

Le continu et les intuitions mathématiques. Problèmes liés à l'intuition mathématique dans la pensée de Gödel

M Pierre Cassou Nogues

Citer ce document / Cite this document :

Cassou Nogues Pierre. Le continu et les intuitions mathématiques. Problèmes liés à l'intuition mathématique dans la pensée de Gödel. In: Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive, n°51, 2009/1. Le continu mathématique. Nouvelles conceptions, nouveaux enjeux. pp. 33-57;

doi : <https://doi.org/10.3406/intel.2009.1732>

https://www.persee.fr/doc/intel_0769-4113_2009_num_51_1_1732

Fichier pdf généré le 24/02/2020

Abstract

The continuum and mathematical intuitions. Problems related to mathematical intuition in Gödel's philosophy.

In 1938, Gödel announced his proof for the relative consistency of the continuum hypothesis with regards to the usual axioms of set theory. Until 1943, he devotes most of his research to an attempt to prove its independence. He will up to the end of his career continue to think, as a philosopher, about the problem of the continuum. We first distinguish different modes of intuition that appear in Gödel's writings in relation to the continuum. We then discuss the metaphysical problems that these intuitions raise. What is, for example, the role of time in mathematical intuition ? If there is an abstract intuition, does it use a specific organ ? If so, how should one conceive the influence of a mathematical object on a bodily organ ? If mathematics has a universal value and if it requires different kinds of intuition, should we attribute these intuitions to all beings, such as God, capable of mathematics ? Thus the analysis of Gödel's remarks on mathematical intuition introduces us some of the questions of his metaphysics. We essentially rely on Gödel's archives at Princeton University Library.

Résumé

Gödel a établi la consistance relative de l'hypothèse du continu par rapport aux axiomes usuels de la théorie des ensembles en 1938. Il a, jusqu'en 1943 environ, travaillé à une preuve de son indépendance. Il échoue mais il continuera à réfléchir en philosophe à la nature propre du problème du continu. Nous nous attachons d'abord à discuter des différents modes d'intuition que Gödel distingue dans ce secteur de l'activité mathématique. Nous abordons ensuite les problèmes métaphysiques que ces différentes intuitions posent. Quel est, par exemple, le rôle du temps dans la pensée mathématique ? S'il y a une intuition abstraite, et proprement mathématique, celle-ci utilise-t-elle un organe ? Comment alors penser l'influence d'un objet mathématique sur un organe corporel ? Si les mathématiques ont une valeur universelle, et si elles exigent différentes intuitions, faut-il également prêter celles-ci à tout être, comme Dieu, capable de mathématiques ? Quel est enfin le rapport de Gödel à la tradition phénoménologique ? L'analyse des remarques de Gödel sur les intuitions du continu introduit ainsi aux grandes questions de sa métaphysique. Nous nous appuyons largement sur les papiers inédits conservés à la bibliothèque de Princeton.

Le continu et les intuitions mathématiques. Problèmes liés à l'intuition mathématique dans la pensée de Gödel

Pierre Cassou-Noguès*

RESUME : Gödel a établi la consistance relative de l'hypothèse du continu par rapport aux axiomes usuels de la théorie des ensembles en 1938. Il a, jusqu'en 1943 environ, travaillé à une preuve de son indépendance. Il échoue mais il continuera à réfléchir en philosophe à la nature propre du problème du continu. Nous nous attachons d'abord à discuter des différents modes d'intuition que Gödel distingue dans ce secteur de l'activité mathématique. Nous abordons ensuite les problèmes métaphysiques que ces différentes intuitions posent. Quel est, par exemple, le rôle du temps dans la pensée mathématique ? S'il y a une intuition abstraite, et proprement mathématique, celle-ci utilise-t-elle un organe ? Comment alors penser l'influence d'un objet mathématique sur un organe corporel ? Si les mathématiques ont une valeur universelle, et si elles exigent différentes intuitions, faut-il également prêter celles-ci à tout être, comme Dieu, capable de mathématiques ? Quel est enfin le rapport de Gödel à la tradition phénoménologique ? L'analyse des remarques de Gödel sur les intuitions du continu introduit ainsi aux grandes questions de sa métaphysique. Nous nous appuyons largement sur les papiers inédits conservés à la bibliothèque de Princeton.

Mots clés : Gödel, Turing, intuition, temps, espace, continu, infini

ABSTRACT : **The continuum and mathematical intuitions. Problems related to mathematical intuition in Gödel's philosophy.** In 1938, Gödel announced his proof for the relative consistency of the continuum hypothesis with regards to the usual axioms of set theory. Until 1943, he devotes most of his research to an attempt to prove its independence. He will up to the end of his career continue to think, as a philosopher, about the problem of the continuum. We first distinguish different modes of intuition that appear in Gödel's writings in relation to the continuum. We then discuss the metaphysical problems that these intuitions raise. What is, for example, the role of time in mathematical intuition? If there is an abstract intuition, does it use a specific organ? If so, how should one conceive the influence of a mathematical object on a bodily organ? If mathematics has a universal value and if it requires different kinds of intuition, should we attribute these intuitions to all beings, such as God, capable of mathematics? Thus the analysis of Gödel's remarks on mathematical intuition introduces us some of the questions of his metaphysics. We essentially rely on Gödel's archives at Princeton University Library.

Key words : Gödel, Turing, intuition, time, space, continuum, infinite

Cet article porte sur les réflexions de Gödel, en relation au problème du continu, sur l'intuition mathématique et les problèmes métaphysiques auxquels conduit la possibilité d'une intuition non sensible. Je m'attacherai à étudier cette intuition d'un point de vue quasi-cognitif. Comment concevoir et décrire

* Savoirs, textes, langages, CNRS – Université Lille 3, pierre.cassou-nogues@univ.lille3.fr

cette faculté, si elle existe, qui nous met en rapport à des objets apparemment non sensibles ? Cette faculté ou plutôt ces facultés, car Gödel distingue trois genres d'intuition qui s'entrecroisent pour nous donner des aperçus différents sur des objets tels que le continu. Je commencerai par rappeler les recherches de Gödel sur le continu mathématique et la façon dont le logicien en vient à la question de l'intuition mathématique.

1. L'HYPOTHÈSE DU CONTINU, LE PLATONISME ET LA QUESTION DE L'INTUITION

Comme on le sait, l'un des principaux résultats logiques de Gödel est la démonstration de la consistance relative de l'hypothèse du continu. Si la théorie des ensembles, dans ses formulations usuelles, est consistante, elle l'est aussi avec l'axiome du choix¹ et l'hypothèse du continu². On ne peut donc pas réfuter l'hypothèse du continu. Gödel obtient la consistance relative de l'axiome du choix en 1935 et celle de l'hypothèse du continu en 1937, dans la nuit du 14 au 15 juin 1937 précisément³. Le résultat est annoncé en 1938 et la démonstration complète publiée en 1940. Gödel s'attaque alors au problème inverse, d'établir l'indépendance de l'hypothèse du continu : que l'on ne peut pas non plus démontrer l'hypothèse du continu à partir des axiomes usuels de la théorie des ensembles. Le logicien consacre à cette tâche l'essentiel de son activité jusqu'en 1943. Il n'aboutit pas et se tourne peu à peu vers la philosophie. Il remplit, dans la période 1940-1946 mais surtout à partir de 1942, une série de quatorze cahiers philosophiques. Ce sont des remarques, des notes consacrées aux fondements des mathématiques, mais aussi à la philosophie du langage et à la métaphysique, en particulier à la monadologie de Leibniz. Ces cahiers, rédigés en Gabelsberger – une méthode sténographique pour l'allemand en vogue dans le premier tiers du XX^e siècle – ont été partiellement retranscrits par C. Dawson et je me référerai plusieurs fois à cette transcription, bien qu'elle reste à l'état de brouillon et doive donc être considérée avec précaution. Je la citerai du reste à l'état brut sans tenter de la corriger ne serait-ce que dans la langue.

La démonstration de 1937, sur la consistance relative de l'hypothèse du continu, repose sur la définition d'un modèle, l'univers des ensembles constructibles⁴. On peut dire aussi bien que Gödel formule une proposition, qui signifierait « Tous les ensembles sont constructibles » et prouve, d'une part, que cette proposition est consistante avec les axiomes usuels et, d'autre part,

¹ L'axiome du choix stipule que, étant donné un ensemble d'ensembles non vides et disjoints, il existe un ensemble prenant un élément et un seul dans chacun de ces ensembles.

² L'hypothèse du continu est que le continu, décrit comme l'ensemble des parties de l'ensemble des entiers, a la première puissance suivant le dénombrable sur l'échelle des nombres ordinaux.

³ Dawson, *Logical Dilemmas*, Wellesley, A.K. Peters Ltd, 1997, Chapitre VIII.

⁴ Gödel a donné plusieurs exposés non techniques sur l'univers des ensembles constructibles (notamment Gödel *1940 dans *in Collected works*, S. Feferman, J. Dawson et alii Eds, 5 tomes, Clarendon Press, Oxford, 1986-2003, noté dorénavant, C.W., t.III, p.176 et sv.). Cf. Également P. Cassou-Noguès, *Gödel*, Paris, Les belles lettres, 2008, p.119 et sv.

qu'elle implique l'axiome du choix et l'hypothèse du continu. Très vite, Gödel conjecture que cette proposition, tous les ensembles sont constructibles, est également indépendante des axiomes usuels. Et le logicien la considère alors comme un axiome que l'on est libre d'accepter ou non, ce qui détermine deux théories des ensembles de la même façon que l'on obtient différentes géométries, suivant que l'on accepte ou non le cinquième postulat d'Euclide :

(1) « It is very plausible that with A [every set is constructible] one is dealing with an absolutely undecidable proposition, on which set theory bifurcates into two different systems, similar to Euclidean and non Euclidean geometry. [...] I am fully convinced that the assumption that non-constructible sets exist is also consistent. A proof of that would perhaps furnish the key to the proof of the independence of the continuum hypothesis from the other axioms of set theory. That would then yield the definitive result that one must really be content with a proof of the consistency of the continuum hypothesis, because then what would have been shown is exactly that a proof of the proposition itself does not exist. »⁵

Gödel reviendra rapidement sur sa position et cette liberté, de choisir ses axiomes, accordée au mathématicien. A partir des années quarante, Gödel en appelle à une réalité et à une intuition mathématiques qui déterminent de façon contraignante nos axiomes. L'intuition mathématique nous met en rapport à une réalité mathématique comme la perception sensible à la réalité du monde. Et, comme on peut dire que le VIème postulat d'Euclide est ou vrai ou faux par rapport au monde réel, de même l'axiome, tous les ensembles sont constructibles, a une valeur de vérité dans le monde mathématique sur lequel ouvre l'intuition. La seule différence tient à la nature de la réalité à laquelle sont alors rapportées ces deux propositions.

