UNIVERSITÉ PARIS XII-VAL DE MARNE

UFR Sciences et Technologie

REPRÉSENTATION D'ÉTAT
ET
COMMANDE DANS L'ESPACE D'ÉTAT

Master 1
Mention Sciences de l'Ingénieur

Corinne VACHIER

Dernière mise à jour septembre 2007

Avant propos

L'automatique désigne tout ensemble de commandes visant à asservir un système. Elle est au coeur des grandes évolutions technologiques. Un des exemples les plus fameux est certainement le pilotage automatique des véhicules : avions, trains, voitures... Le système (le véhicule) reçoit des informations (vitesse, angle de braquage...) et réagit en fonction de l'environnement extérieur (dérive, accélération...). Pour imposer au véhicule un comportement, il faut le commander, c'est-à-dire *asservir* son comportement sur une ou plusieurs consignes. Si l'on prend l'exemple d'un véhicule, le système d'asservissement agit sur le système à la manière d'un conducteur qui, selon la pente, la dérive, le vent et les obligations du code de la route, va contrôler via le volant, les pédales, le comportement de son véhicule. Lorsqu'il n'y a pas de pilotage automatique, c'est le conducteur qui réalise la *correction*. Dans le cas d'un pilotage automatique, il faut synthétiser un correcteur susceptible de réagir correctement dans le plus grand nombres de circonstantes possibles et cappable d'atteindre la consigne au plus juste. On parle de commande *robuste* et *précise*.

Comment cet asservissement est-il réalisé ? Comme dans le cas d'un pilote humain, le comportement du système est, dans un premier temps, mesuré via des capteurs (compteur de vitesse par exemple). Dans un deuxième temps, cette information est comparée à la consigne (limitation de vitesse) et dans un deuxième trois, le correcteur (comme le conducteur) va corriger son action sur le véhicule (plus d'accélération, moins d'accélération, freinage...) afin d'amener son véhicule à la vitesse correspondant à la consigne. La prise en compte de la sortie dans le processus de commande est appelé en automatique une *boucle de rétroaction* (feedback en anglais) et l'ensemble constitué du système (la voiture) et du correcteur (le conducteur ou le pilote automatique) forme un système en *boucle fermée* : voir figure 1. Une conduite effectuée sans regarder le compteur ou la route correspond à un *système en boucle ouverte*.

La structure d'asservissement par rétroaction est présente dans de nombreux systèmes, y compris dans des systèmes naturels. L'équilibre de l'homme par exemple fait intervenir une

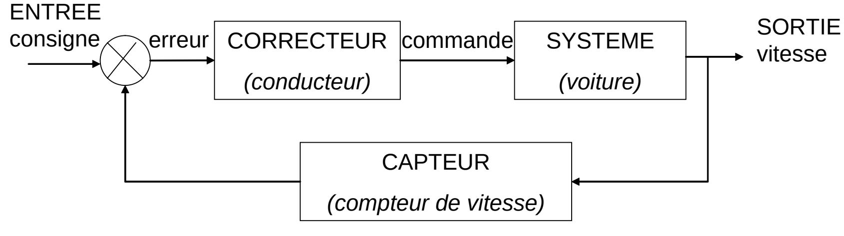


FIG. 1 – *Structure d'un système asservi : rétroaction (boucle fermée) et correction.*

rétroaction. C'est grâce à ce processus que l'on se maintient à la vertical. Un dérèglement des capteurs (ouie, vue, voûte plantaire...) peut ainsi entraîner une perte d'équilibre car la commande pour le maintien à la vertical sera réalisée avec des données erronées.

De nombreux systèmes technologiques sont dotés de systèmes de commande, parfois très élémentaires ou bien plus avancés. La généralisation de l'automatisation et la multiplicité des systèmes à commander pose cependant des difficultés. Premièrement, se pose la question de la conception. La synthèse d'un correcteur nécessite de modéliser corerctement, dans une étape préliminaire, le système à commander. Dans le cas des systèmes complexes, cette modélisation s'accompagne de simplifications plus ou moins importantes nécessaires pour la résolution du problème. De ce fait, la commande est réalisée sur un prototype plus ou moins proche de la réalité. Il faut donc s'assurer que le correcteur fonctionne pour le prototype mais également pour tout système proche du prototype. Deuxièmement, la complexité croissante des systèmes à commander s'accompagne d'une complexité croissante des systèmes de commande. Sur ce point la technologie numérique est de grand secours puisqu'elle offre, outre des moyens de calcul considérables, la possibilité de simuler avant d'implémenter sur le système physique, et tout ceci pour des coûts très bas. En comparaison avec les systèmes de commande analogiques, la synthèse d'un correcteur numérique est facilitée et les systèmes conçus vont pouvoir devenir plus performants du fait de la possibilité de faire communiquer aisément différents systèmes numériques, de pouvoir intégrer des systèmes de commande hiérarchiques, déterministes ou stochastiques...

La structure d'un système asservi est, dans le cas d'une commande numérique, tout à fait identique à celle présentée en figure 1. Le capteur a à charge de transformer des données physiques en données numériques. Pour différentes raisons, toutes les données physiques ne sont pas forcément accessibles à la mesure. Dans ce cas, on devra estimer ces grandeurs. En automatique, on parle d'*observation*.

Le correcteur est le cerveau du système. En commande numérique, c'est un programme informatique exécuté par un ordinateur ou par tout autre système d'électronique numérique. Un actionneur va ensuite traduite la commande numérique en action physique sur le système.

Tout système linéaire et invariant dans le temps est décrit par une équation de convolution ou encore par une fonction transfert, transformée de Laplace de son noyau de convolution, encore appelée réponse impulsionnelle. La transformation de Laplace est un outil privilégié en automatique car elle permet de caractériser à la fois le régime statique du système (le système une fois la convergence obtenue) et son régime transitoire (l'instant suivant immédiatement la commande). Toute la théorie de la commande analogique émane d'une exploitation des propriétés dans le domaine des pseudo-fréquences du système. L'analyse du diagramme de Bode permet en effet une mesure de quantités de paramètres intervenant dans le problème de la commande : étude de la stabilité du système (le système converge-t-il ?), calcul du temps de réponse du système (combien de temps le système asservi met-il à atteindre la consigne ?), mesure du dépacement (la sortie reste-t-elle consignée dans un domaine de valeurs admissible par rapport à la consigne ?)

Si l'on opère avec un calculateur numérique, l'analyse temporelle se révèle plus naturelle : on peut aisément discrétiser les équations différentielles, résoudre des équations algébriques... L'objectif de ce cours est double. Premièrement, donner les bases de la représentation des systèmes sous leur forme temporelle. C'est ce qu'on appelle la *représentation d'état* d'un système. Deuxièmement, montrer les relations qui existent entre les représentations d'état et celles par fonction de transfert. Troisièmement, donner les bases de la commande dans l'espace d'état et enfin indiquer comment les correcteurs ainsi synthétisés s'expriment dans la représentation de Laplace (c'est-à-dire quelle est leur fonction de transfert).

On se restreint, dans le cadre de ce cours destiné aux étudiants en première année de master en sciences de l'ingénieur, au cas des systèmes linéaires et stationnaires. Un des points forts des représentations d'état est leur adaptabilité au cas des systèmes non-linéaires, non stationnaires qu'ils soient continus ou discrets. Ces thèmes sont généralement abordés en deuxième année de Master.

Sommaire

Chapitre 1

Introduction aux représentations d'état

L'idée de base des représentations d'état est que le futur d'un système dépend de son passé, de son présent et de ses entrées : le futur peut alors être décrit à partir d'un ensemble de variables bien choisies. Contrairement à l'analyse classique des systèmes qui fait appel à la représentation de Laplace, dans le cas des représentations d'état, l'analyse a lieu dans le domaine temporel. De fait, au cadre de l'analyse des fonctions de la variable complexe se substitue le cadre de l'algèbre matricielle.

