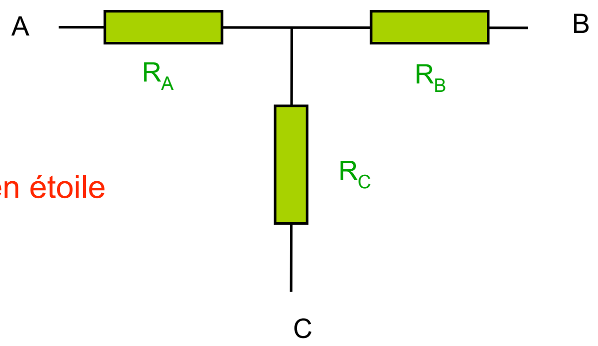
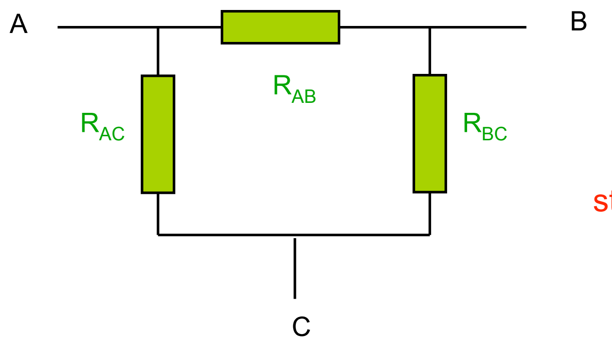
Démonstration du théorème de Kennely



structure en étoile



structure en triangle

Phase 1: Comment passer d'une structure en triangle vers une structure en étoile?

Les deux montages représentent le même comportement. En mettant en l'air le point B du circuit, nous aurons encore le même comportement en étoile et en triangle.
Dans ce cas, le courant circule à travers une résistance **$R_A + R_B$** pour le montage en étoile, alors que le même courant circule à travers R_{AC} parallèle à $R_{AB} + R_{BC}$ (**R_{AC}//[R_{AB}+R_{BC}]**) pour le montage en triangle.
Nous exécuterons la même opération en mettant en l'air le point A, puis le point C ce qui permet de poser toutes les équations nécessaires pour exprimer R_A, R_B et R_C en fonction des résistances du montage triangle

$$\textit{ouvrons le point } B: \quad V_{AC} = (R_A + R_C).I = \frac{R_{AC}.(R_{AB} + R_{BC})}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}.I \qquad (1)$$

$$\textit{ouvrons le point } A: \quad V_{BC} = (R_B + R_C).I = \frac{R_{BC}.(R_{AB} + R_{AC})}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}.I \qquad (2)$$

$$\textit{ouvrons le point } C: \quad V_{AB} = (R_A + R_B).I = \frac{R_{AB}.(R_{AC} + R_{BC})}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}.I \qquad (3)$$

En supprimant les courants de toutes les expressions, il est possible d'isoler les résistances R_A, R_B ou R_C.
Il suffit par exemple de calculer l'expression globale correspondant à (1) - (2) + (3) pour laquelle on obtient

$$2R_A = \frac{2R_{AB}.R_{AC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} \quad \textit{ou encore} \quad R_A = \frac{R_{AB}.R_{AC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

Avec (2) - (3) + (1) puis (3) - (1) + (2) on obtient respectivement

$$R_C = \frac{R_{AC}.R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} \quad et \quad R_B = \frac{R_{AB}.R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

Phase 2: Le passage d'une structure en étoile vers une structure en triangle exploite une approche similaire

Cette fois on propose de court-circuiter chaque fois deux points. Par exemple A et B. Dans ce cas le courant qui circule entre A et C dans le montage en étoile emprunte la résistance **$R_C + R_A // R_B$** (R_C en série avec les deux résistances R_A et R_B qui sont en parallèle). Le même courant qui circule dans le montage en triangle emprunte la résistance **$R_{AC} // R_{BC}$** (R_{AB} ne joue aucun rôle puisque A et B sont court-circuités).

Nous exécuterons la même opération en court-circuitant respectivement A et C, puis B et C, ce qui permet de poser toutes les équations nécessaires pour exprimer R_{AB}, R_{AC} et R_{BC} en fonction des résistances du montage étoile

$$\text{court-circuitons A et B}: \quad V_{BC} = \left(\frac{R_A.R_B}{R_A + R_B} + R_C\right).I = \frac{R_{AC}.R_{BC}}{R_{AC} + R_{BC}}.I \qquad (1)$$

$$\text{court-circuitons A et C}: \quad V_{AB} = \left(\frac{R_A.R_C}{R_A + R_C} + R_B\right).I = \frac{R_{AB}.R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC}}.I \qquad (2)$$

$$\text{court-circuitons B et C}: \quad V_{AC} = \left(\frac{R_B.R_C}{R_B + R_C} + R_A\right).I = \frac{R_{AB}.R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC}}.I \qquad (3)$$

Ici aussi, il est possible de supprimer les courants de toutes les expressions, et d'isoler les résistances R_{AB}, R_{AC} ou R_{BC}.
Avant d'effectuer des calculs globaux, il est possible de transformer chaque relation, ainsi:

$$\frac{R_A.R_B}{R_A + R_B} + R_C = \frac{R_{AC}.R_{BC}}{R_{AC} + R_{BC}} \quad soit: \frac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_A + R_B} = \frac{R_{AC}.R_{BC}}{R_{AC} + R_{BC}} \quad ou\ encore \quad \frac{R_A + R_B}{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C} = \frac{R_{AC} + R_{BC}}{R_{AC}.R_{BC}} \qquad (1')$$

$$\frac{R_A.R_C}{R_A + R_C} + R_B = \frac{R_{AB}.R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC}} \quad soit: \frac{R_A.R_C + R_A.R_B + R_B.R_C}{R_A + R_C} = \frac{R_{AB}.R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC}} \quad ou\ encore \quad \frac{R_A + R_C}{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C} = \frac{R_{AB} + R_{BC}}{R_{AB}.R_{BC}} \qquad (2')$$

$$\frac{R_B.R_C}{R_B + R_C} + R_A = \frac{R_{AB}.R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC}} \quad soit: \frac{R_B.R_C + R_A.R_B + R_A.R_C}{R_B + R_C} = \frac{R_{AB}.R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC}} \quad ou\ encore \quad \frac{R_B + R_C}{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C} = \frac{R_{AB} + R_{AC}}{R_{AB}.R_{AC}} \qquad (3')$$

Il suffit maintenant par exemple de calculer l'expression globale correspondant à (1') - (2') + (3') pour laquelle on obtient

$$\frac{2R_B}{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C} = \frac{R_{AC} + R_{BC}}{R_{AC}.R_{BC}} - \frac{R_{AB} + R_{BC}}{R_{AB}.R_{BC}} + \frac{R_{AB} + R_{AC}}{R_{AB}.R_{AC}} = \frac{R_{AC}.R_{AB} + R_{BC}.R_{AB} - R_{AC}.R_{AB} - R_{AC}.R_{BC} + R_{AB}.R_{BC} + R_{AC}.R_{BC}}{R_{AB}.R_{AC}.R_{BC}} = \frac{2R_{AB}.R_{BC}}{R_{AB}.R_{AC}.R_{BC}} = \frac{2}{R_{AC}}$$

Soit finalement $R_{AC} = \dfrac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_B}$

Avec (2') - (3') + (1') puis (3') - (1') + (2') on obtient respectivement $R_{BC} = \dfrac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_A}$ et $R_{AB} = \dfrac{R_A.R_B + R_A.R_C + R_B.R_C}{R_C}$