(2) « In geometry, e.g. the question as to whether Euclid's fifth postulate is true retains its meaning if the primitive terms are taken in a definite sense, i.e. as referring to the behaviour of rigid bodies, rays of light etc. The situation in set theory is similar. The difference is only that, in geometry, the meaning usually adopted today refers to physics rather than to mathematical intuition and that, therefore, the decision falls outside the range of mathematics. »⁶

⁵ Gödel *1939b, C.W., t.III, p.154-155 : « Il est très plausible que A [tous les ensembles sont constructibles] représente une proposition absolument indécidable, qui fait bifurquer la théorie des ensembles en deux systèmes, similaires aux géométries euclidiennes et non euclidiennes. [...] Je suis tout à fait convaincu que l'hypothèse d'ensembles non constructibles est également consistante. Une preuve de cela fournirait peut-être une clé pour la preuve de l'indépendance de l'hypothèse du continu par rapport aux autres axiomes de la théorie des ensembles. Cela établirait alors ce résultat définitif, qu'il faut se contenter d'une preuve de la consistance de l'hypothèse du continu, car alors ce que l'on aurait montré, c'est exactement qu'une preuve de la proposition elle-même n'existe pas. »

⁶ Gödel 1964, C.W., t.II, p.267 : « En géométrie, par exemple, la question de savoir si le cinquième postulat d'Euclide est vrai garde une signification si les termes primitifs sont considérés en un certain sens, c'est-à-dire comme se référant au comportement des corps rigides, des rayons de lumière, etc. La situation en théorie des ensembles est similaire. La différence est seulement que, en géométrie, on renvoie habituellement à la physique plutôt qu'à l'intuition mathématique, de sorte que la décision tombe hors de la portée des mathématiques. »

Ce passage de 1964 est donc à l'opposé du texte précédent, de 1939. Il y a clairement une évolution de la pensée de Gödel, que manifestent ces deux citations, sur l'existence d'une réalité et d'une intuition mathématiques, qu'il ignore en 1939 et, au contraire, affirme en 1964 et dont il fait alors la source de la vérité des mathématiques. Ce basculement a sans doute lieu autour de 1940. Les cahiers philosophiques contiennent de nombreuses remarques sur l'intuition mathématique. Nous verrons d'autres modifications dans les remarques de Gödel mais le logicien ne reviendra jamais sur l'existence d'une intuition mathématique.

Je commencerai par évoquer la façon dont Gödel introduit et justifie la position d'une intuition mathématique. Mais je ne discuterai pas précisément du rôle que Gödel donne à l'intuition dans la pratique et le fondement des mathématiques. Il y a sur ce sujet des études nombreuses et précises. Je m'intéresserai plutôt aux problèmes métaphysiques que pose l'idée d'une intuition dans les textes philosophiques (en particulier, les Cahiers philosophiques). Je m'efforcerai de montrer que les remarques de Gödel sur l'intuition mathématique sont liées à des réflexions métaphysiques plus vastes. Il n'est sans doute pas facile de déterminer si, dans l'esprit de Gödel, une métaphysique première, issue de Leibniz puis de Husserl, informe et détermine l'épistémologie ou bien, au contraire, si c'est l'épistémologie (que ce soit une description de la pratique mathématique ou une analyse des fondements mathématiques) qui conduit à la métaphysique. Mais il est clair que la description que fait Gödel de l'intuition mathématique est liée à des thèses métaphysiques et pose des problèmes, purement philosophiques dont Gödel s'efforce de prendre la mesure. Le renvoi à l'intuition dans les textes portant strictement sur la philosophie des mathématiques est donc loin d'être naïf et, en ne considérant que ces textes, on risquerait de rester à la surface, pour ainsi dire, de la pensée de Gödel et d'en même manquer le détail, les nuances.

Je soutiendrai en particulier qu'il faut distinguer dans les textes de Gödel trois genres d'intuition hétérogènes : une intuition réelle, une intuition idéalisée et une intuition abstraite. J'examinerai ensuite les problèmes métaphysiques que ces deux derniers genres d'intuition posent aux yeux de Gödel lui-même.

2. LA RÉFÉRENCE À L'INTUITION

À partir des années cinquante, Gödel voit d'abord dans l'intuition mathématique (de façon générale) un fait psychologique. On peut discuter du sens, de la portée à donner à cette expérience subjective, d'une sorte de perception des objets mathématiques, mais on ne peut pas douter de cette expérience elle-même :

(3) « The existence as a psychological fact of an intuition covering the axioms of classical mathematics can hardly be doubted. »⁷

⁷ Gödel *1953/9-III, C.W., t.III, p.338, n.12 : « L'existence, comme fait psychologique, d'une intuition couvrant les axiomes des mathématiques classiques, peut difficilement être mise en doute. »

ou encore :

(4) « Despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. [...] There is a] mere psychological fact of the existence of an intuition [...]. »⁸

Gödel lui-même donne à ce fait psychologique une portée métaphysique. Cette expérience révèle en effet une réalité avec laquelle l'*ego* entre en contact. Le platonisme de Gödel est plus nuancé et plus prudent qu'on le croit parfois. Néanmoins, Gödel donne en effet aux objets mathématiques (ou à quelque chose dans les objets mathématiques) une existence à la fois indépendante de l'*ego* mais susceptible d'une perception par l'*ego*. Le premier article philosophique, « La logique mathématique de Russell », de 1944, évoque déjà cette indépendance des objets mathématiques :

(5) « It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. »⁹

À partir des années cinquante, la position d'une réalité mathématique indépendante de l'*ego* s'accompagne toujours de l'exigence qu'il y en ait une perception possible :

(6) « The truth, I believe, is that these concepts form an objective reality of their own, which we cannot create or change, but only perceive and describe. »¹⁰

ou encore :

(7) « [...] its content consists in relations between concepts or other abstract objects which subsist independently of our sensations, although they are perceived in a special kind of experience [...] »¹¹

Il faut souligner cependant que de tels énoncés ne disent rien de la nature de cette réalité mathématique à laquelle l'*ego* a accès. La direction de l'intuition, le lieu de ces objets, sont pour ainsi dire indéterminés. On peut imaginer que l'intuition donne accès à des objets possédant une existence pour eux-mêmes et formant un monde à part. Mais, plusieurs notes dans les Cahiers philosophiques évoquent une autre possibilité : que les objets mathématiques soient des idées dans l'esprit de Dieu et, par conséquent, que l'intuition

⁸ Gödel *1964, C.W., t.II, p.268 : « Malgré leur distance par rapport l'expérience sensible, nous avons quelque chose comme une perception également des objets de la théorie des ensembles, comme on le voit dans le fait que les axiomes s'imposent à nous comme étant vrais. [Il y a un] simple fait psychologique de l'existence d'une intuition. »

⁹ Gödel 1944, C.W., t.II, p.128 : « Il me semble que l'hypothèse de tels objets est aussi légitime que l'hypothèse de corps physiques et qu'il y a autant de raison de croire en l'existence des uns que des autres. »

¹⁰ Gödel *1951, C.W., t.III, p.320 : « La vérité, je crois, est que ces concepts forment une réalité objective propre, que nous ne pouvons ni créer ni changer mais seulement percevoir et décrire. »

¹¹ Gödel *1953/9-III, C.W., t.III, p.351 : « Son contenu [celui des mathématiques] consiste en des relations entre des concepts ou d'autres objets abstraits qui subsistent indépendamment de nos sensations, bien qu'ils soient perçus dans une expérience d'une sorte particulière. »

mathématique soit une perception en Dieu, une sorte de communion avec l'esprit de Dieu.

(8) « Die Ideen und ewigen Wahrheiten sind irgendwie Teile der göttlichen Subst. Daher kann man nicht sagen, daß sie von Gott geschöpft wurde (denn Gott wurde nicht von Gott geschöpft) sondern sie machen das Wesen Gottes aus. [...] Oder ist Gott nur das Prinzip aus dem die Ideen fließen. »¹²

En Dieu, les objets mathématiques auraient également une existence indépendante de l'*ego* et cette remarque de 1946 ne contredit pas forcément les énoncés précédents, bien que cette description de l'intuition modifie le sens que l'on peut donner aux textes de Gödel. Il y a, dans les années 1940 au moins, une ambiguïté dans la description que fait Gödel de l'intuition mathématique. Et il faut lire les textes en tenant compte de cette ambiguïté. Il est difficile de savoir (dans la mesure où les Cahiers philosophiques s'arrêtent pour l'essentiel en 1946 et où, à l'heure actuelle, l'on ne dispose pas d'un tel témoignage sur les évolutions ultérieures de la pensée de Gödel) s'il faut maintenir cette ambiguïté à propos des textes des années cinquante.

