad \text{(A1.14)}$$

2 Résolution des équations (A1.11) et (A1.14)

La fonction F étant arbitraire, nous pouvons faire éclater l'équation (A1.11) en posant les deux équations (A2.1):

$$(R^te^{-2\nu} + F^r) = 0 \quad ; \quad (R^re^{-2\nu} - F^t) = 0 \quad \text{(A2.1)}$$

$$R^t = -F^re^{2\nu} \; ; \; R^r = F^te^{2\nu} \quad \text{(A2.2)}$$

$$R^tF^t + R^rF^r = 0 \quad \text{(A2.3)}$$

Calculons les dérivées des relations (A2.2) et remplaçons dans l'équation (A1.14) R^t et R^r par leurs valeurs :

$R^{tr} = -F^{rr}e^{2\nu} - 2\nu^r F^r e^{2\nu} \;=\; R^{rt} = F^{tt}e^{2\nu} + 2\nu^t F^t e^{2\nu} = -\nu^r F^r e^{2\nu} + \nu^t F^t e^{2\nu} \;\Rightarrow F^{tt} = F^{rr} = -\nu^r F^r - \nu^t F^t$

$$F^{tt} - F^{rr} = 0 \qquad \text{(A2.4)}$$

Posons: u = t+r ; v = t−r; FP(u) et FM(v) étant deux fonctions inconnues deux fois différentiables, nous obtenons :

$$F = FP(u) + FM(v) \;\Rightarrow F^t = FP^u + FM^v;\; F^r = FP^u - FM^v \;\Rightarrow \rho = (F^t)^2 - (F^r)^2 = 4FP^uFM^v \qquad \text{(A2.5)}$$

Réécrivons l'équation (A2.3) en coordonnées (u, v) au lieu de (t,r):

$$R^tF^t + R^rF^r = 0 \;\Rightarrow \left[\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)_u\right](FP^u + FM^v) + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)_v - \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)_u\right](FP^u - FM^v) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)_v FP^u + \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)_u FM^v = 0$$

$$\text{Posons : } HP^u = 1/(4\,FP^u)\;;\; HM^v = 1/(4\,FM^v) \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)_v}{4\,HP^u} + \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)_u}{4\,HM^v} = 0 \qquad \text{(A2.6)}$$

$$4HP^uHM^v = 1/(4FP^uFM^v) = 1/\rho$$

Réécrivons l'équation (A2.6) en coordonnées (HP, HM) au lieu de (u, v) :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)_v = \left(\frac{\partial R}{\partial HP}\right)_{HM} HP^u\,;\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)_u = \left(\frac{\partial R}{\partial HM}\right)_{HP} HM^v \;\Rightarrow \left(\frac{\partial R}{\partial HP}\right)_{HM} + \left(\frac{\partial R}{\partial HM}\right)_{HP} = 0 \qquad \text{(A2.7)}$$

La solution de l'équation (A2.7) est une fonction arbitraire du paramètre z défini ci-après:

$$z = HP(u) - HM(v) \qquad \text{(A2.8)}$$

$$R = R(z) \qquad \text{(A2.9)}$$

$$z^t = HP^u - HM^v\,;\; z^r = HP^u + HM^v \Rightarrow z^{tt} - z^{rr} = 0\;;\; (z^r)^2 - (z^t)^2 = 4HP^uHM^v = 1/\rho \qquad \text{(A2.10)}$$

$$R = R(z) \Rightarrow R^t = R^z(HP^u - HM^v)\;;\; R^r = R^z(HP^u + HM^v) \qquad \text{(A2.11)}$$

$$\text{Des relations (A2.2): } e^{2\nu} = -R^t/F^r = -R^z\frac{HP^u - HM^v}{FP^u - FM^v} = -R^z\frac{HP^u - HM^v}{\left(\frac{1}{4\,HP^u} - \frac{1}{4\,HM^v}\right)}$$

