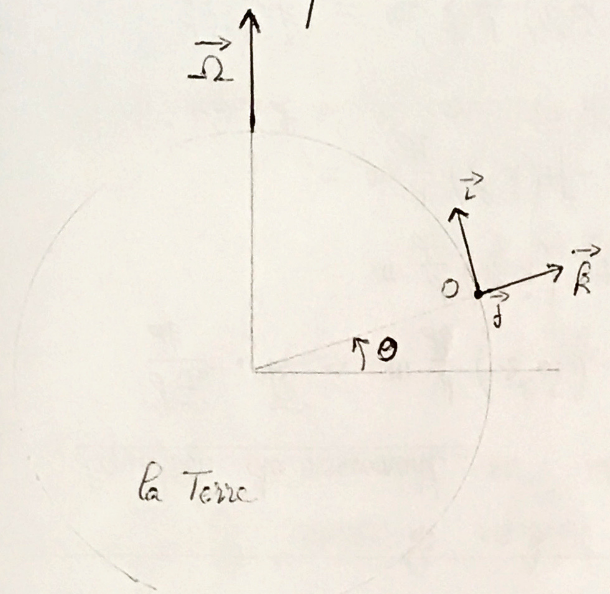
① Février 1994

Dans quel sens tourne le tourbillon ?



O point fixe à la surface de la Terre

$\vec{k}$ verticale ascendante au point O

$\vec{\Omega}$ vecteur rotation de la Terre

$\Omega = \|\vec{\Omega}\|$

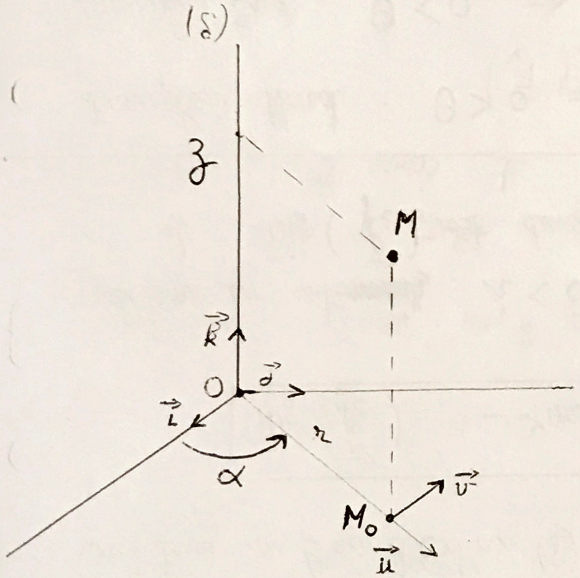
$\vec{j}$ vecteur unitaire tangent au parallèle du lieu d'Est en Ouest

$\vec{i}$ vecteur unitaire tangent au méridien dirigé du Pôle Sud vers le pôle Nord.

$B_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe

$R_0 = (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

θ latitude $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$



Le point M de masse m est repéré par $(r, \alpha, z$

$r > 0$

$B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ base orthonormée directe liée à l

$R = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$

$\vec{v}_r = \vec{v}_{R_0}(M)$ vitesse relative de M dans R_0.

$\vec{\sigma}_r = \vec{\sigma}_{R_0}(M) = \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{p}_r}_{\text{moment cinétique}}$ où $\underbrace{\vec{p}_r = m\vec{v}_r}_{\text{quantité de mouvemen}}$

Dans le repère R_0, M est soumis :

à son poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$

à la force d'entraînement $\vec{f}_e = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$

à la force de Coriolis $\vec{f}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$

aux forces de pression $\vec{F}_p$ et de viscosité exercées par le liquide sur M : $\vec{F}_v$

Soit $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_v$

2)

On écrit le théorème du moment cinétique dans le repère R_0 en projection sur $(\delta) = (O, \vec{k})$

$$(1) \quad \mathcal{M}_\delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\delta(\vec{f_e}) + \mathcal{M}_\delta(\vec{f_c}) + \mathcal{M}_\delta(\vec{F}) = \frac{d\vec{\sigma_2}}{dt} \cdot \vec{k}$$

Comme $\vec{P}$ est vertical, $\mathcal{M}_\delta(\vec{P}) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{f_e} \text{ est de l'ordre de grandeur de } \quad m r \Omega^2 \\ \vec{f_c} \text{ est de l'ordre de grandeur de } \quad 2 m \Omega v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f_e}{f_c} \simeq \frac{r\Omega}{2 v_2}$$

or $\Omega = \dfrac{2\pi \text{ rd}}{24 \text{ h}} = \dfrac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rd s}^{-1} \simeq 7.10^{-5} \text{ rd s}^{-1}$

et $r \simeq 10^{-1}$ m donc $r\Omega \simeq 7.10^{-6} \text{ m s}^{-1}$ (soit 1mm en 2,4mn)

Tout mouvement visible est donc tel que $2 v_2 \gg r\Omega$

On peut donc négliger f_e devant f_c et écrire $\mathcal{M}_\delta(\vec{f_e}) \ll \mathcal{M}_\delta(\vec{f_c})$

Enfin, $\mathcal{M}_\delta(\vec{F}) = \mathcal{M}_\delta(\vec{F_p}) + \mathcal{M}_\delta(\vec{F_v})$

On suppose que la composante horizontale des forces de pression est négligeable et ainsi $\mathcal{M}_\delta(\vec{F_p}) = 0$

La seule hypothèse "abusive" est de négliger la viscosité $\mathcal{M}_\delta(\vec{F_v}) = 0$

Ceci conduira à une vitesse infinie sur l'axe (δ).