Quoi qu'il en soit, l'intuition a, pour Gödel, la charge de fonder les axiomes des mathématiques. Ce n'est pas seulement que l'intuition joue dans la découverte des axiomes : elle en garantit la vérité. L'argument de Gödel, grossièrement, est le suivant. On ne peut considérer les axiomes comme des conventions qu'à la condition de pouvoir établir leur consistance, par des raisonnements sûrs et indépendants de ces mêmes axiomes. Or le deuxième théorème de 1931, dans l'esprit de Gödel, écarte de telles preuves de consistance. Les axiomes doivent donc être considérés comme des propositions vraies, évidentes et susceptibles d'être justifiées de deux façons différentes : ou bien par leur évidence propre, c'est-à-dire dans une intuition ; ou bien par leur succès, dans la mesure où ils permettent de démontrer des conjectures reconnues vraisemblables et, en théorie des nombres, vérifiées par calcul sur des exemples singuliers. Dans le deuxième cas, les axiomes sont comparables à des hypothèses physiques, qui, elles aussi, sont acceptées au regard de leurs conséquences observables. Les axiomes restent alors, comme des hypothèses physiques, révisables :

(9) « For these axioms there exists no other rational (and not merely practical) foundation except either that they (or propositions implying them) can be directly perceived to be true (owing to the meaning of the terms or by an intuition of the objects falling under them), or that they are assumed (like physical hypotheses) on the grounds of inductive arguments, e.g., their

¹² Archives Gödel, Cahiers philosophiques, transcription C. Dawson, t.XI, p.31 : « Les idées et les vérités éternelles sont d'une façon ou d'une autre des parties de la substance divine. Mais, de là, on ne peut pas dire que Dieu les ait créées. Dieu n'est pas créé par Dieu. Mais elles constituent plutôt l'essence de Dieu. Ou bien Dieu est-il seulement le principe d'où les idées découlent ? » Cette référence à Dieu et cette sorte de malebranchisme mathématique peut sembler étrange. Dans l'état actuel du dépouillement des Cahiers philosophiques, il n'est pas possible de véritablement cerner le rôle que Gödel entend donner à ce Dieu.

success in the applications. »¹³

On peut remarquer que Gödel renvoyait déjà en 1947 à l'intuition pour la position de nouveaux axiomes permettant de décider de l'hypothèse du continu. Ce renvoi restait cependant prudent. En fait, le mot « intuition » n'était pas prononcé, bien que, dans l'épistémologie de Gödel, ce ne puisse être qu'une intuition qui éclaire le sens des termes en question. Gödel écrivait simplement :

(10) « A complete solution of these problems can be obtained only by a more profound analysis (than mathematics is accustomed to give) of the meanings of the terms occurring in them (such as 'set', 'one to one correspondence') and of the axioms underlying their use. »¹⁴

Ce sont les trois principales occasions de la référence de Gödel à une intuition mathématique dans les textes épistémologiques : l'intuition comme fait psychologique ; l'intuition comme contrepartie d'une sorte de platonisme (c'est-à-dire de la thèse d'une indépendance des mathématiques vis-à-vis de l'*ego* sans préjuger de la nature, ou du lieu pour ainsi dire, de cette réalité mathématique) ; l'intuition comme fondement. Mais je ne veux pas discuter plus en détail du rôle de l'intuition en mathématiques. Mon but sera plutôt d'examiner des remarques philosophiques, dans les conversations avec Wang en particulier, dans les Cahiers philosophiques également, pour discuter de la nature de l'intuition et des problèmes métaphysiques qui, dans l'esprit de Gödel, lui sont associés.

3. LA STRATIFICATION DE L'INTUITION : L'INTUITION RÉELLE OU CONCRÈTE

C'est un fait peu remarqué que la polysémie du terme intuition dans les textes de Gödel. Et il est vrai que Gödel, nulle part à ma connaissance, ne discute de façon thématique de cette stratification, de cette tripartition, de l'intuition mathématique. Pourtant, il y a, dans les conversations avec Wang en particulier, des textes qui, clairement, supposent une distinction entre différents genres d'intuition. Et, une fois celle-ci reconnue, on voit que, en effet, les textes de Gödel sur l'intuition concernent en réalité des genres d'intuition différents :

Voici par exemple une note de Wang :

(11) « Our intuition is finite and, in fact, limited to something small.

¹³ Gödel *1953/9-III, C.W., t.III, p.346-7 : « Pour ces axiomes, il n'existe pas d'autre fondement rationnel (et non seulement pratique) sinon qu'ils (ou des propositions qui les impliquent) sont perçus comme vrais (en raison du sens des termes ou dans une intuition des objets auxquels ceux-ci s'appliquent) ou qu'ils sont adoptés (comme des hypothèses physiques) sur la base d'arguments inductifs, par exemple à cause de leur succès dans les applications. » Également, Gödel 1947, C.W., t.II, p.182.

¹⁴ Gödel 1947, C.W., t.II, p.179 : « Une solution complète de ces problèmes ne peut être obtenue que par une analyse plus profonde (que celle que les mathématiques ont coutume de donner) du sens des termes qui interviennent (tels que 'ensemble', 'correspondance un-un') et des axiomes sous-jacents à leur usage. »

Kantian intuition is too weak a concept of idealization of our real intuition. I prefer a strong concept of idealization of it. Number theory needs concrete intuition, but elementary logic does not need it. Non-elementary logic involves the concept of set, which also needs concrete intuition. Understanding a primitive concept is by abstract intuition. »¹⁵

Cette note, il faut le reconnaître, n'est dans l'ensemble nullement claire. Néanmoins, Gödel semble bien faire référence à trois genres d'intuition. Il y a une intuition réelle, « finie » et « limitée ». Il y a ensuite une idéalisation de cette intuition, idéalisation que Kant, dans l'*Esthétique transcendantale* manifestement, n'a que partiellement opérée – je reviendrai plus bas sur la théorie kantienne de l'intuition. Il y a enfin une intuition abstraite. Il ne sera pas difficile de distinguer l'intuition réelle des deux autres, qui sont les intuitions mathématiques proprement dites. Gödel souligne, en effet, le désaccord entre l'intuition réelle, ou concrète, et l'intuition, ou les intuitions, mathématiques.

Ma thèse ensuite, en ce qui concerne le rapport entre l'intuition idéalisée et l'intuition abstraite, est que l'intuition idéalisée donne les ensembles comme extension ou, dans les mots de Gödel, champs de variabilité intuitive : une collection d'éléments susceptible d'être passée en revue par un esprit possible. De l'autre côté, l'intuition abstraite donne les concepts mathématiques. Gödel, de façon générale, distingue en effet deux orientations dans les mathématiques et la logique : une orientation extensionnelle qui détermine la théorie des ensembles ; et une orientation intensionnelle qui devrait fonder une théorie des concepts qu'il reste à élaborer. Ces deux théories, théorie des ensembles et théories des concepts, sont liées mais n'ont pas, dans l'esprit de Gödel, les mêmes principes. En particulier, Gödel accepte qu'un ensemble ne peut pas appartenir à lui-même, alors qu'il admet qu'un concept peut s'appliquer à lui-même. La théorie des concepts ne pourra donc pas utiliser une hiérarchie comparable à la théorie des types mais passera par une formalisation sans type, peut-être comparable au λ -calcul. D'autre part, si chaque ensemble peut être considéré comme l'extension d'un concept (la classe des objets satisfaisant ce concept), il y a des concepts (ceux par exemple qui s'appliquent à eux-mêmes) dont l'extension ne peut pas être considérée comme un ensemble et n'entre pas dans la théorie des ensembles.

Je ne fais que mentionner cette distinction, qui est développée ailleurs¹⁶. L'essentiel, ici, est que, à cette distinction entre ensemble et concept, semble

¹⁵ Conversation avec Gödel, citée dans Wang, *A Logical Journey*, Londres, M.I.T. Press, 1996 (noté dorénavant, L.J.), p.217 : « Notre intuition est finie et, en réalité, limitée au petit. L'intuition kantienne est un concept d'idéalisation de notre intuition réelle, trop faible. Je préfère un concept fort d'idéalisation. La théorie des nombres a besoin de l'intuition concrète, mais non la logique élémentaire. La logique non élémentaire fait intervenir le concept d'ensemble, qui exige également une intuition concrète. Comprendre un concept primitif se fait par une intuition abstraite. »

¹⁶ Cf. G. Crocco, « Gödel on Concepts », *History and Philosophy of Logic*, 27-2, pp.171-191, P. Cassou-Noguès, « The Two-Sidedness and the Rationalistic Ideal of Formal Logic: Husserl and Gödel », in L. Boi et al. eds., *Rediscovering Phenomenology*, Berlin, Springer, 2007, pp.309-338 ; P. Cassou-Noguès, « Gödel's Introduction to Logic in 1939 », *History and Philosophy of Logic*, 2009, à paraître.

correspondre une distinction entre deux intuitions : l'une qui passe par une idéalisation des formes de l'intuition sensible sur le modèle de l'*Esthétique transcendantale* et qui déterminent la théorie extensionnelle, les ensembles mathématiques ; l'autre qui est sans doute plus apparentée à l'intuition catégoriale de la phénoménologie de Husserl et détermine la théorie intensionnelle, les concepts mathématiques. Enfin, à ces deux intuitions qui jouent en mathématique, s'en superpose une troisième, la plus primitive sans doute, l'intuition réelle, ou concrète.

Je commence par évoquer rapidement cette dernière. Dans la note précédente, Gödel la plaçait au fondement de l'intuition kantienne, comme le noyau concret, réel, que Kant idéalise. Mais son modèle est sans doute l'intuition finitiste telle qu'elle intervient dans le programme de Hilbert :

(12) « What Hilbert means by 'Anschauung' is substantially Kant's space and time intuition confined, however, to configurations of a finite number of discrete objects. Note that it is Hilbert's insistence on *concrete* knowledge that makes finitary mathematics so surprisingly weak. »¹⁷

L'intuition concrète joue d'abord dans l'arithmétique finitiste : elle semble fonder le dénombrement et les opérations sur les collections finies. Mais, comme l'intuition kantienne, l'intuition concrète intervient également en géométrie. Or elle est ici en « désaccord » avec les intuitions de la théorie des ensembles¹⁸. En effet, du point de vue ensembliste, le continu est un ensemble de points, un ensemble qui a pour élément et, en un sens, est composé des objets, comme les suites d'entiers, que l'on peut identifier aux points de la droite. Mais, du point de vue géométrique intuitif, le point n'est pas véritablement un élément du continu : le point est plutôt une limite, un terme qui n'a pas d'existence réelle, et la recollection, la « somme », si l'on veut, de ces limites ne reconstituent pas encore le continu. C'est ce que Gödel dit très clairement à Wang :

(13) « There are cases when we mix two or more exact concepts in one intuitive concept and then we seem to arrive at paradoxical results. [...] Another example along the same line is our intuitive concept of points. In set theory we think of points as part of the continuum in the sense that the line is the set of points on it. [...]. In space intuition we think of space as a fine matter so that each point has zero weight and is not part of matter (but only a limit between parts). [...]. According to the intuitive concept, summing up all the points, we still do not get the line segment, rather the points form some kind of scaffold on the line. »¹⁹

¹⁷ Gödel 1972, C.W., t.II, p.272, n.b. : « Ce que Hilbert signifie sous le terme 'Anschauung' est en substance l'intuition kantienne de l'espace et du temps limitée à des configurations comportant un nombre fini d'objets discrets. Notons que c'est l'insistance de Hilbert sur la connaissance *concrète* qui rend les mathématiques finitistes si étonnamment faibles. »

¹⁸ « [...] the lack of agreement between our intuitive geometrical concepts and the set-theoretical ones [...] », Gödel 1947, C.W., t.II, p.186.