$$e^{2\nu} = 4\,HP^u\,HM^v\,R^z = R^z/\rho \qquad \text{(A2.12)}$$

3 Résolution de l'équation (A1.12)

$$(RR^r)^r - (RR^t)^t - e^{2\nu} = 0 \Rightarrow (RR^zz^r)^r - (RR^zz^t)^t - R^z/\rho = 0 \;\Rightarrow$$

$$(RR^z)^zz^rz^r + RR^zz^{rr} - (RR^z)^zz^tz^t - RR^zz^{tt} - R^z/\rho = 0 \quad\Rightarrow (RR^z)^z(z^rz^r - z^tz^t) + RR^z(z^{rr} - z^{tt}) - R^z/\rho = 0 \Rightarrow$$

$$(RR^z)^z/\rho - R^z/\rho = 0 \quad \Rightarrow (RR^z)^z - R^z = 0 \;\Rightarrow RR^z - R = -R_0 \Rightarrow R^z = (1 - R_0/R) \qquad \text{(A3.1)}$$

$$e^{2\nu} = 4\,HP^u\,HM^vR^z = 4\,HP^u\,HM^v(1 - R_0/R) \qquad \text{(A3.2)}$$

A la limite de la métrique statique, nous obtenons: $HP^u = HM^v = 1/2$.

$$R^z = dR/dz = (1 - R_0/R) \Rightarrow dz = dR/(1 - R_0/R) \;\Rightarrow \qquad \text{(A3.3)}$$

$$z = HP(u) - HM(v) = R + R_0\text{Log}\,|R/R_0 - 1| \qquad \text{(A3.4)}$$

La relation (A3.4) permet de déterminer implicitement la fonction R(t,r) en tant que fonction des deux fonctions deux fois différentiables HP(u) et HM(v)

Dans le cas de la métrique statique: HP(u)= (t+r)/2, HM(v) = (t−r)/2 ⇒ z = r. La relation (A3.2) définit $e^{2\nu(t,r)}$; la définition de la métrique non statique est terminée, mais nous devons vérifier l'équation (A1.13).

4 Vérification de l'équation (A1.13): $R^{tt} - R^{rr} + R\nu^{tt} - R\nu^{rr} = 0$

$$\text{De la relation (A2.9): } R^t = R^zz^t;\; R^r = R^zz^r \Rightarrow R^{tt} = R^{zz}z^tz^t + R^zz^{tt}\;;\; R^{rr} = R^{zz}z^rz^r + R^zz^{rr} \qquad \text{(A4.1)}$$

$$z^{rr} - z^{tt} = 0\;;\; (z^r)^2 - (z^t)^2 = 1/\rho\,;\; R^{tt} - R^{rr} = R^{zz}(z^tz^t - z^rz^r) + R^z(z^{tt} - z^{rr}) \;\Rightarrow R^{tt} - R^{rr} = -R^{zz}/\rho \qquad \text{(A4.2)}$$

$$\text{Des relations (A2.13): } e^{2\nu} = 4\,HP^u\,HM^vR^z \;\Rightarrow 2\nu = \text{Log}(R^z) + \text{Log}(2HP^u) + \text{Log}(2HM^v) \qquad \text{(A4.3)}$$

$$2\nu^t = (R^{zz}/R^z)z^t + (HP^{uu}/HP^u) + (HM^{vv}/HM^v) \Rightarrow 2\nu^{tt} = (R^{zz}/R^z)^zz^tz^t + (R^{zz}/R^z)z^{tt} + (HP^{uu}/HP^u)^u + (HM^{vv}/HM^v)^v \qquad \text{(A4.4)}$$

$$2\nu^r = (R^{zz}/R^z)z^r + (HP^{uu}/HP^u) - (HM^{vv}/HM^v) \Rightarrow 2\nu^{rr} = (R^{zz}/R^z)^zz^rz^r + (R^{zz}/R^z)z^{rr} + (HP^{uu}/HP^u)^u + (HM^{vv}/HM^v)^v \qquad \text{(A4.5)}$$