L'équation (1) s'écrit donc : $\quad (2) \quad \mathcal{M}_\delta(\vec{f_c}) = \dfrac{d\vec{\sigma_2}}{dt} \cdot \vec{k}$

On décompose les vecteurs sur la base $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix}_B \qquad \vec{v_2} \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\alpha} \\ \dot{z} \end{vmatrix}_B \qquad \vec{\sigma_2} = m \begin{pmatrix} -r z \dot{\alpha} \\ z\dot{r} - r\dot{z} \\ r^2 \dot{\alpha} \end{pmatrix}_B \qquad \vec{\Omega} = \Omega \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\alpha \\ -\cos\theta\sin\alpha \\ \sin\theta \end{vmatrix}_B$$

$$\overline{\mathcal{M}}_\delta(\vec{f_c}) = \left[\overrightarrow{OM} \wedge (-2m\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v_r})\right].\vec{k}$$

$$= -2m\Omega\left[(\overrightarrow{OM}.\vec{v_r})\sin\theta - (r\cos\theta\cos\alpha + z\sin\theta)\dot{z}\right]$$

$$= -2m\Omega\left[(r\dot{r} + z\dot{z})\sin\theta - (r\dot{z}\cos\theta\cos\alpha + z\dot{z}\sin\theta)\right]$$

$$= -2m\Omega r(\dot{r}\sin\theta - \dot{z}\cos\theta\cos\alpha)$$

On intègre sur le cercle $\mathcal{E}$ d'axe (δ) $(\alpha \in [0, 2\pi])$ en supposant la symétrie d'axe (δ) :

$$\boxed{\overline{\mathcal{M}}_\delta(\vec{f_c}) = -2m'\Omega r\dot{r}\sin\theta}$$

m' : masse de $(\mathcal{E})$

Dans un ~~entonnoir~~ entonnoir, $\dot{r} < 0$ donc $-2m'\Omega r\dot{r} > 0$
et $\overline{\mathcal{M}}_\delta(\vec{f_c})$ est du signe de θ.

Emisphère Nord : $\theta > 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\delta(\vec{f_c}) > 0 \Rightarrow$ sens contraire des aiguilles d'une montre

Emisphère Sud : $\theta < 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\delta(\vec{f_c}) < 0 \Rightarrow$ sens des aiguilles d'une montre

Equateur $\theta = 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\delta(\vec{f_c}) = 0 \Rightarrow$ pas de rotation apparente

---

Equation du mouvement :

$$\frac{d\vec{\sigma_r}}{dt}.\vec{k} = m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\alpha}) + \left[(\vec{\Omega} + \dot{\alpha}\vec{k}) \wedge \vec{\sigma_r}\right].\vec{k}$$

$$= m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\alpha}) + (\vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma_r}).\vec{k}$$

$$= m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\alpha}) + \left[-rz\dot{\alpha}\cos\theta\sin\alpha + (z\dot{r} - r\dot{z})\cos\theta\cos\alpha\right]m\Omega$$

et en intégrant sur le cercle $\mathcal{E}$ d'axe (δ)

$$\frac{d\vec{\sigma_r}}{dt}.\vec{k} = m'\frac{d}{dt}(r^2\dot{\alpha})$$

D'où l'équation du mouvement : (3) $\boxed{\frac{d}{dt}(r^2\dot{\alpha}) = -2\Omega r\dot{r}\sin\theta}$

qui s'intègre en

$$r^2 \dot{\alpha} = V_\theta - \Omega \sin\theta\, r^2$$

V_θ constante ($\frac{\partial}{\partial t} V_\theta = 0$)

soit

$$\boxed{\dot{\alpha} = \frac{V_\theta}{r^2} - \Omega \sin\theta}$$

Le terme $-\Omega \sin\theta$ correspond à la rotation de l'eau due à la composante verticale de la rotation de la Terre en l'absence de viscosité. Cette rotation n'est pas perceptible ($\Omega = 7.\ 10^{-5}$ rd/s)

Il reste donc

$$\boxed{\dot{\alpha} = \frac{V_\theta}{r^2}}$$

équation d'un vortex en l'absence de viscosité.

On peut remarquer que la projection M_0 de M sur le plan horizontal suit la loi des aires ($r^2 \dot{\alpha} = Cste$) et l'aire balayée $S(t) = \frac{V_\theta}{2} t$

Le phénomène est très sensible, même à 10 m de l'équateur puisque, même si $\mathcal{M}_z(\vec{f_c})$ est faible, la loi en $1/r^2$ assure une rotation visible près de l'axe, qui entraîne tout le contenu par viscosité. Quand on est vraiment très près de l'équateur, le couple $\mathcal{M}_z(\vec{f_c})$ devient trop faible devant la viscosité de l'eau. Le calcul de la distance critique doit prendre en compte la viscosité de l'eau.