Pour illustrer notre propos, considérons l'exemple de la figure 1.1 décrit par les équations différentielles suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} e(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L\frac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) = C\frac{dv}{dt} \\ s(t) = R_2 i(t) + v(t) \end{array} \right. \tag{1.1}$$

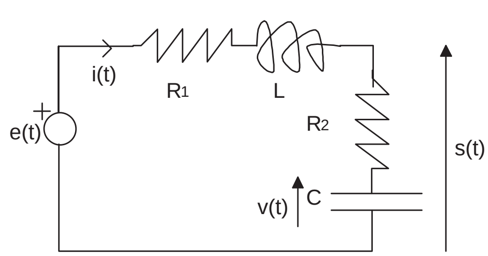


FIG. 1.1 – *Exemple d'un système électronique*

1.1 La notion d'état

On définit l'état d'un système à l'instant t_0 comme l'information sur le passé nécessaire et suffisante pour déterminer l'évolution ultérieure du système quand on connaît, pour $t > t_0$, les signaux d'entrée et les équations du système.

Dans le cas de l'exemple 1.1, l'information nécessaire et suffisante pour résoudre le système d'équations 1.1 est liée aux conditions intiales : $i(t_0)$ et $v(t_0)$. Par conséquent, un ensemble possible de variables d'état est : $[i(t), v(t)]$

On remarque que les variables d'état constituent les supports des "souvenirs" du système. Plus généralement, les variables d'état dans les systèmes physiques sont les éléments aptes à emmagasiner de l'énergie sous forme cinétique ou potentielle : inductances, capacités, masses, ressorts... Ce sont les éléments ayant une capacité de "mémoire".

Définition Un **vecteur d'état** est un ensemble *minimal* de variables d'état, c'est-à-dire de grandeurs temporelles, nécessaires et suffisantes pour déterminer l'évolution future d'un système quant on connaît les équations qui décrivent le fonctionnement du système et les entrées de ce système.

Dans ce qui suit, un vecteur d'état sera noté :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Le nombre n de composantes correspond au degré de complexité du système. Il définit l'**ordre** du système.

Remarques

- Le vecteur d'état n'est pas unique : il y a même une infinité de choix possibles (sur notre exemple, $[i(t), \frac{di}{dt}]^t$ est un autre vecteur d'état possible). On passe d'un vecteur d'état à un autre par simple changement de base.
- Les variables d'état sont généralement choisies pour leur signification physique et/ou leur simplicité dans les équations d'évolution qui leur sont associées.

1.2 Les équations d'etat

Reprenons notre exemple de la figure 1.1, le système d'équations 1.1 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e \\ s(t) = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} x \end{array} \right.$$

Avec $x = \begin{bmatrix} i(t) & v(t) \end{bmatrix}^t$.

D'une manière générale, à tout système linéaire, causal et continu peuvent être associées les équations matricielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)e(t) & \text{Equation d'état} \\ s(t) = C(t)x + D(t)e(t) & \text{Equation de sortie} \end{array} \right.$$

Dans le cas d'un système stationnaire, les matrices A,B,C et D sont indépendantes du temps. Ce cas seul sera examiné par la suite.

- A est appelée matrice d'état du système.
- x est appelée vecteur d'état du système.
- e est appelée vecteur d'entrée du système.
- s est appelée vecteur de sortie du système.

Remarque Dans le cas d'un système discret, ces équations prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(k+1) = Ax(k) + Be(k) & \text{Equation d'état} \\ s(k) = Cx(k) + De(k) & \text{Equation de sortie} \end{array} \right.$$

1.3 L'équation de transition d'état

1.3.1 Résolution de l'équation de transition d'état

Nous cherchons à résoudre l'équation d'état précédemment introduite et qui s'écrit dans le cas général :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Be(t)$$

Le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire. L'équation homogène associée s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

Sa solution est exponentielle et vaut :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

où $t = t_0$ est l'instant initial.

La résolution avec second membre s'effectue comme dans le cas scalaire (attention, en algèbre matricielle, la multiplication n'est pas commutative) :

$$\begin{array}{l}
\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Be(t) \\
e^{-At}\frac{dx}{dt} = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Be(t) = Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Be(t) \\
e^{-At}\frac{dx}{dt} - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}Be(t) \\
\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}Be(t) \\
e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-Au}Be(u)du \\
x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-u)}Be(u)du
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
x(t) & = & e^{A(t-t_0)}x(t_0) & + & \int_{t_0}^{t} e^{A(t-u)}Be(u)du \\
\text{Etat à l'instant t} & & \text{Solution du régime libre (e=0)} & & \text{Contribution des entrées (convolution)}
\end{array}$$

La stabilité de l'état est donc conditionnée par celle de la matrice e^{At} appelée **matrice de transition d'état**. On montre que e^{At} converge si et seulement si les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative. En examinant le lien entre les matrices $[A, B, C, D]$ et la fonction de transfert du système, on retrouvera ce résultat et on insistera sur le rôle joué par les valeurs propres de la matrice d'état A.

Sur le plan numérique, le problème réside dans le calcul de la matrice de transition d'état e^{At}.

1.3.2 Calcul de la matrice de transition d'état

Par définition, la matrice de transition d'état s'écrit :

$$\varphi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + ... + \frac{A^n}{n!}t^n + ... = \sum_{0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}t^n$$

A priori, son calcul fait intervenir un nombre infini de termes : le calcul de toutes les puissances de A. En fait, nous allons voir que cela n'est pas nécessaire.

Calcul par le théorème de Cayley-Hamilton Il est possible de calculer l'exponentiel matriciel à partir d'un nombre fini d'opérations, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton. Ce théorème exprime que toute matrice carrée A est solution de son équation caractéristique. On note $Q_A(p)$ le polynôme caractéristique de A : $Q_A(p) = det(pI - A)$. Si A est une matrice carrée de taille n, $Q_A(p)$ est un polynôme de degré n.

$$Q_A(p) = det(pI - A) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$$

Le théorème de Cayley-Hamilton assure que A vérifie :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I = 0$$

En d'autres termes, A^n s'exprime comme une combinaison linéaires de puissances inférieures de A :

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - ... - a_1 A - a_0 I$$

Par conséquent, il est possible d'exprimer $\sum_0^{+\infty} \frac{A^n}{n!} t^n = e^{At} = \varphi(t)$ en ne faisant intervenir que des puissances de A inférieures strictement à n, c'est-à-dire, qu'il existe un jeu de coefficients $(\alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_{n-1})$ tels que :

$$\varphi(t) = e^{At} = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + ... + \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I \tag{1.2}$$

Dans le cas où les valeurs propres sont distinctes deux à deux, pour calculer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_{n-1}$, il suffit de considérer une base de vecteurs propres $(x_0, x_1 ... x_{n-1})$ de A. On note $(\lambda_0, \lambda_1 ... \lambda_{n-1})$ ses valeurs propres et on réécrit simplement l'égalité (1.2) appliquée à chaque vecteur propre de A :

$$\begin{aligned} e^{At}x_k &= \alpha_{n-1}(t)A^{n-1}x_k + ... + \alpha_1(t)Ax_k + \alpha_0(t)Ix_k \\ &= \alpha_{n-1}(t)\lambda_k^{n-1}x_k + ... + \alpha_1(t)\lambda_k x_k + \alpha_0(t)x_k \end{aligned}$$

D'autre part x_k est non nul et

$$e^{At}x_k = \sum_0^{+\infty} \frac{A^n}{n!} t^n x_k = \sum_0^{+\infty} \frac{\lambda_k^n}{n!} t^n x_k = e^{\lambda_k t} x_k$$

Il vient :

$$e^{\lambda_k t} = \alpha_{n-1}(t)\lambda_k^{n-1} + ... + \alpha_1(t)\lambda_k + \alpha_0(t)$$

et ceci vaut pour toute la base de vecteurs propres. On aboutit donc au système de n équations à n inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e^{\lambda_0 t} &=& \alpha_{n-1}(t)\lambda_0^{n-1} + ... + \alpha_1(t)\lambda_0 + \alpha_0(t) \\ e^{\lambda_1 t} &=& \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} + ... + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_0(t) \\ ... && \\ e^{\lambda_{n-1} t} &=& \alpha_{n-1}(t)\lambda_{n-1}^{n-1} + ... + \alpha_1(t)\lambda_{n-1} + \alpha_0(t) \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Calcul par la Transformée de Laplace Une autre méthode de calcul de la matrice de transition d'état consiste à utiliser les propriétés de la transformée de Laplace :

$$\begin{array}{ll} \text{si} & e^{At} = [\nu_{ij}(t)]_{1\leq i,j\leq n} \\ \text{alors} & TL(e^{At}) = (pI - A)^{-1} = [TL(\nu_{ij}(t))]_{1\leq i,j\leq n} \end{array}$$

La méthode consiste donc à calculer la matrice $(pI - A)^{-1}$ puis à prendre la transformée de Laplace inverse de chacun des termes de la matrice obtenue.