$$R\nu^{tt} - R\nu^{rr} = (R^{zz}/R^z)^z\,(z^tz^t - z^rz^r)\,R/2 + (R^{zz}/R^z)\,(z^{tt} - z^{rr})R/2 = -(R/2\rho)\,(R^{zz}/R^z)^z \qquad \text{(A4.6)}$$

$$R^{tt} - R^{rr} + R\nu^{tt} - R\nu^{rr} = -R^{zz}/\rho - (R/2\rho)\,(R^{zz}/R^z)^z \;= -(1/2\rho)[2R^{zz} + (R\,R^{zz}/R^z)^z - R^z\,R^{zz}/R^z] =$$

$$= \;-(1/2\rho)[R^z + R\,R^{zz}/R^z]^z = -(1/2\rho)[(RR^z)^z/R^z]^z = 0 \;\;\{\;(RR^z)^z = R^z \text{ des relations(A3.1)}\;\}$$

$$R^{tt} - R^{rr} + R\nu^{tt} - R\nu^{rr} = 0 \qquad \text{CQFD}$$

5 Synthèse de la métrique non statique

Soient u = t+r , v = t – r, HP(u), HP(v) (deux fonctions arbitraires deux fois différentiables), $R_0 = 2GM/c^2$

$$ds^2 = e^{2\nu(t,r)}dt^2 - e^{2\nu(t,r)}dr^2 - [R(t,r)]^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$e^{2\nu} = 4\,HP^{u}\,HM^{v}(1 - R_0/R) \qquad (A5.1)$$

$$z = HP(u) - HM(v) = R + R_0 \mathrm{Log}\,|R/R_0 - 1| \qquad (A5.2)$$

La fonction R(t,r) est définie implicitement par la relation (A5.2). Les fonctions HP(u) et HM(v) doivent a priori être déduites des conditions aux limites (une à l'amont et l'autre à l'aval) ; il existe cependant une autre possibilité : l'existence d'une loi physique contraignant la valeur de R(t,r) . Le domaine spatial de la métrique non statique est fini. Compte tenu de l'équation d'onde : $z^{tt} - z^{rr} = 0$, il est possible que des ondes internes auto entretenues s'établissent dans l'espace fini.

Le scalaire de Kretschmann Kr, obtenu par contraction du tenseur de Riemann, est égal à :

$$Kr = 48\,G^2M^2/\{c^4[R(t,r)]^6\} \qquad (A5.3)$$

Annexe B

Intégrales premières des géodésiques

Soientt: $\boldsymbol{\kappa} = 1$ pour les particules massives, $\boldsymbol{\kappa} = 0$ pour les particules sans masse , $\mathrm{w} = 1/\mathrm{R}$; $\mathrm{R_0} = 2\ G\, M/c^2$

Soient $\mathrm{E_r}$: l'énergie de la particule , h: le moment cinétique de la particule

1 Géodésiques de la métrique non statique

The nombres de Christoffel different de zero sont les suivants :

$\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{11} = \nu^t$; $\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \nu^r$; $\Gamma^0_{22} = e^{-2\nu}RR^t$; $\Gamma^0_{33} = e^{-2\nu}RR^t\sin^2\theta$

$\Gamma^1_{00} = \Gamma^1_{11} = \nu^r$; $\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \nu^t$; $\Gamma^1_{22} = -e^{-2\nu}RR^r$; $\Gamma^1_{33} = -e^{-2\nu}RR^r\sin^2\theta$

$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = R^t/R$; $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = R^r/R$; $\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$

$\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = R^t/R$; $\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = R^r/R$; $\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \mathrm{cotg}\,\theta$

Les géodésiques sont définies par l'équation : $\frac{d^2x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$

