Nombres premiers, seconds, système duodécimal, musique et construction graphique

David RIX
3 Juin 2012

1. Répartition des nombres premiers

Les nombres premiers sont une suite numérique dont l'étude de la répartition a captivé la communauté scientifique depuis plusieurs millénaires. Alors que je cherchais une logique dans cette répartition, me vint l'idée de réaliser un graphique représentant la variation des différences entre les nombres premiers successifs en fonction de leur rang dans la suite. Ce graphique représente une courbe assimilable à une onde (cf annexe).

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
n-(n-1)	1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6	4	2	6	4	6	8
25	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199			
n-(n-1)	4	2	4	2	4	14	4	6	2	10	2	6	6	4	6	6	2	10	2	4	2			
46	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293								
n-(n-1)	12	12	4	2	4	6	2	10	6	6	6	2	6	4	2	10								
62	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397								
n-(n-1)	14	4	2	4	14	6	10	2	4	6	8	6	6	4	6	8								
78	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499							
n-(n-1)	4	8	10	2	10	2	6	4	6	8	4	2	4	12	8	4	8							
95	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599										
n-(n-1)	4	6	12	2	18	6	10	6	6	2	6	10	6	6										
109	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691								
n-(n-1)	2	6	6	4	2	12	10	2	4	6	6	2	12	4	6	8								
125	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797										
n-(n-1)	10	8	10	8	6	6	4	8	6	4	8	4	14	10										
139	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887									
n-(n-1)	12	2	10	2	4	2	10	14	4	2	4	14	4	2	4									
154	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997										
n-(n-1)	20	4	8	10	8	4	6	6	14	4	6	6	8	6										

La différence entre des nombres premiers successifs étant toujours paire (mis à part pour le rang 1 que nous n'étudierons pas), et étant comprise la plupart du temps entre 2 et 14, me vint l'idée de leur attribuer une note de musique comme suit :

2=Do / 4=Ré / 6=Mi / 8=Fa / 10=Sol / 12=La / 14=Si

Néanmoins, il s'avère que des intervalles entre nombres entiers sont supérieurs à 14. Pour retranscrire la note, j'ai retranché 12 à leur valeur nominale.

En jouant la partition, il s'avère qu'il s'agit d'une suite de mélodies. Ces mélodies vont en se complexifiant et chacune se termine par la suite de notes Ré Do.

Par ailleurs, nous pouvons considérer les intervalles records comme une suite incluse dans la suite des nombres premiers, que je me propose d'appeler nombres seconds. En appliquant la même méthode que pour la construction de la mélodie des nombres premiers, sur les 18 premiers nombres seconds, une nouvelle mélodie se terminant par les notes Ré et Do se révèle.

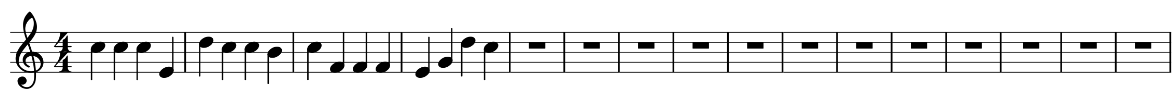
Il apparaît également que certains intervalles sont ici aussi supérieurs à 14, auxquels il m'a également fallu retrancher 12 pour obtenir la note juste. On peut donc supposer qu'il existe une troisième suite incluse dans la seconde.

L'analyse de ces gammes pourra être étudié sous le prisme du solfège.