Chapitre 2

Représentation et analyse des systèmes dans l'espace d'état

Les systèmes linéaires et stationnaires sont généralement décrits par leur fonction de transfert (transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle). Pour être à même de transposer les propriétés utilisées dans le domaine de Laplace au cas des représentations d'état, il est nécessaire d'établir le passage d'une représentation à l'autre.

2.1 Equations d'état et fonctions de transfert

On considère un système (S) décrit par sa représentation d'état :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Be(t) \\ s(t) = Cx(t) + De(t)\end{array}\right.$$

On se restreint au cas d'un système à une entrée et une sortie. Exprimons la fonction de transfert $H(p)$ du système en fonction des matrices A,B,C et D.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

En prenant les T.L. des équations d'état et de sortie, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}pX(p) = AX(p) + BE(p) \\ S(p) = CX(p) + DE(p)\end{array}\right.$$

en supposant les conditions initiales nulles.

Soir encore :

$$\left\{\begin{array}{l}X(p) = (pI - A)^{-1}BE(p) \\ S(p) = C[(pI - A)^{-1}B]E(p) + DE(p) = [C(pI - A)^{-1}B + D]E(p)\end{array}\right.$$

Finalement :

$$H(p) = C(pI - A)^{-1}B + D \tag{2.1}$$

En substituant à l'inverse sa définition, il vient :

$$H(p) = \frac{C[cof(pI - A)]^t B + DQ_A(p)}{Q_A(p)} \tag{2.2}$$

où $Q_A(p) = det(pI - A)$.

Les pôles de la fonction de transfert correspondent aux zéros de $det(pI - A)$ qui est aussi le polynôme caractéristique de la matrice d'état A. Par conséquent, **les pôles de $H(p)$ sont les valeurs propres de la matrice d'état A.**

Remarque : Dans le cas d'un systèmes à plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties, on définit de manière analogue une *matrice de transfert*.

2.2 Formes standard de représentations d'état

Considérant un système d'écrit par sa fonction de transfert, il est possible de construire très simplement des représentations d'état de ce système en le décomposant en sous-systèmes élémentaires : des systèmes d'ordre 1 mis en série ou en parallèle.

On considère le système de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + ... + b_1 p^1 + b_0 p}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p^1 + a_0 p}$$

Dans tous les cas, il est plus simple de raisonner dans un premier temps sur le système sans numérateur :

$$H_1(p) = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p^1 + a_0 p}$$

avec

$$H(p) = N(p) \times H_1(p) \quad ; \quad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad \text{et} \quad H_1(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)}$$

2.2.1 La forme compagne pour la commande

Le système est vu comme une mise en série d'intégrateurs purs. A partir de l'expression de la fonction de transfert $H(p)$, on retrouve aisément l'équation différentielle associée au système :

$$s_1^{(n)}(t) + a_{n-1}s_1^{(n-1)}(t) + ... + a_1 s_1^{(1)}(t) + a_0 s_1(t) = e(t)$$

et

$$s(t) = b_m s_1^{(m)}(t) + b_{m-1} s_1^{(m-1)}(t) + ... + b_1 s_1^{(1)}(t) + b_0 s_1(t)$$

Il suit la représentation schématique de la figure 2.1. On choisit comme variables d'état les sorties des systèmes élémentaires, c'est-à-dire les dérivées successives de la sortie. La représentation

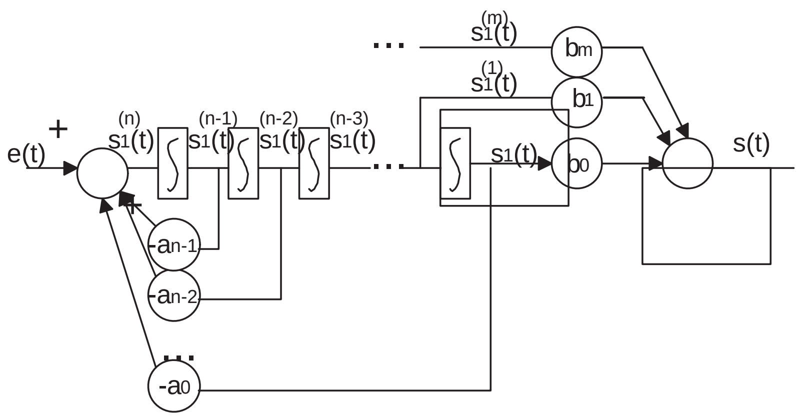


FIG. 2.1 – *Interprétation d'un système complexe sous la forme d'une mise en série d'intégrateurs purs*

d'état obtenue est dite *sous forme compagne pour la commande*; elle s'écrit (si $m < n$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e \\ \\ s(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & ... \end{bmatrix} x \end{array} \right. \qquad \text{avec } x = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_1^{(1)} \\ ... \\ s_1^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Remarques

- Si $m \geq n$ alors $D \neq 0$.
- Toute l'information relative au dénominateur de la fonction de transfert est mémorisée dans la matrice d'état A.
- Toute l'information relative au numérateur de la fonction de transfert est mémorisée dans les matrices C et D.

2.2.2 La forme modale

Le système est vu comme une mise en parallèle de systèmes d'ordre 1. Pour mettre en évidence cette représentation, il suffit de décomposer la fonction de transfert $H(p)$ en éléments simples.

Dans le cas où tous les pôles sont simples et le système d'ordre n, $H(p)$ prend la forme :

$$H(p) = \frac{\alpha_0}{p+\lambda_0} + \frac{\alpha_1}{p+\lambda_1} + ... + \frac{\alpha_{n-1}}{p+\lambda_{n-1}}$$

Il suit la représentation schématique de la figure 2.2. On choisit comme variables d'état les sorties des systèmes élémentaires. La représentation d'état obtenue est dite *sous forme modale*;

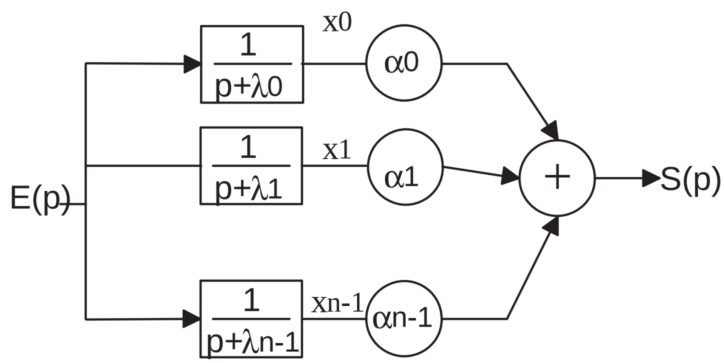


Fig. 2.2 – *Interprétation d'un système complexe sous la forme d'une mise en parallèle de systèmes d'ordre 1*

elle s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -\lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e \\ \\ s(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & ... \end{bmatrix} x \end{array}\right. \qquad \text{avec } x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ ... \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Remarques

- A est diagonale; les éléments diagonaux correspondent aux pôles du système.
- Si le système a des pôles multiples, A est diagonale par blocs (un exemple sera donné en TD)
- La présence d'un numérateur modifie les pondérations dans la décomposition en éléments simples; seules les matrices C et D sont affectées.

Attention ! Nous avons utilisé ici et dans le cas précédent les mêmes notations pour le vecteur d'état (noté x) mais ces vecteurs diffèrent d'une représentation à l'autre. Les deux représentations (modale et compagne pour la commande) représentent le *même système* dans son intégralité (c'est-à-die sans perte). Par conséquent, elles sont isomorphes. On passe de l'une à l'autre par une transformation bijective (qui n'ajoute rien et n'enlève rien). En d'autres termes, on peut trouver une matrice P inversible (c'est une matrice de changement de base) permettant de passer d'une représentation à l'autre. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 2.3.