σ est le temps propre en mètres ($\sigma = c\tau$) où τ est le temps propre pour une particule massive, et un paramètre affine pour une particule sans masse. Dans cette Annexe, les exposants σ, φ représentent les dérivées par rapport aux paramètres σ, φ. Utilisant les nombres de Christoffel, nous obtenons les quatre équations des géodésiques :

$$t^{\sigma\sigma} + \nu^t(t^\sigma)^2 + 2\nu^r t^\sigma r^\sigma + \nu^t(r^\sigma)^2 + e^{-2\nu}RR^t(\theta^\sigma)^2 + e^{-2\nu}RR^t\sin^2\theta(\varphi^\sigma)^2 = 0 \quad \text{(B1.1)}$$

$$r^{\sigma\sigma} + \nu^r(t^\sigma)^2 + 2\nu^t t^\sigma r^\sigma + \nu^r(r^\sigma)^2 - e^{-2\nu}RR^r(\theta^\sigma)^2 - e^{-2\nu}RR^r\sin^2\theta(\varphi^\sigma)^2 = 0 \quad \text{(B1.2)}$$

$$\theta^{\sigma\sigma} + 2(R^t/R)t^\sigma\theta^\sigma + 2(R^r/R)r^\sigma\theta^\sigma - \sin\theta\cos\theta\,(\varphi^\sigma)^2 = 0 \quad \text{(B1.3)}$$

$$\varphi^{\sigma\sigma} + 2(R^t/R)t^\sigma\varphi^\sigma + 2(R^r/R)r^\sigma\varphi^\sigma + 2\,\mathrm{cotg}\,\theta\ \ \theta^\sigma\varphi^\sigma = 0 \quad \text{(B1.4)}$$

Des transformations simples conduisent aux relations suivantes :

$$(R^2\theta^\sigma)^\sigma - R^2\sin\theta\cos\theta\,(\varphi^\sigma)^2 = 0 \quad \text{(B1.5)}$$

$$(R^2\sin^2\theta\,\varphi^\sigma)^\sigma = 0 \Rightarrow R^2\sin^2\theta\,\varphi^\sigma = h \quad \text{(B1.6)}$$

Par suite de la symétrie du problème, la trajectoire est contenue dans un plan ; nous posons : $\theta = \pi/2$ (le choix usuel). Nous obtenons ainsi les deux relations :

$$\theta = \pi/2 \quad \text{(B1.7)}$$

$$R^2\,\varphi^\sigma = h \quad \text{(B1.8)}$$

De l'intervalle d'espace-temps: $ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\nu}dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, nous dérivons l'intégrale première suivante:

$$e^{2\nu}(t^\sigma)^2 - e^{2\nu}(r^\sigma)^2 - (h^2/R^2) = \boldsymbol{\kappa} \quad \Rightarrow \quad (t^\sigma)^2 - (r^\sigma)^2 = e^{-2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] \quad \text{(B1.9)}$$

Pour obtenir les deux dernières intégrales premières, nous procédons aux calculs suivants :

Les équations (B1.1) and (B1.2) sont réécrites:

$$t^{\sigma\sigma} + 2\nu^t(t^\sigma)^2 + 2\nu^r r^\sigma t^\sigma + \nu^t[(r^\sigma)^2 - (t^\sigma)^2] + e^{-2\nu}RR^t(h^2/R^4) = 0 \quad \text{(B1.10)}$$

$$r^{\sigma\sigma} + 2\nu^t t^\sigma r^\sigma + 2\nu^r(r^\sigma)^2 - \nu^r[(r^\sigma)^2 - (t^\sigma)^2] - e^{-2\nu}RR^r(h^2/R^4) = 0 \quad \text{(B1.11)}$$

$$e^{2\nu}t^{\sigma\sigma} + 2e^{2\nu}\nu^\sigma t^\sigma + e^{-2\nu}\{-\nu^t e^{2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] + e^{2\nu}RR^t(h^2/R^4)\} = 0 \ \Rightarrow (e^{2\nu}t^\sigma)^\sigma - (e^{-2\nu}/2)\{e^{2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}]\}^t = 0 \quad \text{(B1.12)}$$

$$e^{2\nu}r^{\sigma\sigma} + 2e^{2\nu}\nu^\sigma r^\sigma + e^{-2\nu}\{\ \nu^r e^{2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] - e^{2\nu}RR^r(h^2/R^4)\} = 0 \ \Rightarrow (e^{2\nu}r^\sigma)^\sigma + (e^{-2\nu}/2)\{e^{2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}]\}^r = 0 \quad \text{(B1.13)}$$