Nombres premiers

Intervalles des nombres premiers mis en musique entre 1 et 1093

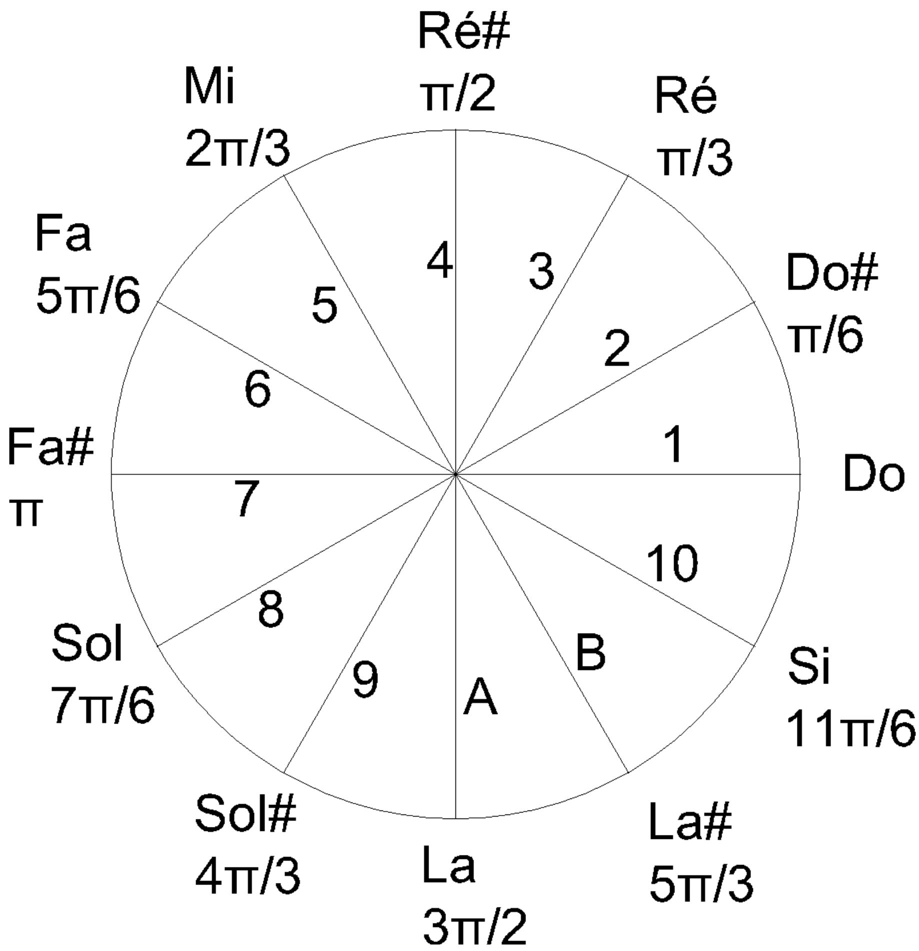
Nombres seconds



2. Construction graphique de la musique

En cherchant une représentation graphique à la révélation de la présence de musique dans des valeurs numériques, me vint l'idée de faire correspondre les notes (avec les # / bémols), donc au nombre de 12, à des angles.

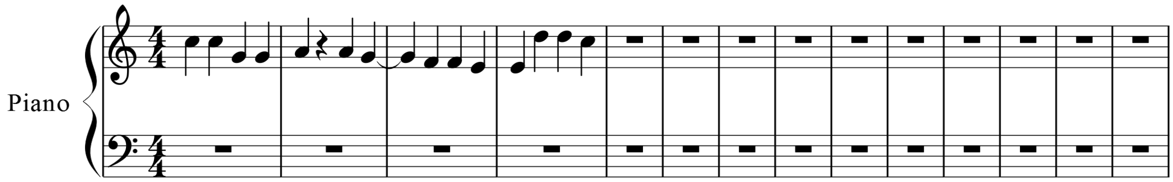
<u>Le cercle trigonométrique en musique</u>



Les angles sont positifs lors des périodes de tension tonale et négatif lors des périodes de détente.

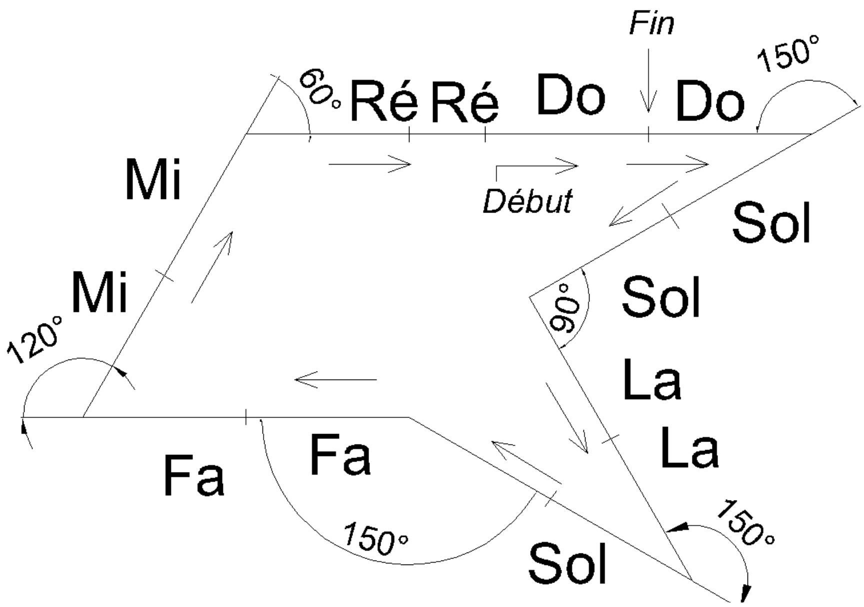
Ah! Vous dirais-je manan.