¹⁹ Wang, *From Mathematics to Philosophy*, New York, Humanities Press, 1974, p.86 : « Il y a des cas où nous mêlons au moins deux concepts exacts dans un concept intuitif, et ensuite il nous semble parvenir à des résultats paradoxaux. [...] Un autre exemple dans la même perspective est notre concept

Une note antérieure, pour la révision en 1964 de l'article « What is Cantor's Continuum Problem ? », va dans le même sens :

(14) « A continuous geometric manifold (such as the Euclidean plane) is one of those instances where our intuitive concept does *not* agree with that of set in set theory (because the latter as opposed to the former identifies the continuum with the set of its points). »²⁰

Ces notes établissent bien la distinction entre deux (au moins) genres d'intuitions : une intuition géométrique et une intuition ensembliste. Et le continu dont s'occupe la théorie des ensembles n'est pas en réalité le continu de l'intuition géométrique. Cette dissociation entre intuitions et continus géométriques et ensemblistes intervient très tôt dans les réflexions de Gödel. On la trouve à plusieurs reprises dans les Cahiers philosophiques, à l'époque donc où Gödel travaille à une démonstration de l'indépendance de l'hypothèse du continu²¹.

4. L'INTUITION IDÉALISÉE

L'intuition réelle apparaît comme une source de confusion en mathématiques, donnant un concept du continu différent de celui de la théorie des ensembles. Néanmoins, Gödel évoquait dans la citation (11) une idéalisation de cette intuition (avec un « concept fort d'idéalisation ») à laquelle il semblait donner une place en mathématiques. Cette idéalisation forte de l'intuition réelle, ou concrète, semble être liée à l'un des critères (formulés dans les conversations avec Wang) pour l'existence d'un ensemble. Ce critère est qu'un ensemble est une collection d'éléments qu'un esprit possible doit pouvoir passer en revue (« overview », « running through » dit Gödel en anglais) :

(15) « According to Gödel's view, a set is one object which contains its many elements as constituents i.e. a whole consisting of them. As a criterion for the existence of such a whole ([...]) we use the fact that we can in some idealized sense overview or run through the many in question (collect them as Cantor says) i.e. that they are given in some sense as an int[uitive] field of variability. [... That] raises more difficult problems than would seem at first sight: e.g. running through will probably have to mean running through

de point. Dans la théorie des ensembles, nous pensons les points comme élément du continu en ce sens que la ligne est l'ensemble de ses points. [...] Dans l'intuition de l'espace, nous pensons l'espace comme une matière subtile de telle sorte que le point a un poids nul et n'est pas une partie de la matière (mais seulement une limite entre des parties). [...] Selon le concept intuitif, en ajoutant tous les points, nous n'obtenons pas un segment, les points forment plutôt une sorte d'échelle sur la ligne. »

²⁰ Archives Gödel 8c, 101, 040311, note pour la révision en 1964 de Gödel 1947 : « Une variété géométrique continue (comme le plan euclidien) est un des cas où notre concept intuitif *ne* s'accorde *pas* avec celui d'ensemble dans la théorie des ensembles (parce que celui-ci, et non celui-là, identifie le continu à l'ensemble de ses points. » Gödel souligne.

²¹ Notamment, Archives Gödel, Cahiers philosophiques, transcription C. Dawson, t.IV, p.231. Également, t.XI, p.52 : « In diesem Sinn ist das Kontinuum nicht die mengentheoretischen Summe seiner Punkte » [« en ce sens, le continu n'est pas la somme de ses points comme en théorie des ensembles »].

by some possible mind. »²²

Comment passer en revue les éléments d'un ensemble ? Et en quoi ce processus est-il lié à une idéalisation de notre intuition intuitive ? En fait, le passage en revue des éléments semble se faire dans une sorte de temps, ou une idéalisation du temps réel de notre intuition intérieure. C'est le « temps kantien »

(16) « It is a strong idealization of the concept of our real intuition to speak of sets as given by an overview. The idealized time concept in the concept of overview has something to do with Kantian intuition. »²³

Kant, on le sait, faisait reposer l'arithmétique sur l'intuition du temps. Compter, cela suppose de détacher par l'attention des objets, quels qu'ils soient, les uns après les autres. On ne compte donc que dans le temps. Or, de la même façon (puisque Gödel rapporte ce passage en revue à un concept de temps idéalisé), il semble que ce processus s'opère dans une sorte de temporalité. Mais ce « temps » ne peut pas être celui que nous connaissons, la forme (disait Kant) de notre vie intérieure. En effet, Gödel parle de « passage en revue » ou de « parcours » pour des ensembles que nous n'aurions jamais fini d'énumérer dans la forme du temps tel que nous le connaissons. Il faut plutôt imaginer sur la base du temps réel des formes, une intuition infinie, qui ne peut alors plus être la nôtre mais celle d'un esprit possible que nous pouvons seulement concevoir :

(17) « To arrive at the totality of integers involves a jump. Overlooking it presupposes an *infinite intuition*. In the second jump we consider not only the integer as given but also the process of selecting integers as given in intuition. [...] We idealize the integers (a) to the possibility of an infinite totality, and (b) with omissions. In this way we get a new concrete intuitive idea, and then one goes on. There is no doubt in the mind that this idealization – to any extent whatsoever – is at the bottom of classical mathematics [...] What this idealization – realization of a possibility – means is that we conceive and realize the possibility of a mind which can do it. »²⁴

²² Archives Gödel, 8c, 117, 040398 (notes préparatoires pour les textes donnés à Wang pour *From Mathematics to Philosophy*, op. cit.) : « Selon Gödel, un ensemble est un objet qui contient ses différents éléments à titre de constituants, c'est-à-dire un tout consistant en ses éléments. Comme critère pour l'existence d'un tel tout ([...]), nous utilisons le fait que nous pouvons en un sens idéalisé survoler ou parcourir le plusieurs en question (les collecter, dirait Cantor), c'est-à-dire qu'ils sont donnés en un sens comme un champ de variabilité. [...] Cela] pose des problèmes plus difficiles qu'il ne semblerait à première vue : par exemple, parcourir signifiera probablement parcourir par un esprit possible. »

²³ L.J., p.218 : « C'est une idéalisation forte du concept de notre intuition réelle de parler des ensembles en tant que donnés dans un survol. Le concept de temps idéalisé dans le concept de survol a quelque chose à voir avec l'intuition kantienne. »

²⁴ L.J., p.218 : « Parvenir à la totalité des entiers suppose un saut. La survoler suppose une intuition infinie. Par un deuxième saut, nous ne considérons plus seulement les entiers comme donnés mais aussi le processus de sélectionner des entiers comme donné dans l'intuition. [...] Nous idéalisons les entiers (a) quant à la possibilité d'une totalité infinie et (b) avec des omissions. De cette façon, nous obtenons une nouvelle idée intuitive concrète, et nous pouvons continuer. Il n'y a pas de doute que cette idéalisation – aussi loin que l'on veut – est au fondement des mathématiques classiques. [...] Ce que cette idéalisation – la réalisation d'une possibilité – signifie est que nous concevons et réalisons la

Ce paragraphe pose plusieurs problèmes. Avant tout, le continu, en tant qu'ensemble de toutes les suites de nombres entiers, semble pouvoir être rattaché à cette idéalisation de l'intuition, qui n'est ni l'intuition géométrique, réelle ou concrète, ni l'intuition abstraite (dans la citation (11)). Il y a donc une deuxième intuition du continu, à côté de l'intuition géométrique que Gödel évoquait dans les citations (13) et (14). Par ailleurs, si le continu est ainsi susceptible d'être passé en revue et si ce passage en revue se fait dans une sorte de temps, ce processus devrait bien ordonner le continu. Or, c'est l'indécidabilité de l'hypothèse du continu, nous ne savons pas définir un bon ordre sur le continu. L'idée de Gödel semble être que le continu est donné comme susceptible d'être passé en revue, bien ordonné mais il ne l'est pas effectivement par nous mais seulement par un esprit possible dont nous-mêmes ne pouvons qu'affirmer la possibilité.

Reprenons les différents éléments de cette discussion. Gödel pose que les éléments d'un ensemble doivent pouvoir être passés en revue (citation (15)). Ce passage en revue se fait dans un temps fortement idéalisé (citation (16)). Mais les ensembles que Gödel mentionne comme susceptibles d'être passés en revue ne peuvent pas l'être dans la forme du temps que nous connaissons. Cette sorte d'intuition de la suite des entiers suppose déjà un « saut » (citation (17)), et elle n'est que le point de départ pour de nouveaux processus. Il faut bien accepter que ce processus de passage en revue tel que l'envisage Gödel ne peut pas se faire dans le temps de notre sensibilité mais dans des formes plus complexes (et le cas échéant de puissance différente) dans lesquelles nous ne vivons pas mais que nous pouvons prêter à des esprits possibles. Le critère invoqué pour l'existence d'un ensemble est alors que l'on puisse imaginer un esprit possible capable, dans le temps dans lequel il vit, de passer en revue, l'ensemble en question. Cette référence à un « esprit possible » est explicite dans les citations (15) et (17). Elle est encore plus claire dans cette note manuscrite sur un texte de Wang. Celui-ci écrit :

(18) « With a set we obtain an intuitive concept which unlike an abstract concept (such as that of mental illness) enables us to overview or look through the whole extension of the set. »

Gödel ajoute :

« For a set presupposes an intuitive concept which enables us (or rather some mind which we can imagine in our mind) to overview or look through the whole extension of the set. »²⁵

La formulation suivante donne au critère en question – qu'un ensemble doit pouvoir être passé en revue – une portée universelle mais dépendant de la

possibilité d'un esprit qui pourrait l'accomplir. »

²⁵ Archives Gödel, 20, dossier Wang. Wang écrit : « Avec un ensemble, nous avons un concept intuitif qui, à la différence d'un concept abstrait (comme celui de maladie mentale), nous permet de survoler ou passer en revue toute l'extension de l'ensemble. » Gödel ajoute : « Car un ensemble présuppose un concept intuitif qui nous permet (ou plutôt permet à quelque esprit que nous pouvons imaginer dans notre esprit) de survoler ou passer en revue toute l'extension de l'ensemble. »

possibilité d'imaginer d'autres esprits :

(19) « For every set, there is some mind which can overview it in the strictest sense. »²⁶