$e^{2\nu} = (1 - R_0/R)/\rho$; soit : $\Omega = (1 - R_0/R)[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] = \rho e^{2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] \Rightarrow$

$$\Omega/\rho = e^{2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] \quad \text{(B1.14)}$$

$$2(e^{2\nu}t^\sigma)^\sigma - e^{-2\nu}(\Omega/\rho)^t = 0 \quad \text{(B1.15a)}$$

$$2\,(e^{2\nu}r^\sigma)^\sigma + e^{-2\nu}(\Omega/\rho)^r = 0 \quad \text{(B1.15b)}$$

Multipliant l'équation (B1.15a) par $-F^r$, l'équation (B1.15b) par F^t et additionnant, nous obtenons :

$$-2F^r(e^{2\nu}t^\sigma)^\sigma + e^{-2\nu}F^r(\Omega/\rho)^t + 2F^t\,(e^{2\nu}r^\sigma)^\sigma + e^{-2\nu}F^t(\Omega/\rho)^r = 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{(B1.16)}$$

$$(-2F^r e^{2\nu} t^\sigma + 2F^t e^{2\nu} r^\sigma)^\sigma + 2e^{2\nu}(F^r)^\sigma t^\sigma - 2e^{2\nu}(F^t)^\sigma r^\sigma + e^{-2\nu}F^r(\Omega/\rho)^t + e^{-2\nu}F^t(\Omega/\rho)^r = 0 \quad (B1.17)$$

$R^t = -F^r e^{2\nu}$; $R^r = F^t e^{2\nu}$; $dR = -F^r e^{2\nu}dt + F^t e^{2\nu}dr$; l'équation (B1.17) devient:

$$2R^{\sigma\sigma} + 2e^{2\nu}(F^r)^\sigma t^\sigma - 2e^{2\nu}(F^t)^\sigma r^\sigma + e^{-2\nu}F^r[(\Omega^R/\rho)R^t - (\Omega/\rho^2)\rho^t] + e^{-2\nu}F^t[(\Omega^R/\rho)R^r - (\Omega/\rho^2)\rho^r] = 0 \quad (B1.18)$$

$$2e^{2\nu}(F^r)^\sigma t^\sigma - 2e^{2\nu}(F^t)^\sigma r^\sigma = 2e^{2\nu}(F^{rt}t^\sigma + F^{rr}r^\sigma)t^\sigma - 2e^{2\nu}(F^{tt}t^\sigma + F^{tr}r^\sigma)r^\sigma = 2F^{rt}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}]$$

Des relations (A2.5): $\rho = (F^t)^2 - (F^r)^2 \Rightarrow \rho^t = 2F^tF^{tt} - 2F^rF^{rt}$; $\rho^r = 2F^tF^{tr} - 2F^rF^{rr}$

$$e^{-2\nu}(\Omega/\rho^2)(\rho^t F^r + \rho^r F^t) = 2e^{-2\nu}e^{2\nu}\rho[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}]\,[(F^tF^{tt} - F^rF^{tr})F^r + (F^tF^{tr} - F^rF^{rr})F^t]/\rho^2 = 2F^{tr}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}]$$

L'équation (B1.17) devient:

$$2R^{\sigma\sigma} + 2F^{rt}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] + \Omega^R - 2F^{tr}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] = 0 \Rightarrow 2R^{\sigma\sigma} + \Omega^R = 0 \Rightarrow 2R^\sigma R^{\sigma\sigma} + \Omega^R R^\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad (B1.19)$$

$$[(R^\sigma)^2]^\sigma + \Omega^\sigma = 0 \Rightarrow (R^\sigma)^2 + \Omega = (E_r)^2 \quad (B1.20)$$

$$(R^\sigma)^2 + (1 - R_0/R)[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] = (E_r)^2 \quad (B1.21)$$