Twinkle little Star



Do Do Sol Sol La La Sol - Fa Fa Mi Mi Ré Ré Do
210° + 270° + 210° - 150° - 120° - 60° = 360°

Les notes sont représentées par des segments dont la longueur est proportionnelle à la durée de la note. Par ailleurs, la répétition d'une note n'engendre que la prolongation du segment concerné et non un nouvel angle.



En appliquant ce système aux mélodies des nombres premiers, secondes et aux suivantes, on obtiendra une représentation graphique de ces suites de nombres en plusieurs dimensions.

3. Étude de la suite de Fibonacci au moyen du système duodécimal

En m'interrogeant sur le système décimal, j'ai converti la suite de Fibonacci en système duodécimal. En ne conservant que le dernier chiffre de la conversion, une répétition est apparue. Par exemple, pour : **13**=12x1+**1** , on ne conservera que le 1, ou pour **34**=12x2+**10**, on ne conservera que le 10, soit le A dans le système duodécimal.

Système décimal	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Système duodécimal	1	1	2	3	5	8	1	9	A	7	5	0
Système décimal	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368
Système duodécimal	5	5	A	3	1	4	5	9	2	B	1	0

75025	121393	196418	317811	514229	832040	1346269	2178309	3524578	5702887	9227465	14930352
1	1	2	3	5	8	1	9	A	7	5	0
24157817	39088169	63245986	102334155	165580141	267914296	433494437	701408733	1134903170	1836311903	2971215073	4807526976
5	5	A	3	1	4	5	9	2	B	1	0

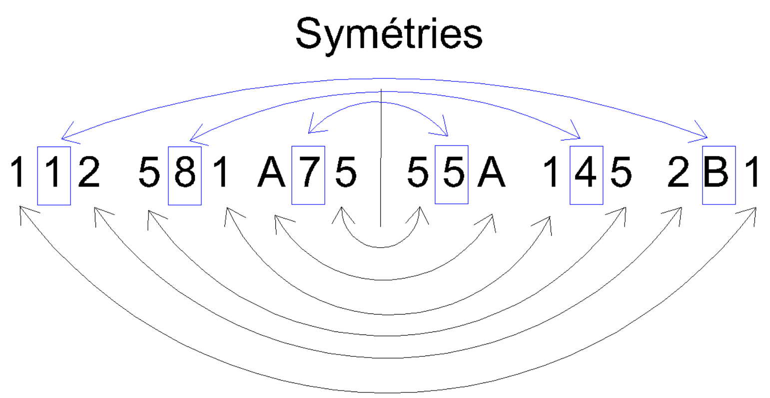
La répétition de cette séquence va au moins jusqu'à 190392490709135. Après ce nombre, ma feuille de calcul n'effectue plus les opérations.
En remplaçant les zéros par des 10, on peut représenter la suite répétée de la manière suivante:

1	1	2	**3**	5	8	1	**9**	A	7	5	**10**
5	5	A	**3**	1	4	5	**9**	2	B	1	**10**

Les colonnes 3, 9 et 10 semblent segmenter les cases du tableau en 6 groupes de 3 chiffres. Plusieurs points remarquables peuvent être identifier sur cette suite de nombres :

- La somme des colonnes est un multiple de 6.