Si chaque action – détacher un élément par l'attention, par exemple – compte pour une durée déterminée – disons 1 –, le temps de notre sensibilité est semblable à la suite des entiers. Nous pouvons y accomplir un nombre fini mais arbitrairement grand d'actions élémentaires. L'idéalisation qu'évoque Gödel revient alors à considérer que ce temps que nous connaissons n'est qu'une forme parmi d'autres. D'une part, il est possible de faire jouer le rôle du temps à n'importe quel ensemble bien ordonné, semblable à des ordinaux supérieurs à ω et, éventuellement, de puissance supérieure, si le continu peut être passé en revue en ce sens. Et, d'autre part, il est possible d'imaginer un esprit qui vivrait dans un tel temps et pourrait alors passer en revue les ensembles en question. Ces thèses peuvent sembler fantastiques. Elles remontent pourtant aux premières réflexions de Gödel dans ses cahiers philosophiques, dans les années 1940. Elle s'y exprime même de façon plus explicite que dans les conversations avec Wang :

(20) « Eine Menge ist etwas, was durch Zusammenfassen ihrer Elemente Stück für Stück...entsteht. (Das ist die idealisierte und extrapol. psych. Interpretation). Man muß dabei annehmen, daß man beliebig weit 'zählen' kann oder daß die Zeit eine geordnete Menge von der Struktur des wohlgeordneten Absoluten ist und daß man beliebig späte Zeitpunkte erlebt. »²⁷

Gödel ne fait ici pas référence à un esprit possible mais à un simple « on ». Il pose pourtant clairement que ce critère, que les éléments d'un ensemble doivent pouvoir être passés en revue, suppose de considérer comme temps n'importe quel segment de la suite des ordinaux ou, finalement, cette suite entière et d'admettre qu'« on » puisse vivre dans ce « temps » aussi « tard » que requis.

À la page suivante, Gödel se demande si nous pourrions en effet vivre dans de tels temps infinis. La note, manifestement rédigée dans la hâte, n'est pas claire mais elle montre bien que, pour Gödel, des temps infinis en ce sens sont des formes possibles pour des esprits possibles :

(21) « Ist es eigentlich möglich (widerspruchsfrei), daß man etwas erlebt, was nach unendlich viel eigenen Taten liegt? Eine Situation, in der wir uns erinnern unendlich viel getan zu haben ist denkbar. [...] Es wäre sogar möglich, das morgens diese Situation eintrifft* (in der wir immer schneller gelebt hätten). Trotzdem scheinen die beiden Aussagen A1= 'Ich werde noch unendlich oft [schöpfen]' und A2= 'Ich werde irgend dann nicht mehr

²⁶ L.J., p. 260 : « Pour chaque ensemble, il y a un esprit qui peut le survoler au sens le plus strict. »

²⁷ Cahiers philosophiques, transcription C. Dawson, t.VI, p.430 : « Un ensemble est quelque chose qui se forme par la prise ensemble de ses éléments morceaux par morceaux. C'est l'interprétation idéaliste et psychologue extrapolée. Mais on doit pour cela supposer que l'on est peut compter arbitrairement loin ou que le temps est un ensemble ordonné de la structure de l'absolu bien ordonné et que l'on vit jusqu'à des points temporels arbitrairement éloigné. »

schöpfen' einander zu widersprechen, während wir schöpfen ; aber nicht die entsprechenden Aussagen zur Zeit ω – d.h. wir können eine Theorie bauen mit einer nicht Archimedischen Zeit (d.h. einer nicht Archimedische geordneten Menge, welche 'genau' die Rolle unserer Zeit zielt) und dann ein Wesen konstruieren, welches [...] die entsprechenden Aussagen (über Vergangenheit) $A'1$, $A'2$ zur Zeit ω erkennt. »²⁸

5. L'INTUITION ABSTRAITE : ANALOGIE AVEC LA PERCEPTION SENSIBLE

La théorie des ensembles semble donc d'abord faire intervenir une « idéalisation » de l'intuition, consistant au fond à replacer le temps de notre sensibilité dans un système plus large de formes (ou d'ensembles bien ordonnés) qui constitueraient la temporalité possible d'autres esprits. Bien entendu, nous ne pouvons pas nous-mêmes utiliser ces formes temporelles pour passer en revue tous les ensembles de la théorie des ensembles. Mais ce que nous pouvons faire, d'après Gödel, c'est « concevoir », ou « imaginer » d'autres esprits vivant dans d'autres formes, et nous servir de ce critère, que les éléments d'un ensemble doivent pouvoir être passés en revue par un esprit possible, pour déterminer les ensembles véritables. Sont exclus par exemple les classes qui appartiennent à elles-mêmes et qui, pour cette raison même, ne pourraient pas être véritablement passées en revue, élément par élément. Nous n'avons pas nous-mêmes une intuition « idéalisée », nous ne vivons pas nous-mêmes dans ces formes extrapolées à partir du temps sensible. Néanmoins, cette idéalisation de l'intuition joue en théorie des ensembles, elle en est même, dit Gödel, au fondement. Et ce serait, pour un esprit infini, l'un des modes de donation possible du continu (citation (17)).

Je voudrais maintenant aborder une troisième intuition, l'intuition abstraite. Celle-ci est marquée, dans les textes de Gödel, par deux traits. Elle est en général rapportée aux « concepts », et non plus aux « ensembles ». Elle est pensée par analogie avec la perception sensible (et non plus comme idéalisation des formes de l'intuition sensible). On voit bien à la façon dont Gödel en parle qu'il s'agit d'une opération tout à fait différente de celle que recouvre l'idéalisation. Par exemple la remarque suivante, dans les textes donnés par Gödel à Wang, rapporte les concepts à une intuition, posée comme analogue à la perception sensible et qui, manifestement, n'est plus l'intuition idéalisée des notes citées dans le paragraphe précédent :

(22) « 'If we begin with a vague intuitive concept, how can we find a sharp

²⁸ Archives Gödel, Cahiers philosophiques, transcription C. Dawson, t.VI, p.431 : « Est-il vraiment possible (sans contradiction) que l'on vive quelque chose qui ait lieu après une infinité de faits singuliers ? Une situation dans laquelle nous nous souvenons d'avoir accompli infiniment est pensable. [...] Il se peut qu'un jour cette situation se réalise (dans laquelle nous aurions vécu infiniment vite)*. Sans doute, les deux énoncés A_1 = 'je créerai encore une infinité de fois', A_2 = 'à un certain moment, je ne créerai plus' semblent se contredire pendant que nous créons, mais non plus les énoncés correspondant au temps . C'est-à-dire, nous pouvons bâtir une théorie avec un temps non archimédien (c'est-à-dire une théorie avec un ensemble ordonné non archimédien qui jouerait à peu près le rôle du temps) et ensuite construire une existence [mot illisible] qui reconnaisse au temps les énoncés correspondants (mis au passé).

* [note ajoutée par Gödel] Ou mieux encore décrite comme une vie passée infiniment longue.

concept to correspond to it faithfully ?' The answer Gödel gives is that the sharp concept is there all along, only we did not perceive it clearly at first. This is similar to our perception of an animal first far away and then nearby [...]. There are more similarities than differences between sense perception and the perception of concepts. »²⁹

Cette analogie entre perception sensible et perception des concepts (que, dans la citation (11), Gödel qualifiait « d'abstraite ») est fondée sur ceci. C'est que, dans une perspective kantienne, Gödel considère que les objets de ces deux perceptions, sensible et abstraite, se sont constitués dans la rencontre de l'esprit avec une réalité indépendante de lui. Les objets sont peut-être informés par *l'ego* mais cette information s'accomplit à partir d'éléments extérieurs, à partir de data, des sensations dans le cas de la perception sensible :

(23) « I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e. in mathematical intuition than in sense perception. [...] It seems that, as in the case of physical experience, we *form* our ideas also of those objects on the basis of something else which *is* immediately given. Only this something else here is *not*, or not primarily, the sensations. [...] The 'given' underlying mathematics [...], the data of this second kind [...] may represent an aspect of objective reality, but, as opposed to the sensations, their presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality. »³⁰

Cette analogie est, dans l'esprit de Gödel, si rigoureuse que le logicien décrit à plusieurs reprises l'intuition abstraite comme un sixième sens. Mais, alors que les cinq autres ouvrent sur les mêmes objets (je peux voir ce que je peux toucher, en général), ce sixième sens ouvre sur un autre domaine, sans connexion causale avec le précédent. En outre, ce domaine semble réglé par des lois plus simples que l'on peut résumer dans des axiomes. C'est cette simplicité des lois dans le domaine idéal et cette absence de connexion avec le domaine sensible qui conduit à considérer les axiomes comme des tautologies :

(24) « Let us assume that e.g. someone had a sixth sense which would give him only a few perceptions and these in no causal connexion with the perceptions of his other senses. Then he could incorporate these perceptions in a few synth[etical] rules which he could prove tautological (i.e. of no consequences for the other perc[eptions]) [...]. This simile in my opinion

²⁹ Wang, *From Mathematics to Philosophy*, op. cit., p.84-85 : « 'Si nous partons d'un concept intuitif vague, comment pouvons-nous trouver un concept précis qui lui corresponde fidèlement ?' La réponse que donne Gödel est que le concept précis est là depuis le début mais que nous ne le percevons pas clairement au départ. Il en est comme de la perception d'un animal, d'abord de loin puis de près. [...] Il y a plus de similitudes que de différences entre la perception sensible et la perception des concepts. »

³⁰ Gödel 1964, C.W., t.II, p.269 : « Je ne vois pas de raison pour laquelle nous devrions avoir moins confiance dans cette sorte de perception, c'est-à-dire dans l'intuition mathématique, que dans la perception sensible. [...]. Il semble que, comme dans le cas de l'expérience physique, nous *formons* également nos idées de ces objets sur la base de quelque chose qui *est* immédiatement donné. Seulement ce quelque chose d'autre ici *n'est pas*, ou n'est pas essentiellement, une sensation. [...] Le 'donné' sous-jacent aux mathématiques [...], les data de cette seconde espèce [...] peuvent représenter un aspect de la réalité objective mais, par opposition aux sensations, leur présence en nous est sans doute due à une autre espèce de relation entre nous et la réalité. »

expresses very well the relationship of reason to the senses. »³¹

ou encore :