Cette relation est identique à la relation de la métrique statique. Nous obtenons donc une relation de type Binet :

$$(R^2\varphi^\sigma w^\sigma \sigma^\varphi)^2 + (1 - R_0 w)\,(h^2w^2 + \boldsymbol{\kappa}) = (E_r)^2 \quad (B1.22)$$

De $R^2\varphi^\sigma = h \Rightarrow h^2(w^\varphi)^2 + (1 - R_0 w)\,(h^2w^2 + \boldsymbol{\kappa}) = (E_r)^2$ (B1.23)

$$2\,h^2 w^{\varphi\varphi} w^\varphi + w^\varphi(2\,h^2 w - 3\,w^2\,h^2 R_0 - \boldsymbol{\kappa}\,R_0) = 0 \quad (B1.24)$$

$$w^{\varphi\varphi} + w - 3\,w^2\,R_0/2 = \boldsymbol{\kappa}\,[R_0/(2h^2)] \quad (B1.25)$$

Nous calculons maintenant la dernière intégrale première:

Des équations (B1.15): $2F^t(e^{2\nu}t^\sigma)^\sigma - e^{-2\nu}F^t(\Omega/\rho)^t = 0$; $2F^r\,(e^{2\nu}r^\sigma)^\sigma + e^{-2\nu}F^r(\Omega/\rho)^r = 0 \quad \Rightarrow$ (B1.26)

$$(2F^te^{2\nu}t^\sigma)^\sigma - 2e^{2\nu}(F^t)^\sigma t^\sigma - e^{-2\nu}F^t(\Omega/\rho)^t - (2F^re^{2\nu}r^\sigma)^\sigma + 2e^{2\nu}(F^r)^\sigma r^\sigma - e^{-2\nu}F^r(\Omega/\rho)^r = 0 \quad \Rightarrow \quad (B1.27)$$

$$[2e^{2\nu}(F^tt^\sigma - F^rr^\sigma)]^\sigma - 2e^{2\nu}[(F^t)^\sigma t^\sigma - (F^r)^\sigma r^\sigma] - e^{-2\nu}F^t(\Omega/\rho)^t - e^{-2\nu}F^r(\Omega/\rho)^r = 0 \quad (B1.28)$$

$$(F^t)^\sigma t^\sigma - (F^r)^\sigma r^\sigma = t^\sigma(F^{tt}t^\sigma + F^{tr}r^\sigma) - r^\sigma(F^{rt}t^\sigma + F^{rr}r^\sigma) = F^{tt}(t^\sigma t^\sigma - r^\sigma r^\sigma) = F^{tt}e^{-2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] \quad (B1.29)$$

$$e^{-2\nu}F^r(\Omega/\rho)^r + e^{-2\nu}F^t(\Omega/\rho)^t = e^{-2\nu}F^r[(\Omega^R/\rho)R^r - (\Omega/\rho^2)\rho^r] + e^{-2\nu}F^t[(\Omega^R/\rho)R^t - (\Omega/\rho^2)\rho^t] =$$

$$= e^{-2\nu}F^r[(\Omega^R/\rho)F^te^{2\nu} - (\Omega/\rho^2)\rho^r] + e^{-2\nu}F^t[-(\Omega^R/\rho)F^re^{2\nu} - (\Omega/\rho^2)\rho^t]$$

$$e^{-2\nu}F^r(\Omega/\rho^2)^r + e^{-2\nu}F^t(\Omega/\rho^2)^t = -e^{-2\nu}(\Omega/\rho^2)(\rho^rF^r + \rho^tF^t) = -e^{-2\nu}e^{2\nu}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}]\,(\rho^rF^r + \rho^tF^t)/\rho \quad (B1.30)$$