- Une symétrie existe dans la disposition de ces nombres dont une symétrie par rapport à 6 pour les chiffres du milieu des groupes :

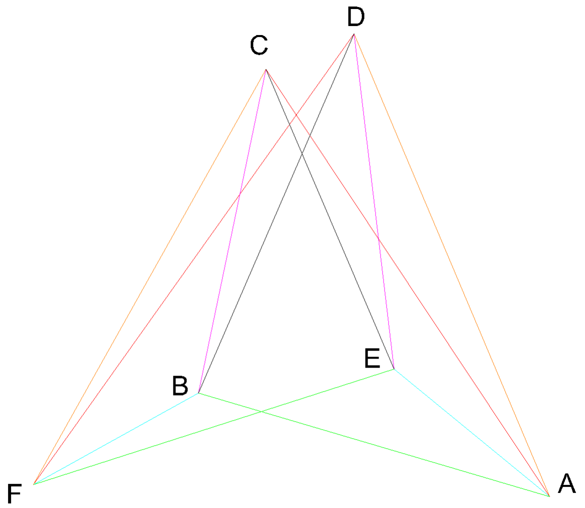


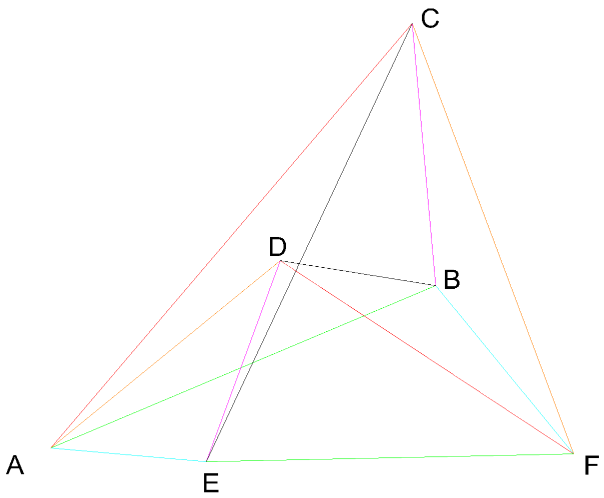
– Transposons ces 6 groupes de nombres en système décimal et considérons-les comme des coordonnées de points dans l'espace tels que :

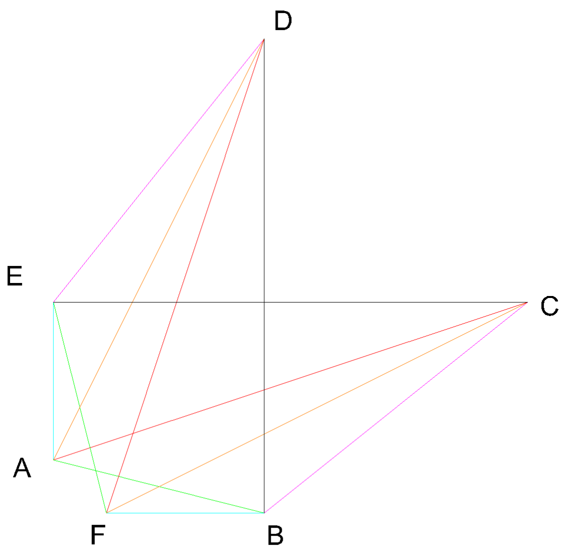
A (1;1;2) D (5;5;10)
B (5;8;1) E (1;4;5)
C (10;7;5) F (2;11;1)

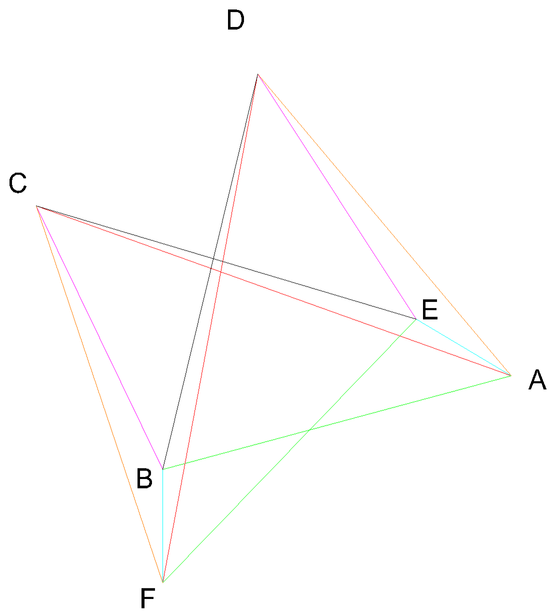
Il est alors possible de calculer la longueur des segments correspondant par la formule :
AB = $\sqrt{(xB-xA)^2+(yB-yA)^2+(zB-zA)^2}$