(25) « We might, e.g., possess an additional sense that would show to us a second reality so completely separated from space and time reality as not to allow us to make any conclusion about the latter and moreover so regular that it could be described by a finite number of laws. We could then, by an arbitrary decision, recognize only the first reality as such and declare perceptions of the additional sense to be mere illusions and propositions referring to the other reality to be without content and true only in consequence of syntactical conventions. These could be so chosen as to make exactly those propositions true which could be seen to be true with the supposed sixth sense. I even think that this comes pretty close to the true state of affairs except that this additional sense (i.e. reason) is not counted with the senses because its objects are quite different from those of all other senses. »³²

Cette description de l'intuition abstraite comme un sixième sens est également liée à une conjecture philosophique. Gödel envisage en effet l'existence d'un organe, une partie du cerveau, attaché à l'intuition mathématique. Ce serait apparemment une sorte d'un œil mathématique : un organe qui ouvrirait l'*ego* non plus aux objets sensibles mais aux concepts mathématiques. L'argument de Gödel est le suivant. Nous avons souvent besoin pour appréhender les objets mathématiques d'une représentation sensible et, le plus souvent, nous nous aidons de formules. Mais on ne voit pas pourquoi l'appréhension d'un objet hors de l'espace et du temps devrait être liée à celle d'un objet dans l'espace et le temps. S'il existe (que ce soit dans l'esprit de Dieu ou dans un troisième monde) des objets mathématiques et si nous en avons une sorte de perception, pourquoi celle-ci devrait-elle passer par une autre perception, la perception d'un objet différent et qui, au mieux, est une représentation inadéquate du précédent ? Dans une note des Cahiers philosophiques, Gödel demandait si l'on a besoin pour se représenter un

³¹ Archives Gödel, 8b, 95, 040295, brouillon pour Gödel *1951 : « Supposons que, par exemple, quelqu'un ait un sixième sens qui lui donne seulement quelques perceptions et celles-ci sans relation causale aux perceptions de ses autres sens. Il pourrait alors incorporer ces perceptions dans quelques règles synthétiques, qu'il pourrait prouver être tautologiques (c'est-à-dire sans conséquence pour les autres perceptions). [...] Ce parallèle exprime dans mon opinion très bien la relation de la raison aux sens. »

³² Gödel *1953/9-III, C.W., t.III, p.353 : « Nous pourrions par exemple posséder un sens supplémentaire qui nous montrerait une seconde réalité si complètement séparée de la réalité spatio-temporelle que nous n'en pourrions tirer aucune conclusion vis-à-vis de celle-ci, et pourtant si régulière qu'elle pourrait être décrite en un nombre fini de lois. Nous pourrions alors, par une décision arbitraire, reconnaître seulement la première réalité comme telle et considérer les perceptions de ce sens supplémentaire comme de simples illusions, et les propositions qui se réfèrent à cette autre réalité comme étant sans contenu et vraies seulement en conséquence de conventions syntaxiques. Celles-ci pourraient être choisies de façon à rendre vraies exactement ces propositions que l'on reconnaît être vraies par ce supposé sixième sens. Je crois que cela décrit bien la situation, sauf que ce sens supplémentaire (c'est-à-dire la raison) n'est pas compté avec les sens dans la mesure où ses objets sont assez différents de ceux des autres sens. » Également, Gödel *1953/9-V, C.W., t.III, p.359 : « The similarity between mathematical intuition and a physical sense is very striking. »

paysage, que l'on a devant soi, d'en faire une peinture³³. Or, dans la métaphysique de Gödel, il y a un « paysage » mathématique, nous en avons la perception directe, pourquoi avons-nous besoin d'en prendre une représentation verbale ? C'est, conjecture Gödel, que notre perception mathématique utilise un organe spécifique et que celui-ci est comme branché sur les zones cérébrales consacrées au langage :

(26) « Gödel conjectures that some physical organ is necessary to make the handling of abstract impressions (as opposed to sense impressions) possible, because we have some weakness in the handling of abstract impressions which is remedied by viewing them in comparison with or on the occasion of sense impressions. Such a sensory organ must be closely related to the neural centre for language. But we simply do not know enough now »³⁴

Cette remarque n'est nullement isolée. La même thèse que la raison mathématique est un organe spécifique, apparaît à de nombreuses reprises dans les cahiers philosophiques. En voici un exemple :

(27) « Die Vernunft ist also das einzige Organ mit der man die Dinge selber und nicht bloß in Bilder wahrnimmt ? »³⁵

L'idée d'un organe de l'intuition abstraite, d'un œil mathématique, pose des problèmes, en soi et à l'intérieur même de la métaphysique de Gödel. Le principal est le suivant : comment un objet mathématique, qui est hors de l'espace et du temps (qu'il en soit en Dieu ou dans un monde à part), peut-il agir sur un organe, qui est dans l'espace et le temps ? C'est, si l'on veut, un problème comparable à celui de l'union de l'âme et du corps. Cet œil mathématique est comparable à la glande pinéale que, dans la métaphysique cartésienne, l'âme manœuvre. Il y a, semble-il, une sorte de communication entre des substances différentes, dont Descartes reconnaissait qu'elle est impensable.

Gödel pense-t-il avoir une solution dans sa métaphysique, qui est inspirée de la monadologie de Leibniz ? Gödel semble en particulier reprendre à Leibniz une idée (assez vague) d'harmonie préétablie. Dans ce cadre, on pourrait imaginer que cette sorte de parallélisme implique que chaque phénomène dans l'esprit doive se traduire, d'une façon ou d'une autre, dans les corps et, par conséquent, que l'intuition mathématique, ou les pensées mathématiques, doivent elles-mêmes se corréler à des mouvements corporels, dans une partie du cerveau que l'on peut alors considérer comme un organe

³³ Archives Gödel, Cahiers philosophiques, transcription C. Dawson, t.X, p.18.

³⁴ Wang, *From Mathematics to Philosophy*, op. cit., p.85 : « Gödel conjecture qu'un organe physique est nécessaire pour rendre possible le traitement des impressions abstraites (par opposition aux impressions sensibles), car nous avons une faiblesse dans le traitement des impressions abstraites à laquelle on remédie en considérant celles-ci en comparaison avec ou à l'occasion de certaines impressions sensibles. Un tel organe doit être étroitement lié aux centres neuronaux du langage. Mais nous n'en savons pas assez »

³⁵ Archives Gödel, Cahiers philosophiques, transcription C. Dawson, t.VII, p.492 « La raison est l'unique organe avec lequel l'homme peut percevoir les choses mêmes, pas seulement en image ? ». Également, t.VI, p.403'-404'.

mathématique, bien qu'il n'y ait pas d'influence directe des objets idéaux sur cet organe corporel.

Gödel ne semble pas se confronter à ce problème métaphysique, dans les textes du moins qui sont aujourd'hui à notre disposition (n'est transcrite du Gabelsberger qu'une moitié des cahiers philosophiques). Il relie néanmoins cette idée d'un organe mathématique, dans lequel se refléteraient en quelque sorte les concepts abstraits, à d'autres problèmes métaphysiques issus de l'histoire de la philosophie³⁶. Je discuterai dans les paragraphes suivants de plusieurs questions attachées à l'intuition abstraite et qui me semblent devoir conduire à prendre avec précaution l'idée d'un organe mathématique. Ces discussions, dans la dernière section en particulier, illustreront l'intérêt de Gödel pour les problèmes métaphysiques et la façon dont sa philosophie des mathématiques s'enracine dans une véritable métaphysique.

6. RÉFLEXION ET INTUITION

Si Gödel décrit à plusieurs reprises sa métaphysique comme une monadologie inspirée de Leibniz, une seconde influence déterminante sur la pensée du logicien est celle de Husserl. Gödel lit Husserl à partir de 1959, et se réfère encore à la méthode phénoménologique dans ses conversations avec Wang, dans les années soixante-dix, tout en considérant qu'il faut dépasser la lettre des textes de Husserl :

(28) « Husserl speaks of constituting mathematical objects but what is contained in his published work on this matter is merely programmatic. Phenomenological investigations of the constitution of mathematical objects are of fundamental importance for the foundations of mathematics. »³⁷

Or l'influence de Husserl conduit Gödel à proposer dans une conférence de 1961 une description nouvelle de l'intuition abstraite. Cette description, à ma

³⁶ Il y a par exemple cette note (peu claire sans doute) dans le cahier philosophique, t.IV, p.404, transcription C. Dawson) : « Beweis der Arist., daß der Intellekt nicht körperlich ist und auch kein körperliches Organ hat (und daß er letzten Endes überhaupt keine 'Natur' hat sondern eine bloße Möglichkeit ist die alle werden) ist letzten Endes der antinomische Charakter des 'Allen'* (Er sagt aber, wenn er eine bestimmte Natur hätte, würde diese ihn hindern, etwas von dieser Natur irgend wahrzunehmen**).

* Oder besser, die Möglichkeit alles wieder zum Objekt zu machen

** Oder zumindest würde man alle in diesem Licht sehen. »

Gödel, qui ne donne référence précise, pourrait penser au *De l'âme*, III, 4. Aristote soutient en effet que si l'intellect possède une nature propre, alors « en manifestant sa propre forme à côté de la forme étrangère, il met obstacle à cette dernière et s'oppose à sa réalisation ». L'intellect, qui doit pouvoir prendre toute forme, ne peut donc en avoir lui-même aucune en acte. Il semble grossièrement que Gödel rapproche ce raisonnement du fait que la totalité des ensembles ne peut pas être considérée comme un ensemble (sans quoi elle appartiendrait à elle-même). Si l'intellect peut penser chaque chose, et prendre en acte la forme de chaque chose, alors il ne peut être lui-même aucune chose, n'avoir en acte aucune forme, car la totalité des choses serait elle-même une chose.

³⁷ L.J., p.256 : « Husserl parle de constituer les objets mathématiques mais ce qui est contenu dans ses travaux publiés à ce sujet reste seulement programmatique. Des investigations phénoménologiques pour la constitution des objets mathématiques sont d'une importance fondamentale pour le fondement des mathématiques. »

connaissance, ne figure pas dans les textes antérieurs. Gödel voit dans la réflexion phénoménologique non seulement une méthode pour le fondement des mathématiques mais également pour leur progrès. L'analyse d'un concept comme celui d'ensemble passe en effet par une réflexion sur les actes impliqués dans l'intuition de ce concept. C'est dans une telle réflexion, suivant la méthode phénoménologique, que nous pourrions acquérir une connaissance à la fois plus précise et plus étendue des concepts mathématiques :

(29) « In what manner, however, is it possible to extend our knowledge of [...] abstract concepts ? [...] The procedure must thus consist, at least to a large extent, in a clarification of meaning that does not consist in giving definitions. Now in fact, there exists today the beginning of a science which claims to possess a systematic method for such a clarification of meaning, and that is the phenomenology founded by Husserl. Here clarification of meaning consists in focusing more sharply on the concepts concerned by directing our attention in a certain way, namely, onto our own acts in the use of these concepts. »³⁸

Dans la suite du texte, Gödel développe cette perspective. La réflexion phénoménologique constituerait dans l'esprit du logicien une méthode permettant de découvrir toujours des axiomes et, finalement, une procédure déterminée, réglée si l'on veut mais non récursive, susceptible de définir un édifice, avec une infinité d'axiomes, complet, c'est-à-dire dans lequel toute proposition formulée serait ou démontrable ou réfutable.