Des relations (A2.5): $\rho = (F^t)^2 - (F^r)^2 \Rightarrow \rho^t = 2F^tF^{tt} - 2F^rF^{rt}$; $\rho^r = 2F^tF^{tr} - 2F^rF^{rr}$

$$(\rho^rF^r + \rho^tF^t) = 2F^r(F^tF^{tr} - F^rF^{rr}) + 2F^t(F^tF^{tt} - F^rF^{rt}) = 2F^{tt}\rho \quad (B1.31)$$

$$e^{-2\nu}F^r(\Omega/\rho^2)^r + e^{-2\nu}F^t(\Omega/\rho^2)^t = -2F^{tt}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] \quad (B1.32)$$

Des relations: (B1.28), (B1.29), (B1.32): $[2e^{2\nu}(F^tt^\sigma - F^rr^\sigma)]^\sigma - 2F^{tt}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] + 2F^{tt}[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] = 0$

$$[2e^{2\nu}(F^tt^\sigma - F^rr^\sigma)]^\sigma = 0 \Rightarrow e^{2\nu}(F^tt^\sigma - F^rr^\sigma) = E_r$$

$[2e^{2\nu}(F^tt^\sigma - F^rr^\sigma)]^\sigma = 0 \Rightarrow e^{2\nu}(F^tt^\sigma - F^rr^\sigma) = E_r$; E_r est l'énergie de la particule

$$4\,HP^u\,HM^v(1 - R_0/R)\,(F^tt^\varphi - F^rr^\varphi) = R^2\,E_r/h$$

$z = HP(u) - HM(v)$; $\Rightarrow z^\varphi = HP^uu^\varphi - HM^vv^\varphi = R^\varphi/(1 - R_0/R)$ { de la relation (A3.3) }

$t^\varphi(HP^u + HM^v) + (HP^u - HM^v)r^\varphi = (R^2\,E_r/h)/(1 - R_0/R)$; $t^\varphi(HP^u - HM^v) + r^\varphi(HP^u + HM^v) = R^\varphi/(1 - R_0/R)$

$2HP^uu^\varphi = [(R^2\,E_r/h) + R^\varphi]/(1 - R_0/R)$; $2\,HM^vv^\varphi = [(R^2\,E_r/h) - R^\varphi]/(1 - R_0/R)$

2 Synthèse des intégrales premières:

$$\theta = \pi/2 \quad (B2.1)$$

$$R^2\,d\varphi/d\sigma = h \quad (B2.2)$$

$$(R^\sigma)^2 + (1 - R_0/R)\,[(h^2/R^2) + \boldsymbol{\kappa}] = (E_r)^2 \quad (B2.3)$$

$$w^{\varphi\varphi} + w - 3\,w^2\,G\,M/c^2 = \boldsymbol{\kappa}\;G\,M/h^2c^2 \quad (B2.4)$$

$$e^{2\nu}(F^tt^\sigma - F^rr^\sigma) = E_r \quad (B2.5)$$

$$2HP^uu^\varphi = [(R^2\,E_r/h) + R^\varphi]/(1 - R_0/R) \quad (B2.6)$$

$$2HM^vv^\varphi = [(R^2\,E_r/h) - R^\varphi]/(1 - R_0/R) \quad (B2.7)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{(R^2E_r/h)(HM^v+HP^u)+(dR/d\varphi)(HM^v-HP^u)}{4HP^uHM^v(1-R_0/R)} \tag{B2.8}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{(R^2E_r/h)(HM^v-HP^u)+(dR/d\varphi)(HM^v+HP^u)}{4HP^uHM^v(1-R_0/R)} \tag{B2.9}$$

Les relations (B2.1), (B2.2), (B2.3), (B2.4) sont identiques aux relations correspondantes de la métrique statique. En conséquence, la fonction $R(\varphi) = 1/w(\varphi)$ est strictement identique à la fonction correspondante de la métrique statique. Des différences apparaissent uniquement pour le calcul des coordonnées t,r et les valeurs de temps et distance réels.