D'où :
AB = FE = $\sqrt{66}$ = 8,124
BC = ED = $\sqrt{42}$ = 6,481
AC= FD = $\sqrt{126}$ =11,225
AE = BF = $\sqrt{18}$ =4,243
AD = CF = $\sqrt{96}$ = 9,798
BD = CE = $\sqrt{90}$ = 9,487
AF = $\sqrt{102}$ = 10,100
BE = $\sqrt{48}$ = 6,928
CD = $\sqrt{54}$ = 7,348









Nous pouvons d'ailleurs constater quelques relations unissant les longueurs de ces segments :

$\sqrt{BE^2+AE^2}$ = AB et $\sqrt{BE^2+BF^2}$ = EF
$\sqrt{BE^2+DE^2}$ =DB et $\sqrt{BE^2+CB^2}$ = CE
Les triangles AEB, FBE, DEB et CBE sont donc rectangles.

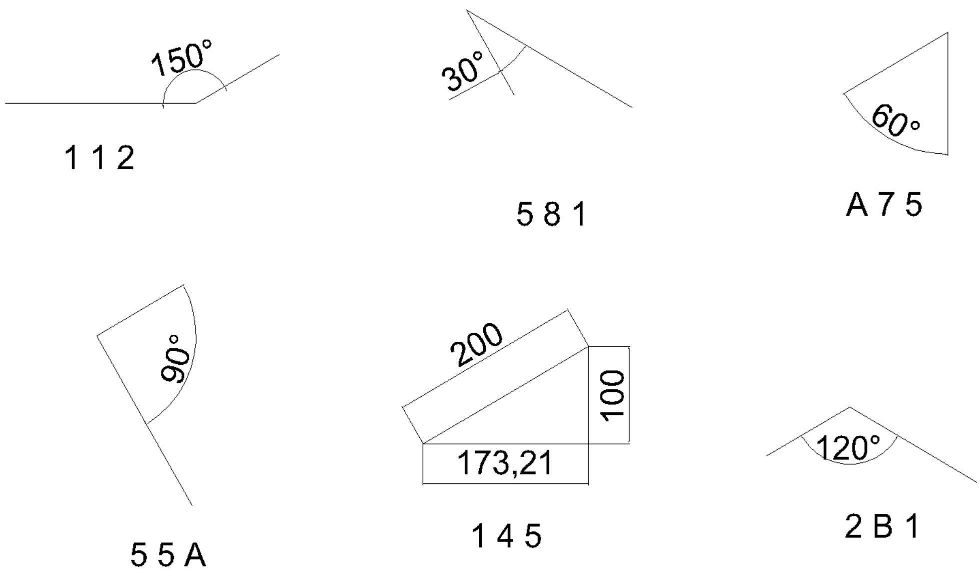
De plus, il existe une équivalence pythagoricienne entre les sommets de ces triangles rectangles tel que :
$\sqrt{BE^2+CD^2}$ = AF

Par ailleurs, on obtient :
AC = $\sqrt{AB^2+AE^2+BC^2}$ et FD = $\sqrt{EF^2+BF^2+ED^2}$

$\sqrt{CD^2+BC^2}$ = AD (=) $\sqrt{CD^2+ED^2}$ = CF

$\sqrt{AC^2+AE^2}$ = $\sqrt{CD^2+BD^2}$ = $\sqrt{CD^2+CE^2}$ = $\sqrt{AF^2+BC^2}$ = $\sqrt{AF^2+ED^2}$ = $\sqrt{FD^2+BF^2}$ = $\sqrt{BE^2+AD^2}$ = $\sqrt{BE^2+CF^2}$ = 12

- En appliquant la méthode des équivalences entre les angles et les nombres développée au chapitre 2, on obtient ces représentations :



On peut remarquer que 6 est le seul nombre absent de cette suite mais qu'il apparaît néanmoins en filigrane de l'ensemble des résultats.

Converti en décimal, on obtient le tableau suivant :

112	3	581	9	1075	12
560	3	145	9	311	12

Il existe certainement d'autres relations entre ces nombres.