Ici, la réflexion phénoménologique apparaît donc comme un ingrédient essentiel de la connaissance mathématique : une méthode permettant de développer notre intuition abstraite, indépendamment du reste de toute manipulation sur les formules, de toute considération quant à l'expression sensible que prennent des concepts mathématiques. Cela couperait court à l'argument précédent (citation (26)), pour l'existence d'un organe mathématique. Néanmoins, il n'est pas clair que Gödel conserve dans les années soixante-dix cette description de la connaissance mathématique. En effet, ces analyses de 1961 semblent entrer en contradiction avec certaines notes de Gödel à l'époque des conversations avec Wang. Par exemple, dans le passage suivant, Gödel prend comme preuve de ce que l'*ego* ne crée pas les objets mathématiques à partir de rien (ce qui est la thèse principale du platonisme de Gödel) le fait que, précisément, on ne puisse pas découvrir les propriétés des objets par simple réflexion sur son activité ou, dirait Husserl, sur la constitution des objets.

(30) « [...] if man has created mathematical objects in the sense of having made (i.e. imagined) them out of nothing (not having built them out of

³⁸ Gödel *1961/?, C.W., t.III, p.383 : « De quelle manière, cependant, est-il possible d'étendre notre connaissance des [...] concepts abstraits ? La procédure doit consister pour une large part dans une clarification de sens qui ne consiste pas à donner des définitions. En fait, il existe aujourd'hui les linéaments d'une science qui entend posséder une méthode systématique pour une telle clarification de sens, et c'est la phénoménologie fondée par Husserl. Ici la clarification du sens consiste à examiner de façon précise les concepts en question en dirigeant son attention d'une façon particulière, à savoir sur nos propres actes dans l'usage de ces concepts. »

something given like we build a car), he must be able to know all their properties. For since nothing was there before, everything in the thing created must have been put into it by the creator and therefore the creator either must know of it [crossed out: if the creator was conscious or the creation such that it can be made conscious] or must be able to learn it simply by raising his creative activity from the subconscious to the conscious level (if he could not do that, it would not be his creation but a creation by something in him inaccessible to him). »³⁹

Si l'*ego*, c'est-à-dire pour Gödel la partie consciente de notre esprit, créait les objets mathématiques à partir de rien, nous pourrions alors connaître la totalité de leurs propriétés par réflexion sur cette activité. Mais, précisément, sous-entend la note, ce n'est pas le cas : ou bien cette création est radicalement inconsciente ou bien elle s'appuie sur un *datum* reçu de l'extérieur. Cette note semble bien montrer que Gödel a renoncé à l'usage de la réflexion phénoménologique invoqué dans la conférence de 1961.

Une autre note rapportée par Wang semble également mettre en opposition la conception phénoménologique de l'intuition mathématique (qui, dans la conférence de 1961, semblait passer par une réflexion, une perception intérieure donc) avec celle que défend Gödel dans les années soixante-dix et qui supposerait un organe mathématique.

(31) « The perception of concepts may either be done by some internal organ or just by an inner perception – our own experience – using no special organ. I conjecture some physical organ is necessary for this. »⁴⁰

Cette dernière note n'est sans doute pas claire et l'on risque d'en forcer le sens. C'est surtout la note (30) qui manifeste à mon sens que Gödel prend dans les années soixante-dix une certaine distance vis-à-vis de la phénoménologie et, du moins, de l'usage qu'il en faisait en 1961. Cette distance n'exclut pas une influence importante de la phénoménologie sur la pensée de Gödel et une dette reconnue dans plusieurs conversations avec Wang.

7. UNE INTUITION INHUMAINE

Je voudrais dans cette dernière section discuter de certaines remarques de Gödel, qui tendent à montrer le caractère désincarné et, mieux, inhumain de l'intuition abstraite. Ces remarques mettent à nouveau en question l'hypothèse de l'organe mathématique ou, du moins, en nuancent la portée. En parlant du

³⁹ Archives Gödel 8c, 117, 040396, brouillon de 1974 : « Si l'homme a créé les objets mathématiques, au sens de les avoir fabriqués (c'est-à-dire imaginés) à partir de rien (et non de les avoir construits à partir de quelque chose d'autre, comme on construit une voiture), il doit pouvoir connaître toutes leurs propriétés. Car, puisqu'il n'y avait rien avant, tout dans la chose créée y a été mis par son créateur, et, par conséquent, ce créateur ou bien doit en avoir connaissance [barré : si ce créateur était conscient ou si sa création est telle qu'elle puisse être rendue consciente] ou il peut l'apprendre simplement en élevant son activité créatrice du niveau subconscient au niveau conscient (s'il ne pouvait pas faire cela, alors ce ne serait pas sa création mais une création par quelque chose en lui inaccessible à lui). »

⁴⁰ L.J., p. 235 : « Une perception des concepts peut ou bien être opérée par quelque organe interne ou bien simplement par une perception intérieure (notre propre expérience) n'utilisant aucun organe particulier. Je conjecture qu'un organe physique est nécessaire pour cela. »

caractère inhumain de l'intuition mathématique, je veux dire que l'intuition mathématique doit pouvoir appartenir à un esprit non humain et, par conséquent, être indépendante de toute propriété qui serait spécifique à l'esprit humain et n'appartiendrait pas à tout être rationnel. Je commencerai par évoquer la question du rapport de l'intuition mathématique à l'incarnation, au fait que l'esprit humain soit lié – le *Je pense* uni, dirait Descartes – à un corps.

Cette question se pose nécessairement dans l'interprétation que donne Gödel du théorème d'incomplétude. En effet, Gödel tire du premier théorème de 1931 l'irréductibilité de l'esprit au cerveau. Plus exactement, le théorème d'incomplétude, reformulé en termes de machines de Turing, implique une alternative : ou bien il existe des propositions arithmétiques, des équations diophantiennes, indécidables pour l'esprit humain ; ou bien l'esprit est irréductible à une machine de Turing. Son rationalisme convainc Gödel que l'esprit peut répondre à tout problème qu'il peut se poser : ou démontrer ou réfuter sur la base d'axiomes évidents toute proposition qu'il peut formuler. Et, dans ce cas, il faut accepter que l'esprit surpasse toute machine de Turing. Il y a dans l'esprit humain une composante qui ne fonctionne pas de façon mécanique :

(32) « Subjective human reason ... contains a part completely off mechanism. »⁴¹

(33) « Human reason contains some element which /in its action/in some respect/ is infinitely more powerful/ is totally different/ from any finite combinatorial mechanism or any part thereof. »⁴²

Maintenant, le cerveau est, pour Gödel, une machine de Turing. Cette composante non mécanique de la pensée mathématique ne reflète pas donc le mécanisme du cerveau :

(34) « [...] the working of the human mind cannot be reduced to the working of the brain, which to all appearances is a finite machine with a finite numbers of parts, namely the neurons and their connections. »⁴³

Or, si l'intuition abstraite doit nous permettre, comme le veut le rationalisme de Gödel, de répondre à tout problème que nous pouvons nous poser, il faut qu'elle se développe de façon non mécanique. Il faut qu'elle s'opère dans cette composante de l'esprit dont le fonctionnement est irréductible à celui du cerveau. Comment alors peut-elle être liée à un organe, un module dans le cerveau, qui travaille comme une machine de Turing et dont les résultats resteront toujours incomplets ?

⁴¹ Archives Gödel, 8c, 106, 040333 : « La raison subjective humaine [...] contient un partie complètement en dehors du mécanisme. »

⁴² Archives Gödel, 4b, 30, 020516 : « La raison humaine contient un élément qui /dans son action/ à certains égards/ est /infiniment plus puissant/ est totalement différent/ de tout mécanisme combinatoire ou partie d'un tel mécanisme. » (Brouillon d'une lettre pour Times 1963).

⁴³ Gödel *1951, CW, t.III, p.311 : « [...] le fonctionnement de l'esprit humain ne peut pas être réduit à celui du cerveau, qui, selon toute apparence, est une machine finie, avec un nombre fini de parties, à savoir les neurones et leurs connexions. »

Il y a deux thèses de Gödel, sinon en contradiction, dans une tension l'une par rapport à l'autre : d'un côté, l'intuition abstraite dépend d'un organe spécifique ; de l'autre côté, les mécanismes corporels ne peuvent pas rendre compte des résultats (de la puissance, du fonctionnement) qu'il faut prêter à l'intuition abstraite. On peut à nouveau imaginer des solutions qui accorderaient ces deux thèses. Ce serait, par exemple, que l'intuition abstraite dépend d'un organe propre, sans que son fonctionnement se reflète exactement dans le mécanisme de cet organe. Quoiqu'il en soit, Gödel à ma connaissance ne propose pas de solution à cette tension.

En outre, la thèse de l'irréductibilité de l'esprit au cerveau est sans doute liée aux idées de Gödel sur l'immortalité de l'âme et l'existence d'esprits rationnels non humains. Si l'esprit, en effet, est différent du cerveau et ne se reflète pas dans celui-ci, on comprend que Gödel puisse lui reconnaître une existence à part, qui se prolonge indépendamment du cerveau. C'est du moins une thèse de Gödel, que l'esprit survit à la mort du corps pour alors prendre place dans d'autres mondes que celui que nous connaissons. Cet esprit, détaché du corps, est déjà un exemple d'un esprit que l'on ne peut plus dire véritablement humain. Pour Gödel, il y a d'autres esprits non humains, Dieu, des anges, par exemple. Ce sont des thèses permanentes des textes de Gödel, que l'on rencontre dans les Cahiers philosophiques des années 1940, dans les lettres à sa mère de 1961 ou dans une lettre à Robinson de 1974. Gödel inscrit également, au cours d'une conversation avec Wang, dans la liste de ses quatorze principales propositions philosophiques :

(35) « 4. There are other worlds and rational beings of a different and higher kind.