3 Géodésiques ellipsoïdales

Considérons le cas d'une particule massive dont la fonction $R(\varphi)$ décrit approximativement une ellipse qui pivote autour de son axe vertical. Calculons les valeurs de h et E_r. Nous pouvons écrire, à partir de l'équation (B2.3), pour la valeur minimale R_{min} de R, et pour sa valeur maximale R_{max}:

$(dR/d\sigma)_{min} = 0 \Rightarrow (1 - R_0u_{min})\,[h^2(u_{min})^2 + 1] = (E_r)^2 \qquad (u_{min} = 1/R_{min})$

$(dR/d\sigma)_{max} = 0 \Rightarrow (1 - R_0u_{max})\,[h^2(u_{max})^2 + 1] = (E_r)^2 \qquad (u_{max} = 1/R_{max})$

$h^2(u_{min})^2 - R_0h^2(u_{min})^3 - R_0u_{min} = h^2(u_{max})^2 - R_0h^2(u_{max})^3 - R_0u_{max}$

$h^2(u_{max} + u_{min}) - R_0h^2[(u_{max})^2 + (u_{min})^2 + u_{max}u_{min}] - R_0 = 0$

Considérons le cas d'un cercle de rayon R : ($u_{max} = u_{min} = 1/R$ = constante); nous obtenons :

$2\,h^2/R - 3\,R_0h^2/R^2 - R_0 = 0 \Rightarrow h^2[1 - 3\,R_0\,/(2R)] = R\,R_0\,/2 \Rightarrow h^2/R^2 = [R_0\,/(2R)]/[1 - 3\,R_0\,/(2R)]$

De l'équation (5.3), puique la fonction R est une constante: $(1 - R_0/R)\,(h^2/R^2 + 1) = (E_r)^2$

$(E_r)^2 = (1 - R_0/R)\,\left[\frac{[R_0\,/(2R)]}{[1-3R_0\,/(2R)]} + 1\right] = (1 - R_0/R)^2/[1 - 3\,R_0\,/(2R)]$

$\frac{h^2/R^2}{(E_r)^2} = \frac{[R_0\,/(2R)]/[1-3R_0\,/(2R)]}{(1-R_0/R)^2/[1-3R_0\,/(2R)]} = \frac{[R_0\,/(2R)]}{(1-R_0/R)^2} \quad \Rightarrow \frac{R\,E_r/h}{(1-R_0/R)} = \sqrt{\frac{2R}{R_0}} = \sqrt{\frac{R}{G\,M\,/c^2}} \Rightarrow \frac{R^2\,E_r/h}{(1-R_0/R)} = \frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{G\,M\,/c^2}}$

soient V_r la vitesse radiale, V_T la vitesse orbitale d'une particule massive sur orbite circulaire R :

$\frac{dL_r}{c\,dT} = (V_r/c) = \frac{(R^2E_r/h)(HM^v-HP^u)+(dR/d\varphi)(HM^v+HP^u)}{(R^2E_r/h)(HM^v+HP^u)+(dR/d\varphi)(HM^v-HP^u)}$

$$(V_T)^2 = (R)^2\left(\frac{d\varphi}{dT}\right)^2 = (R)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left(\frac{dt}{dT}\right)^2$$

$(c\,dT)^2 = 4HM^vHP^u\,(1 - R_0/R)\,dt^2\,;\ \frac{dt}{d\varphi} = \frac{(R^2E_r/h)}{(1-R_0/R)}\frac{(HM^v+HP^u)}{4HP^uHM^v} \Rightarrow (V_T)^2 = R^2\,\frac{G\,M\,/c^2}{R^3}\frac{(4HP^uHM^v)^2}{(HM^v+HP^u)^2}\frac{c^2}{4HM^vHP^u\,(1-R_0/R)}$

$$(V_T)^2 = \frac{G\,M\,/R}{(1-R_0/R)}\frac{4HP^uHM^v}{(HM^v+HP^u)^2} \tag{B3.1}$$

$$(V_r/c) = \frac{HM^v-HP^u}{HM^v+HP^u} \tag{B3.2}$$