2.2.3 La forme cascade

Le système est vu comme une mise en série de systèmes d'ordre 1. Pour mettre en évidence cette représentation, il suffit de factoriser le dénominateur de la fonction de transfert $H(p)$. Dans le cas d'un numérateur unitaire, on obtient :

$$H(p) = \frac{1}{(p+\lambda_0)(p+\lambda_1)\ \dots\ (p+\lambda_{n-1})}$$

Il vient alors la représentation schématique de la figure 2.3. On choisit comme variables d'état les sorties des systèmes élémentaires. La représentation d'état obtenue est dite *sous forme cascade.*

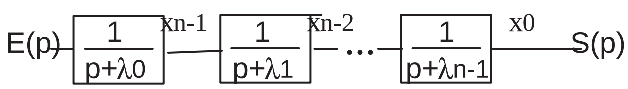


FIG. 2.3 – *Interprétation d'un système complexe sous la forme d'une mise en série de systèmes d'ordre 1*

Dans le cas d'un numérateur unitaire, elle s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{n-2} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e \qquad \text{avec } x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \\ \\ s(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} x \end{array}\right. \qquad (2.5)$$

Remarques

- Si le numérateur n'est pas constant, on perd la forme cascade.
- Le traitement des pôles multiples ne pose aucune difficulté. La matrice d'état garde une forme similaire.

2.3 Conclusion

2.3.1 Intérêts des représentations d'état

La fonction de transfert est une relation entrée/sortie qui n'apporte aucune connaissance sur la structure interne d'un système. Deux systèmes différents peuvent très bien avoir la même fonction de transfert. A contrario, la représentation d'état contient des informations accessibles à la mesure et directement liées aux grandeurs physiques des systèmes. Elle offre de ce fait des possibilités nouvelles en termes d'analyse et de commande des systèmes.

Un même système complexe pouvant être décomposé de différentes manières, la représentation d'état n'est pas unique. Bien au contraire, pour un système donné, il en existe une infinité.

Il a été dit que le dénominateur de la fonction de transfert correspond au polynôme caractéristique de la matrice d'état :

$$Den[H(p)] = det(pI - A) = Q_A(p)$$

Par conséquent, **les pôles du système sont les valeurs propres de la matrice d'état**.

2.3.2 Passage d'une représentation d'état à une autre

On considère deux représentations d'état d'un même système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Be(t) \\ s(t) = Cx(t) + De(t) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = A'r(t) + B'e(t) \\ s(t) = C'r(t) + D'e(t) \end{cases}$$

Le vecteur d'état est un ensemble minimal de variables d'état, il engendre un espace, appelé *espace d'état* de dimension exactement égal au nombre de variables d'état. Changer de vecteur d'état, c'est simplement changer de base de représentation. Il existe donc une matrice de changement de base P telle que :

$$r = Px$$

et :

$$\begin{cases} P\frac{dx}{dt} = A'Px(t) + B'e(t) \\ s(t) = C'Px(t) + D'e(t) \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P^{-1}A'Px(t) + P^{-1}B'e(t) \\ s(t) = C'Px(t) + D'e(t) \end{cases}$$

Les deux représentations d'état (A, B, C, D) et (A', B', C', D') satisfont donc :

$$A = P^{-1}A'P\ ,\ B = P^{-1}B'\ ,\ C = C'P\ ,\ D = D'$$

Chapitre 3

Commande dans l'espace d'état

3.1 Principe de la commande par retour d'état linéaire

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système de la fonction de transfert du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des spécifications d'amortissement, de rapidité...

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

Fig. 3.1 – *Système en boucle ouverte*

Soit un système décrit par l'équation d'état suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Be(t) \\ s(t) = Cx(t) + De(t) \end{cases}$$

Dans le cadre de ce cours, on se restreint à la commande linéaire construite par rétro-action linéaire de l'état du système sur l'entrée :

$$u(t) = e(t) - Lx(t)$$

Les équations du système en boucle fermé sont :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = e(t) - Lx(t) \\ s(t) = Cx(t) + De(t) \end{cases}$$

Le schéma de l'asservissement est donné figure 3.2.

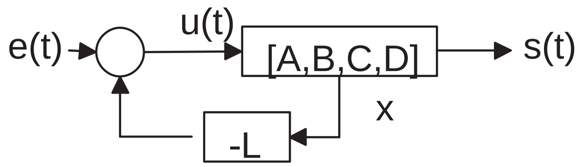


Fig. 3.2 – *Commande par retour d'état linéaire*

L'équation d'état du système en boucle fermé s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + B[e(t) - Lx(t)] = [A - BL]x(t) + Be(t)$$

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermé vaut : $(A - BL)$.

La dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la matrice (A-BL) ; ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique : $det(pI - (A - BL)) = Q_{A-BL}(p) = 0$.

3.2 La commande modale

Elle est réalisable soit dans l'espace d'état, soit sous forme algébrique à partir des fonctions de transfert.

3.2.1 But et définition

On appelle commande modale la commande qui consiste à déterminer une matrice de retour d'état L telle que les valeurs propres de la matrice $(A - BL)$ soient placées en des positions préfixées $(\lambda_0, \lambda_1 ... \lambda_{n-1})$ (valeurs complexes). L'existence d'une solution est étudiée à travers la notion de commandabilité.

3.2.2 Commandabilité

Un système est commandable si et seulement si, pour toute contrainte modale $(\lambda_0, \lambda_1 ... \lambda_{n-1})$, il existe un retour d'état linéaire L satisfaisant. On montre que, dans le cas d'un système mono-variable (une entrée, une sortie), si le retour d'état L existe, il est unique.

Il est souvent intéressant de s'assurer de la commandabilité d'un système avant de cherche à mettre en oeuvre la commande proprement dite. En d'autres termes, on demande de disposer d'une condition nécessaire et suffisante de commandabilité.

Considérons un système représenté par un vecteur d'état x, et une équation d'évolution de l'état : $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Be(t)$. La question que l'on se pose est la suivante : peut-on déterminer une commande admissible transférant le système d'un état donné vers un autre ? En d'autres termes, ils s'agit ici de trouver une commande e telle que le système passe d'un état initial $x(0)$ à un état final $x(t)$.

Nous avons vu que l'évolution de l'état est décrite par :

$$x(t) = e^{At}[x(0) + \int_0^t e^{-A\tau} Be(\tau) d\tau]$$

Donc :

$$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} Be(\tau) d\tau$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour un système d'ordre n, $e^{-A\tau}$ ne fait intervenir que les $(n-1)$ premières puissances de A :

$$e^{-A\tau} = \nu_0(t)I + \nu_1(t)A + \nu_2(t)A^2 + ... + \nu_{n-1}(t)A^{n-1}$$

d'où :

$$e^{-At}x(t) - x(0) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_{t_0}^t \nu_k(\tau) e(\tau) d\tau$$

A et B étant fixés, le système est commandable si on peut trouver $e(\tau)$ telle que la relation soit vraie quelque soit les états initiaux et finaux $x(0)$ et $x(t)$, c'est-à-dire si aucun des termes A^kB n'est lié à un autre, ce qui s'écrit :

$$Comm = [A^{n-1}B\,,\ A^{n-2}B\,,\ ...\,,\ AB\,,\ B] \text{ de rang } n$$

$Comm$ est appelée matrice de commandabilité. Un système est commandable si $rang(Comm) = n$. On définit plus généralement le degré de commandabilité d'un système comme le rang de la matrice de commandabilité. Si $rang(Comm) < n$, alors le système est partiellement commandable. Nous verrons sur un exemple que l'idée, dans le cas d'un système partiellement commandable, consiste à rendre la partie non commandable su système inopérante afin de le contrôler entièrement via sa partie commandable (voir section 6.5).

Exemple On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

On montre que $AB = -2B$, donc rang([AB , B])=1 et le système n'est pas commandable.

3.2.3 Calcul de la commande dans le cas d'un système sous forme compagne pour la commande

Sous la forme compagne pour la commande, les matrices A et B ont des formes très particulières :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}$$

On cherche une matrice L de retour d'état :

$$L = \begin{bmatrix} l_0 & l_1 & l_2 & ... & l_{n-1} \end{bmatrix}$$

telle que la matrice

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_0 - l_0 & -a_1 - l_1 & -a_2 - l_2 & ... & -a_{n-1} - l_{n-1} \end{bmatrix}$$

ait comme valeurs propres $(\lambda_0, \lambda_1 ... \lambda_{n-1})$.