5. The world in which we live is not the only world in which we shall live or have lived. »⁴⁴

Ces esprits non humains, pré- ou post-humains peuvent posséder d'autres caractéristiques que celles de l'esprit humain, bien qu'il existe un noyau de propriétés que partagent tous les esprits rationnels. C'est un problème pour Gödel que d'essayer de déterminer ces caractéristiques universelles de l'esprit rationnel, qui vaudraient pour tout esprit comme les axiomes de la théorie des ensembles valent pour tout ensemble :

(36) « Axioms apply to all cardinal numbers or to the system of cardinal numbers in its whole extent. But we know literally nothing that would apply to the total existence of rational beings [~~crossed out: to all rational beings in all phases of existence~~]. Since the ego exists independently from the brain, we may have other phases of existence in this material universe or in a world formed after this material universe has collapsed into nothingness. »⁴⁵

⁴⁴ L.J., p.316 : « 4. Il y a d'autres mondes et d'autres êtres rationnels d'une espèce différente et plus haute ; 5. Le monde dans lequel nous vivons n'est pas le seul monde dans lequel nous vivrons ou avons vécu. » Également, à Marianne Gödel, 1961, C.W., t.IV.

⁴⁵ Archives Gödel 8c, 117, 040395 : « Des axiomes s'appliquent à tous les nombres cardinaux ou au système des nombres cardinaux dans toute son extension. Mais nous ne savons littéralement rien qui

Or il y a, du moins, une caractéristique qui est propre à l'esprit humain. C'est la temporalité. Pour Gödel, le temps, exactement comme l'espace dans l'idéalisme de Kant, naît d'une relation du sujet à la réalité. La temporalité ne peut donc ni être posée comme une propriété de la réalité, ni être considérée comme une propriété nécessaire de l'esprit en général. Il y a des esprits, Dieu par exemple (mais sans doute aussi les anges) qui ne connaissent pas le temps et font leurs mathématiques en dehors de toute temporalité :

(37) « For a being with no sensibility at all [crossed out: i.e. not imbedded in the world with our sense organs] (i.e. which would have no body in the material world) but were to consider it only from the outside (by 'pure understanding') no time would exist [...]. It must be ass[umed] in addition that the understanding of this being were so perfect that it does not need marks on paper (or memory pictures in the brain) (which as material processes are only possible in space and time) as crutches but would penetrate all conceptual rel[ations] in one glance. »⁴⁶

Le temps se constituant dans une relation du sujet au monde, un être qui n'est pas inscrit dans le monde par son corps, ne connaît pas le temps. Son intuition des objets mathématiques se fait hors du temps. Or, si nos mathématiques doivent être universelles, si nous pouvons avoir le même accès aux entités mathématiques que ces esprits non humains, il faut, semble-t-il, que notre intuition abstraite soit elle-même dépourvue de temporalité. Et il y a, en effet, aussi bien dans les conversations avec Wang que dans les Cahiers philosophiques, une série de remarques qui décrivent dans des termes proches de ceux de la citation précédente une intuition mathématique immédiate, dépourvue de durée :

(38) « Intuition is different from construction. It is to see at one glance. »⁴⁷

(39) « Das Erkennen (Verstehen) ist ein absolut momentaner Prozeß. »⁴⁸

Das 'Verstehen' (Erfassen des Wesentlichen einer Sache) tritt in einem ganz bestimmten Moment und in diesem vollständig ein, was beweist, daß es in dem Erfassen einer 'Einheit' besteht. Es ist kein allmählicher Prozeß. »⁴⁹

s'applique à l'existence totale des êtres rationnels [barré : à tous les êtres rationnels dans toutes les phases de leur existence]. Puisque l'*ego* existe indépendamment du cerveau, nous pourrions avoir d'autres phases d'existence dans cet univers matériel ou dans un monde formé après que l'univers matériel aura sombré dans le néant. »

⁴⁶ Archives Gödel, 9a, 131, 040418 : « Pour un être qui n'aurait aucune sensibilité [barré : c'est-à-dire qui ne s'inscrirait pas dans le monde au moyen de nos organes de sens], c'est-à-dire qui n'aurait pas de corps dans le monde matériel mais considérerait seulement celui-ci de l'extérieur (par le 'pur entendement'), le temps n'existerait pas. [...] Il faut supposer par ailleurs que l'entendement de cet être est si parfait qu'il n'a pas besoin, comme béquilles, de marques sur le papier (ou d'images mémorisées dans l'esprit) (qui comme processus matériels ne sont possibles que dans l'espace et le temps) mais pénètre toutes les relations conceptuelles d'un seul regard. »

⁴⁷ L.J., p.302 : « L'intuition est différente de la construction. Elle consiste à voir d'un seul coup. »

⁴⁸ Archives Gödel, Cahiers philosophiques, transcription C. Dawson, t.VI, p.426 : « La connaissance (compréhension) est un processus absolument momentané. »

⁴⁹ Archives Gödel, Cahiers philosophiques, transcription C. Dawson, t.VI, p.406 : « La compréhension, l'appréhension de l'essentiel d'une chose) se fait dans un moment tout à fait déterminé et tout entière dans celui-ci, ce qui montre que elle consiste l'appréhension d'une unité. Ce n'est pas un processus

Ces notes tendent à faire de l'intuition abstraite à l'intérieur de l'esprit humain un processus inhumain, dépourvu des caractéristiques de l'humanité comme la temporalité. Dans d'autres notes, Gödel envisage la possibilité de pensées, de vécus, qui seraient non seulement dépourvus de durée mais de toute relation temporelle au présent, que l'on ne pourrait situer ni avant, ni après, ni pendant le présent.⁵⁰

Gödel met donc en question la temporalité de nos vécus. Les notes précédentes (38) et (39) montrent clairement que l'intuition des concepts est détachée de la temporalité de l'esprit : elle est sans durée. Or, à nouveau, cette thèse semble entrer dans une certaine tension avec la conjecture de l'organe mathématique. Comment un vécu sans durée peut-il dépendre d'un organe, dont les mouvements supposent forcément la durée ?

8. CONCLUSION

J'ai surtout voulu montrer que la référence de Gödel à l'intuition dans ses textes épistémologiques n'est ni simple, ni naïve, ou ingénue. Il y a, d'une part, une polysémie du terme « intuition ». Ce sont en réalité à différentes intuitions que Gödel se réfère, et il ne leur donne pas la même fonction. Le continu, par exemple, semble être posé comme corrélat d'une triple intuition. Notre intuition concrète, ou réelle, nous donne un continu géométrique, en contradiction avec nos intuitions ensemblistes. Il semble ensuite y avoir un concept du continu qui est alors donné dans l'intuition abstraite. Enfin, le continu est également posé comme corrélat d'une intuition idéalisée, c'est-à-dire comme susceptible d'être passé en revue, parcouru par un esprit possible.

D'autre part, cette référence à l'intuition s'enracine dans un questionnement métaphysique beaucoup plus vaste. Sans doute, ces analyses métaphysiques semblent parfois difficilement compatibles entre elles. Pour une part, et par exemple en ce qui concerne la relation à Husserl et l'importance de la réflexion phénoménologique, il faut prendre en compte une possible évolution de la pensée du logicien. Cependant, nous avons également rencontré, à propos de l'idée d'un organe de l'intuition abstraite, des thèses prononcées à la même période et qui, à première vue, semblent contradictoires. Il n'est pas facile de savoir si Gödel pensait pouvoir concilier ces thèses dans une métaphysique inspirée de Leibniz, ou bien si, comme il semble l'indiquer à Wang, ses analyses doivent plutôt être considérées comme des fragments isolés, des discussions sur des problèmes que, précisément, le logicien n'aurait pas réussi à intégrer dans un système.

BIBLIOGRAPHIE

- Aristote, *De l'âme*, Tr. fr. J. Tricot, Paris : Vrin, 1995.
 van Atten, M. & Kennedy, J. (2003), On the Philosophical Development of Gödel, *Bulletin of Symbolic Logic*, 9/4, 425-472.

- Balaguer, M. (1998), *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford : Oxford University Press.
- Cassou-Noguès, P. (2005), Gödel and the Objective Existence of Mathematical Objects, *History and Philosophy of Logic*, 26, 211-228.
- Cassou-Noguès, P. (2007), The Two-Sidedness and the Rationalistic Ideal of Formal Logic : Husserl and Gödel, In L. Boi et al. (éds.), *Rediscovering Phenomenology* (pp. 309-338), Berlin : Springer.
- Cassou-Noguès, P. (2008), *Gödel*, Paris : Les Belles Lettres.
- Cassou-Noguès, P. (2009), Gödel's Introduction to Logic in 1939, *History and Philosophy of Logic*, à paraître.
- Crocco, G. (2006), Gödel on Concepts, *History and Philosophy of Logic*, 27-2, 171-191.
- Dawson, J. (1997), *Logical Dilemmas*, Wellesley : A.K. Peters Ltd.
- Gödel, K.. *Collected works*. S. Feferman, J. Dawson et alii. Eds, 5 tomes, Oxford : Clarendon Press, 1986-2003 (noté C.W.).
- Gödel, K. Archives Gödel, propriété de l'I.A.S., conservées à la bibliothèque de l'université de Princeton.
- Husserl, E. (1950), *Idées directrices pour une phénoménologie*, Tr. fr. P. Ricoeur, Paris : Gallimard.
- Husserl, E. (1963), *Recherches logiques*, Tr. fr. H. Elie et al. Paris : Presses Universitaires de France.
- Husserl, E. (1965), *Logique formelle et logique transcendantale*, Tr. fr. S. Bachelard. Paris : Presses Universitaires de France.
- Husserl, E. (1974), *From Mathematics to Philosophy*, New York : Humanities Press.
- Kant, I. (1968), *Critique de la raison pure*, Tr. fr. A. Tremesaygue et B. Pacaud. Paris : Presses Universitaires de France.
- Martin, D.A. (2005), Gödel Conceptual Realism, *Bulletin of symbolic logic*, 11, 207-235.
- Parsons, C. (1995), Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought, *Bulletin of Symbolic Logic*, 1, 1, 44-74.
- Potter, M. (2001), Was Gödel a Gödelian Platonist ? *Philosophia Mathematica*, 9-3, 331-346.
- Wang, H. (1996), *A Logical Journey*, Londres : M.I.T. Press, (noté L.J.)