La contrainte modale impose le dénominateur de la fonction de transfert du système en boucle fermé :

$$den(H_{BF}(p)) = (p - \lambda_0)(p - \lambda_1)...(p - \lambda_{n-1}) = p^n + a'_{n-1}p^{n-1} + ... + a'_1 p + a'_0$$

Le placement de pôles de modifie pas le type de représentation (elle reste une forme compagne pour la commande). Par conséquent, on obtient deux écritures différentes pour la matrice d'état du système en boucle fermée $(A - BL)$:

$$A{-}BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_0 - l_0 & -a_1 - l_1 & -a_2 - l_2 & ... & -a_{n-1} - l_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a'_0 & -a'_1 & -a'_2 & ... & -a'_{n-1} \end{bmatrix}$$

d'où le système de n équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_0 + l_0 & = & a'_0 \\ a_1 + l_1 & = & a'_1 \\ ... & & \\ a_{n-1} + l_{n-1} & = & a'_{n-1} \end{cases}$$

qui permet de déduire très simplement le retour d'état $L = \begin{bmatrix} l_0 & l_1 & l_2 & ... & l_{n-1} \end{bmatrix}$.

3.2.4 Calcul de la commande dans le cas général

Dans le cas général, le retour d'état peut modifier notablement la forme de la matrice d'état et le calcul n'est pas aussi simple que dans le cas de la forme compagne pour la commande. Les étapes du calcul de la commande sont alors les suivantes :

1. Calcul de la matrice $(A - BL)$
2. Calcul du polynôme caractéristique de $(A - BL)$. Il vaut $det(pI - (A - BL))$.
3. Identification du polynôme caractéristique de $(A-BL)$ avec le dénominateur de la fonction de transfert de la boucle fermée : $det(pI - (A - BL)) = (p - \lambda_0)(p - \lambda_1)...(p - \lambda_{n-1})$, où $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$ sont les pôles que l'on veut imposer.

Par rapport au cas de la forme compagne pour la commande, il a été ajouté une étape de calcul du polynôme caractéristique de la matrice d'état du système bouclé $det(pI - (A - BL))$.

Une autre solution consiste à effectuer un changement de base pour se ramener au cas d'une forme compagne pour la commande. Un exemple d'un tel calcul sera effectué lors d'une séance de travaux dirigés (voir commande du pendule inversé).

3.3 Asservissement des sorties sur une valeur constante non nulle

3.3.1 Solution directe

Dans le cas où le système ne subit aucune perturbation extérieure, l'objectif de la commande est d'amener le système (et notamment ses sorties) à un nouveau point d'équilibre.

Le placement de pôle permet de satisfaire les contraintes dynamiques imposées au système. Les contraintes statiques doivent être traitées séparément.

On considère ici une contrainte en échelon sur la sortie $s(t)$ du système : on veut $\lim_{t\to+\infty} s(t) = s_c$. Cherchons l'entrée $e(t) = e_c H(t)$ adéquate ($H(t)$ désigne l'échelon d'Heaviside).

Les équations d'état et de sortie en régime statique s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 = (A - BL)x + Be \\ s = Cx + De = s_c \end{cases}$$

Eliminons x d'entre de ces deux équations :

$$\begin{cases} x = -(A - BL)^{-1}Be \\ s_c = -[C(A - BL)^{-1}B + D]e_c \end{cases}$$

L'entrée $e(t)$ à applique au système vaut donc :

$$e(t) = e_c H(t) \text{ avec } e_c = -[C(A - BL)^{-1}B + D]^{-1}s_c$$

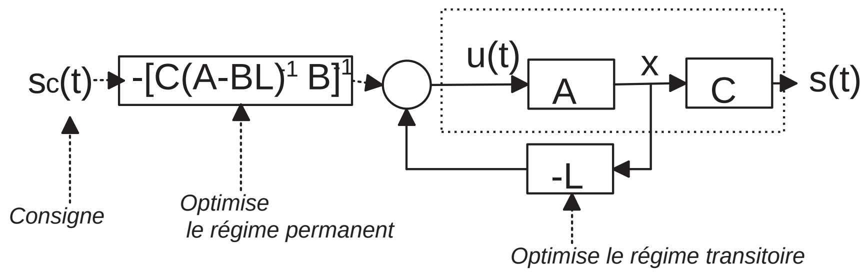


Fig. 3.3 – *Structure de l'asservissement*

Problème : on remarque ici que l'entrée du système ne coincide pas avec la consigne sur la sortie. La commande intégrale qui suit propose une autre approche résolvant ce problème.

3.3.2 Commande intégrale

En commande analogique classique, l'annulation de l'erreur statique en réponse à un échelon s'effectue via un correcteur intégral. Il est possible de mettre en oeuvre une correction similaire dans l'espace d'état en considérant la consigne en sortie comme une perturbation et en effectuant une commande intégrale.

La commande intégrale est plus généralement utilisée dans le cas où des perturbations affectent l'évolution du système ; elle permet en effet de limiter l'influence de ces perturbations sur la sortie.

On considère toujours une contrainte en échelon sur la sortie $s(t)$ du système : on veut $\lim_{t\to+\infty} s(t) = s_c$. Cette consigne est considérée comme une perturbation sur la sortie du système (cf. figure 3.4).

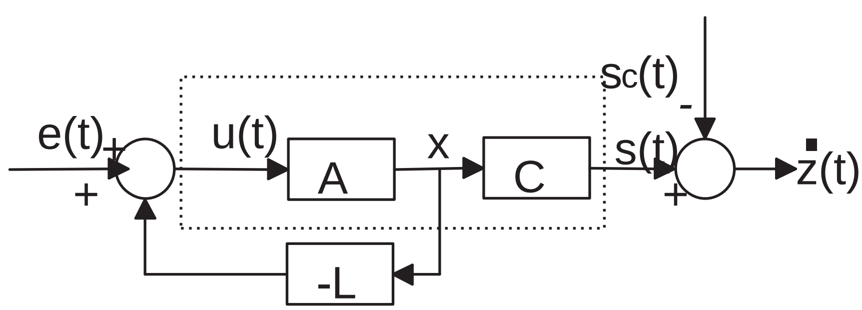


Fig. 3.4 – *Annulation de l'erreur statique par une commande intégrale : la consigne en sortie est vue comme une perturbation.*

On note $\frac{dz}{dt} = s(t) - s_c(t)$. On veut donc $\frac{dz}{dt} = 0$ en régime statique, c'est-à-dire quand $t = +\infty$.

Considérons l'état augmenté $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$. Les équations d'état du système augmenté s'écrivent :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -s_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ s_c \end{bmatrix} \\ s = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ecrivons maintenant ces équations en régime statique :

$$\begin{cases} 0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -s_c \end{bmatrix} \\ s_c = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

On cherche une commande $u = -\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + e$ permettant d'annuler l'erreur statique $\forall e$:

$$\begin{cases} 0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ -s_c \end{bmatrix} \\ s_c = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \begin{bmatrix} A - BL_1 & -BL_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ -s_c \end{bmatrix} \\ s_c = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

Pour que le système augmenté tende vers un état d'équilibre, il faut et il suffit que la matrice $\begin{bmatrix} A - BL_1 & -BL_2 \\ C & 0 \end{bmatrix}$ soit stable. Comme de plus, le raisonnement vaut pour toute entrée e, on peut choisir $e = 0$. La structure de la commande intégrale est donc celle de la figure 3.5.

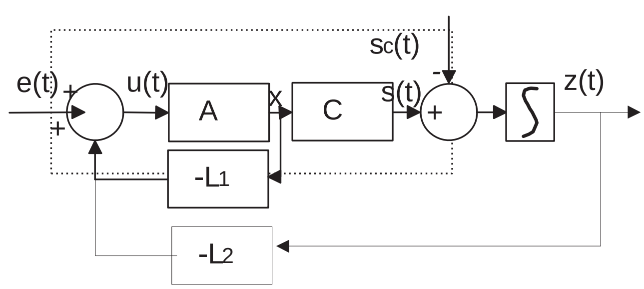


FIG. 3.5 – *Commande intégrale.*

Remarque : Dans la pratique, la commande intégrale nécessite de déterminer le retour L_2 sur l'état ajouté ce qui revient à placer un pôle suplémentaire du système en boucle fermé. Ce pôle est choisi de telle sorte qu'il n'affecte pas la dynamique du système principal, c'est-à-dire que le sous-système relatif à la commande intégrale devra converger *beaucoup* plus rapidement que le système principal. On choisira donc en conséquence la valeur du pôle à affecter à cette partie de la commande. Cette mise en eouvre sera effectuée en séance de travaux pratiques sur l'exemple du pendule inversé.

3.4 Mise en oeuvre de la commande dans l'espace d'état

3.4.1 Commande partielle

Considérons un système de rang $q < n$ (q désigne son degré de commandabilité) mis sous la forme canonique $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$.

On choisit comme vecteur d'état x un vecteur propre du système. Il est ainsi possible de scinder ce vecteur en deux : la partie commandable (q variables d'état : x_1) et la partie non commandable ($(n-q)$ variables d'état : x_2). L'équation d'évolution d'état est de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Les modes du système sont les zéros du polynôme caractéristique de la matrice d'état ; il vaut :

$$det(pI - A) = det(pT - A_{11}) \times det(pT - A_{22})$$

Autrement dit, les valeurs propres de A sont les valeurs propres de A_{11} et les valeurs propres de A_{22}.

La commande modale s'écrit $u = -Lx + e = -\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + e$.

Et l'équation d'évolution de l'état du système commandé s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 L_1 & A_{12} - B_1 L_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

On note que l'évolution de la partie non commandable reste libre (indépendante de la commande modale L), en effet : $\frac{dx_2}{dt} = A_{22}x_2$.

En conclusion :
- Lorsqu'un système a une partie non commandable, les seuls modes modifiables sont ceux de la partie commandable (ceux de A_{11}).
- La partie L_2 de la matrice de réjection (L) est déterminée autrement. D'autres critères peuvent être pris en compte, comme par exemple, le fait de rendre la sortie indépendante de la partie non commandable x_2.

3.4.2 Choix des valeurs propres du système bouclé

1. Pour que la commande soit physiquement réalisable, les valeurs propres choisies doivent être réelles ou complexes conjuguées deux à deux (ce qui garantit une fonction de transfert à coefficients réels).
2. La stabilité étant la première qualité à assurer pour la boucle fermée, les valeurs propres doivent être à partie réelle strictement négative (en discret, à l'intérieur du cercle unité).
3. On peut transposer le choix dans le domaine fréquentiel : on impose une bande passante désirée ω_0 au système bouclé. Ensuite, plusieurs choix sont possibles :
   - Toutes les propres sont choisies égales à $-\omega_0$.
   - On identifie le polynôme caractéristique de $A-BL$ à un polynôme de Butterworth : les n valeurs propres λ sont choisies sur le cercle de rayon ω_0 et vérifient : $\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^{2n} = (-1)^{n+1}$.

Chapitre 4

Synthèse d'observateur

4.1 Principe

Il arrive souvent que toutes les variables d'état d'un système ne soient pas accessibles à la mesure. Dans ce cas, l'implémentation directe de la commande $u = -Lx$ est impossible. De plus, la connaissance de la sortie y ne résoud pas le problème. En effet, comme C n'est pas inversible la connaissance de $y = Cx$ ne permet pas de connaître x.

L'idée est donc de reconstruire l'état x à partir des informations disponibles, c'est-à-dire la sortie y et la commande u. On utilise pour cela un système dynamique permettant d'approximer x : un *observateur*. On parle également de *reconstructeur*, d'*estimateur*, de *filtre*...

Il y a deux environnements possibles : le cas déterministe et le cas stochastique qui permet de prendre en compte les bruits de mesure.

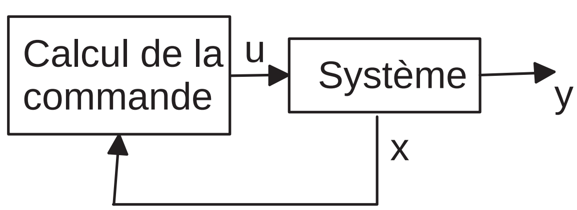


FIG. 4.1 – *Structure de la commande dans le cas où l'état est mesurable*

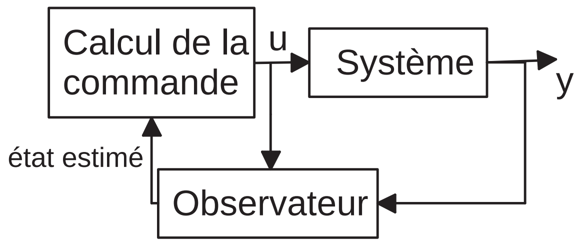


Fig. 4.2 – *Reconstruction de l'état*

4.2 Observabilité

4.2.1 Définition

On considère un système dont on connaît une représentation d'état ($[A, B, C, D]$). Ce système est dit observable s'il est possible de déterminer son état à un instant t_0 donné à partir d'une observation de sa sortie. Le but est de déterminer dans un premier temps une condition nécessaire et suffisante d'observabilité d'un système.

L'évolution de l'état du système est régi par une équation différentielle matricielle du type :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Be(t)$$

La sortie est donnée par :

$$s(t) = Cx(t) + De(t)$$

D'après la définition donnée ci-dessus de la notion d'observabilité, on peut se placer en régime libre, c'est-à-dire à $e = 0$. Dans ce cas, l'état vaut $x(t) = e^{At}x(0)$ et la sortie $s(t) = Ce^{At}x(0)$. Par conséquent, connaître s c'est connaître $x(0)$ à la condition (nécessaire et suffisante) que Ce^{At} soit non singulière.

Or, $Ce^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)CA^k$ et Ce^{At} est non singulière si et seulement si :

$$obs = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & ... & CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{ est de rang } n$$

Exemple : On considère le système décrit par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e \\ s(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

On trouve $Obs = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ qui est de rang 2 donc le système est observable.

4.2.2 Notion de dualité

Nous allons montrer ici que les notions d'observabilité et de commandabilité sont deux notions duales. Pour ce faire, considérons les deux systèmes (S) et (S^*) définis par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Be(t) \\ s = Cx(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = A^t x^*(t) + C^t e^*(t) \\ s^* = B^t x^*(t) \end{cases}$$

(S^*) est appelé système dual ou adjoint de (S).

On montre que (S) est commandable si et seulement si (S^*) est observable et que (S) est observable si et seulement si (S^*) est commandable.

En effet, (S^*) est observable si et seulement si $\begin{bmatrix} B^t & B^tA^t & B^t(A^t)^2 & ... & B^t(A^t)^{n-1} \end{bmatrix}^t$ est de rang n c'est-à-dire si et seulement si $\begin{bmatrix} A^{n-1}B \\ ... \\ AB \\ B \end{bmatrix}$, soit encore si et seulement si (S) est commandable.

4.3 Reconstruction de l'état d'un système

4.3.1 Synthèse d'observateur

Définition On appelle *observateur* du système un opérateur qui génère une approximation $\hat{z}$ de la variable $z = Tx$ sous la forme :

$$\dot{\hat{z}} = F\hat{z} + ky + Ju$$

où u est la commande et y la sortie.

- Si z et x ont même dimension, l'observateur est dit complet (tout l'état est estimé). On choisit $T = I$ $(z = x)$ et $\hat{z} = \hat{x}$.
- Si $dim(z) < dim(x)$ (par exemple : $dim(z) = dim(x) - dim(y)$), alors l'observateur est dit d'ordre réduit.

Remarques :

1. Un observateur doit être stable.
2. Un observateur doit assurer la convergence de $\hat{z}$ vers z (estimation sans biais).

– Dans le cas déterministe, la convergence s'écrit :

$$\lim_{t\to+\infty}[\hat{z}(t) - z(t)] = 0 \quad \forall u, \forall x(t_0)$$

– Dans le cas stochastique, on impose par exemple une convergence en valeur moyenne :

$$\lim_{t\to+\infty} E[\hat{z}(t) - z(t)] = 0 \quad \forall u, \forall x(t_0)$$

On note $\epsilon(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ l'erreur de reconstruction.

4.3.2 Observateur identité

L'observateur identité est un observateur sans biais ($\hat{z}(t) \to z$ si $t \to +\infty$) où $z = x$. Les équations du couple (système, observateur) sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Ky + Ju \\ \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Exprimons l'erreur d'estimation ϵ :

$$\dot{\epsilon} = \dot{z} - \dot{\hat{z}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu) - (F\hat{x} + Ky + Ju)$$

$$\dot{\epsilon} = (Ax + Bu) - (F\hat{x} + KCx + Ju) = (A - KC)x + (B - J)u - F\hat{x}$$

Or, $\epsilon = x - \hat{x}$, d'où :

$$\dot{\epsilon} = (A - KC - F)x + (B - J)u + F\epsilon$$

On veut une estimation sans biais, c'est-à-dire $\dot{\epsilon} = 0 \ \forall x, \forall u$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} A - KC - F = 0 \\ B = J \\ F \text{ stable} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = A - KC \\ J = B \\ (A - KC) \text{ stable} \end{cases}$$

Et par conséquent :

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Ky + Bu$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Posons $\hat{y} = C\hat{x}$, il vient :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K\hat{y}$$

La figure 4.3 illustre la structure de l'observateur mise en évidence par cette dernière expression. L'observateur est constitué de deux parties :

1. Un simulateur du système réel caractérisé par les matrices (A, B, C), ayant comme entrées u et y et comme sortie $\hat{y}$.
2. Un correcteur réalisant une contre-réaction fonction de l'écart entre la sortie y et son estimée $\hat{y}$. Ce correcteur permet d'assurer la convergence de l'estimation de l'état $\hat{x}$ vers l'état x. K est appelé le gain de l'observateur. Il y a convergence si ϵ converge vers 0, c'est-à-dire si F est stable, soit encore si $(A - KC)$ est stable.

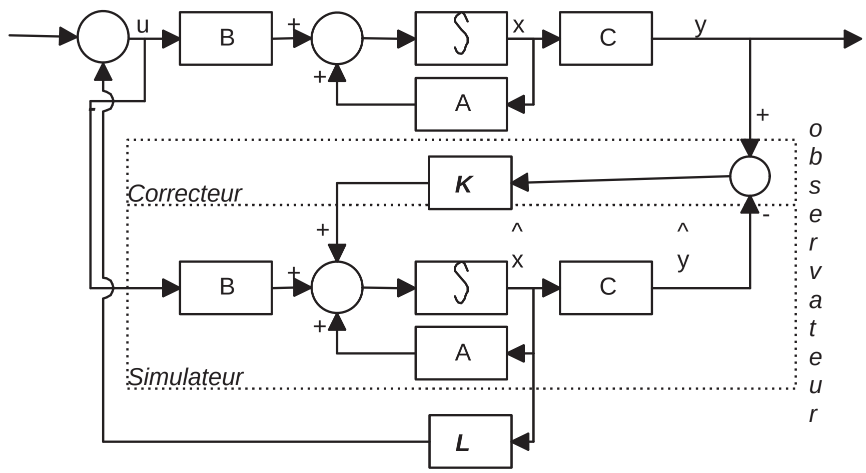


FIG. 4.3 – *Structure de la commande avec synthèse d'un observateur*

4.3.3 Synthèse des observateurs identité par approche modale

Comme vu précédemment, le problème de la synthèse d'un observateur consiste à déterminer un gain K tel que la matrice $(A - KC)$ soit stable.

La solution examinée ici est d'imposer des valeurs propres stables pré-choisies à la matrice $(A - KC)$.

Le problème devient donc un problème de placement de pôles. En effet, les matrices $(A-KC)$ et $(A - KC)^t$ ont les mêmes valeurs propres. Il s'agit donc d'imposer des valeurs propres à la matrice $(A^t - C^tK^t)$.

Considérons maintenant le système dual fictif (S^*) défini par :

$$(S^*)\ \dot{p} = A^t p + C^t q$$

où p est la vecteur d'état et q la commande.

Le problème revient donc à déterminer une commande $q = -K^t p$ tel que les valeurs propres du système bouclé soient en des positions pré-fixées. C'est donc bien un problème de commande modale du système dual (S^*).

On retrouve ici la dualité vue précédemment entre les notions de commandabilité et d'observabilité.

4.4 Mise en évidence du correcteur

Nous montrons ici que la synthèse d'un observateur s'apparente à une correction classique (correction série et contre-réaction unitaire sur la sortie).

Considérons le système défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array} \right.$$

et son correcteur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = (A - KC)\,\hat{x} + Ky + Bu \\ u = -Lx \end{array} \right.$$

Sous forme fréquentielle, ces équations s'écrivent :

$$(pI - A)X = BU \text{ et } Y = CX$$

Ce qui donne :

$$Y = C(pI - A)^{-1}BU$$

Or, $U = -L\,\hat{X}$ et

$$p\,\hat{X} = (A - KC)\,\hat{X} + KY - BL\,\hat{X}$$

On obtient donc une fonction de transfert pour le correcteur valant :

$$U = -L[pI - A + BL + KC]^{-1}KY$$

La figure 4.4 représente la structure de la correction. On reconnaît bien une structure d'asservissement classique.

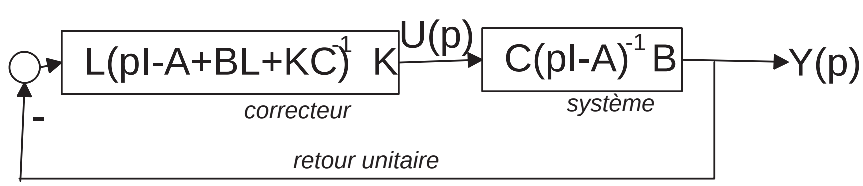


Fig. 4.4 – *Structure d'asservissement classique*

Chapitre 5

Bilan sur la commande par retour d'état avec synthèse d'observateur

Mise en oeuvre de la commande

La mise en oeuvre d'une commande dans le cas des systèmes continus suppose l'hypothèse d'un système commandable et observable lorsque toutes les variables d'état ne sont pas accessibles à la mesure. On écarte donc les parties non commandables ou non observables du système. Le problème de la commande se résoud ensuite en trois grandes étapes :

1. Recherche de la commande en supposant x mesurable. La commande linéaire est de la forme $u = -Lx$, L étant déterminée par exemple en imposant des pôles à la boucle fermée.
2. Reconstruction de l'état. Si seul y est mesurable, il faut synthétiser un observateur, ce qui revient à déterminer un gain K assurant la stabilité de l'observateur et une estimation sans biais.
3. La commande du système est finalement réalisée à partir de l'état estimé.

Deux questions se posent alors : celle de la détermination du retour d'état L et celle de l'intérêt de la méthode (la méthode conduit-elle à un système bouclé performant ?)

5.1 Structure de la commande

La commande s'écrit $u = -L \hat{x}$ et l'estimation de l'état s'écrit $\hat{x} = x - \epsilon$ où ϵ désigne l'erreur d'estimation. On a donc :

$$u = -Lx + L\epsilon$$

Avec l'observation, la dimension du système bouclé est deux fois plus grande que celle du système d'origine. Examinons l'état augmenté défini par la concaténation des états relatifs au système (d'origine) et au simulateur :

$$\begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

Les équations du système bouclé prennent la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-BL) & BL \\ 0 & (A-KC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ -L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La matrice d'état du système bouclé vaut donc :

$$\begin{bmatrix} (A-BL) & BL \\ 0 & (A-KC) \end{bmatrix}$$

où $(A-BL)$ est la commande dans l'hypothèse d'un état accessible et où $(A-KC)$ est la matrice observateur.

Les valeurs propres du système bouclé sont les valeurs propres de $(A-BL)$, c'est-à-dire celles relatives à la commande du système plus les valeurs propres de $(A-KC)$, c'est-à-dire celles de l'observateur.

En conclusion, la substitution de x par $\hat{x}$ ne modifie pas les valeurs propres obtenues lors du calcul de la commande : juste, les valeurs propres de l'observateur s'ajoutent à celles déjà imposées. La stabilité du système bouclé n'est donc pas affectée par la présence de l'observateur si celui-ci est sans biais (c'est-à-dire tel que $(A-KC)$ soit stable).

Pour que le comportement du système bouclé ne soit pas modifié de façon notable par la présence de l'observateur, il suffit que la reconstruction de l'état soit rapide devant la dynamique du système bouclé (pôles de $(A-KC)$ de grand module devant ceux de $(A-BL)$).

5.2 Comportement dynamique du système bouclé

Comparons les comportements obtenus lorsque la commande est réalisée directement à partir de l'état et lorsque celle est réalisée en utilisant un observateur.

- *Commande réalisée à partir de l'état.*
  Les équations du système bouclé sont :

  $$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -Lx + u_0 \end{array} \right.$$

  Dans le domaine de Laplace, cela s'écrit :

  $$X(p) = (pI - A + BL)^{-1}BU_0 + (pI - A + BL)^{-1}x_0$$

$(pI - A + BL)^{-1}B$ est la matrice de transfert entre la consigne et l'état pour des consignes initiales nulles ; $(pI - A + BL)^{-1}x_0$ détermine l'évolution du système en régime libre (u0=0). Les pôles de chaque fonction de transfert sont les valeurs propres de $(A - BL)$.

– *Commande réalisée en utilisant un observateur.*
Les équations du système bouclé sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Ky - KC\hat{x} \\ u = -L\hat{x} + u_0 \end{cases}$$

D'où :

$$\dot{x} = Ax + B(-L\hat{x} + u_0) = (A - BL)x + BL\epsilon + Bu_0$$

et

$$\dot{\epsilon} = (A - KC)\epsilon$$

Dans le domaine de Laplace, cela s'écrit :

$$pX(p) - x_0 = (A - BL)X(p) + BL\epsilon + BU_0$$

et

$$p\epsilon - \epsilon_0 = (A - KC)\epsilon$$

Ce qui donne :

$$X(p) = (pI - A + BL)^{-1}BU_0 + (pI - A + BL)^{-1}x_0 + (pI - A + BL)^{-1}BL(pI - A + KC)^{-1}\epsilon_0$$

Pour des conditions initiales nulles ($\epsilon_0 = 0$ et $x_0 = 0$), ou lorsque le régime libre est atteint, la fonction de transfert obtenue est équivalente à celle obtenue directement à partir de l'état. Les commandes sont donc équivalentes. Cela équivaut à $y - \hat{y} = 0$: l'observateur est excité par u uniquement ; le système est parfaitement simulé.

Chapitre 6

Travaux dirigés

6.1 Travaux dirigés $n^o 1$: rappels de calcul matriciel

1. calculer le produit AB pour :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

   Calculer le déterminant de A. A est-elle inversible ? Pourquoi ?

2. Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Que vaut le produit CAB ?

3. Soit $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$. Déterminer :
   - le polynôme caractéristique de A
   - les valeurs propres de A
   - des vecteurs propres et les sous-espaces propres de A
   - le rang de A
   - A est-elle diagonalisable ?
   - En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, calculer e^{At}
   - Quelle est la transformée de Laplace de e^{At} ?

6.2 Travaux dirigés $n^o 2$: représentation d'état d'un système

6.2.1 Ecriture à partir des équations d'évolution du système

On considère le moteur à courant continu de la figure 6.1. $C_m(t)$ est le couple électromagnétique. $C_n(t)$ est le couple de perturbation. $f\omega$ est le couple de frottement visqueux et $r\theta$ est le couple de rappel.

1. On choisit $[\ i \quad \omega \quad \theta\ ]^t$ comme vecteur d'état. Justifier ce choix. La sortie observée y est la position θ. C_n sera considéré comme une entrée supplémentaire. Exprimer les équations d'état du système.
2. Déterminer la matrice de transfert $M(p)$ définie par $M(p) = C(pI - A)^{-1}B$ et déterminer les transferts $G(p)$ et $G_n(p)$ tels que $\theta(p) = G(p)U(p) + G_n(p)C_n(p)$.

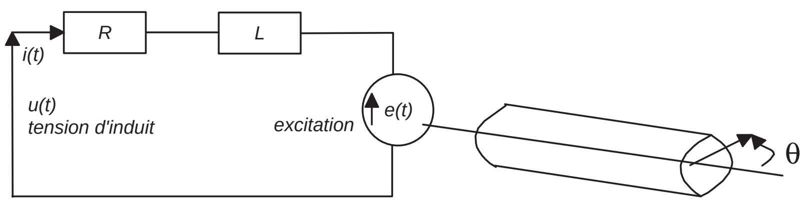


FIG. 6.1 – *Moteur à courant continu*

On donne les équations électriques et mécaniques du système :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + e(t) \\ J\frac{d\omega}{dt} = C_m - f\omega - r\theta - C_n \\ e(t) = k_m\omega \\ C_m(t) = k_m i(t) \end{cases}$$

6.2.2 Ecriture à partir des fonctions de transfert

1. On considère le système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}\ (t) + 3\ \dot{y}\ (t) + 2y(t) = e(t)$$

   où y et e sont deux signaux causaux. Les conditions initiales sont nulles $y(0) = \dot{y}\ (0) = 0$. Déterminer la fonction de transfert du système et ses pôles.
2. Décomposer le système en une mise en série de systèmes intégrateurs purs. En déduire la représentation d'état canonique pour la commande. On choisit comme variables d'état les sorties des systèmes élémentaires.
3. Décomposer le système en une mise en parallèle de systèmes d'ordre 1. En déduire une représentation d'état sous forme modale. On choisit comme variables d'état les sorties des systèmes élémentaires.

4. Décomposer le système en une mise en série de systèmes d'ordre 1. En déduire une représentation d'état sous forme cascade. On choisit comme variables d'état les sorties des systèmes élémentaires.
5. Quelles sont les valeurs propres des matrices d'état obtenues.
6. Reprendre les questions 2,3 et 4 pour les systèmes de fonction de transfert :

$$H_1(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2}$$

$$H_2(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$$

6.3 Travaux dirigés n^o3 : commande par retour d'état et placement de pôles

6.3.1 Exemple 1

On considère le système causal défini par l'équation différentielle suivante :

$$\dddot{y}\,(t) + 3\,\ddot{y}\,(t) + 2\,\dot{y}\,(t) + y(t) = u(t)$$

On suppose les conditions initiales nulles. On désire réaliser une commande par retour d'état de ce système en imposant à la boucle fermée les pôles suivants : -1,-2 et -2

1. Quelle représentation d'état est la plus intéressante pour le problème ? La construire. Donner le schéma bloc lui correspondant.
2. Calculer la commande par retour d'état satisfaisant la contrainte modale donnée ci-dessus.
3. On désire annuler l'erreur statique en réponse à un échelon. Déterminer la consigne en entrée u_0 nécessaire.
4. Déterminer la réponse indicielle du système corrigé.

6.3.2 Exemple 2

On considère le système double intégrateur régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e(t)$$

Réaliser une comande par retour d'état de la forme $u(t) = -Lx + \alpha u_0(t)$ permettant d'obtenir $(-0.2 + 0.2j)$ et $(-0.2 - 0.2j)$ comme pôles du système bouclé et d'assurer un gain statique 1 entre $y(t)$ et $u_0(t)$.

6.4 Travaux dirigés n^o4 - TP n^o3 : exemple du pendule inversé (stabilisation, synthèse d'observateur)

Ce sujet fait l'objet d'une séance préparée de travail dirigé puis d'une séance de simulation sur ordinateur visant à valider les calculs théoriques effectués.

On se propose d'étudier le problème de la stabilisation du pendule inversé. Le système consiste en un pendule inversé embarqué sur un chariot. Le système (chariot+pendule) est régi par les équations différentielles suivantes (approximées à l'ordre 1) :

$$(M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0$$

$$ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0$$

y est la position du chariot, θ l'angle de rotation du pendule par rapport à la verticale.

1. On choisit comme variables d'état : la position y du chariot, sa vitesse de déplacement $\dot{y}$, l'angle θ du pendule par rapport à la verticale et sa vitesse de rotation angulaire $\dot{\theta}$. Ecrire l'équation d'état associée au système :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

2. Quels sont les pôles du système ? Conclure quant à sa stabilité. On posera :

$$a = \sqrt{\frac{M+m}{M}\frac{g}{l}} \quad , \quad b = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad , \quad K = \frac{1}{M}$$

   et on prendra pour les applications numériques :

$$M = 0.5kg \quad , \quad m = 0.05kg \quad , \quad l = 5m \quad , \quad g = 10ms^{-2}$$

3. On cherche à réaliser une commande modale du système par un retour d'état. Afin de faciliter le calcul de la commande, on se propose d'écrire le système sous forme compagne pour la commande en opérant un changement de base.
   (a) Déterminer à partir des équations différentielles les fonctions de transfert suivantes :

$$H_1(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} \quad et \quad H_2(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

   (b) On considère une variable $q(t)$ définie par :

$$\frac{Q(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2(p^2-a^2)}$$

   et on choisit comme nouveau vecteur d'état :

$$r = [\ q \quad \dot{q} \quad \ddot{q} \quad \dddot{q}\ ]$$

   Ecrire la nouvelle représentation d'état du système. Quelle est la forme ainsi obtenue ?

   (c) Ecrire la relation matricielle qui existe entre q et x.

(d) Déterminer, dans la nouvelle base de représentation, la commande linéaire L_r permettant d'imposer les pôles suivants au système :

$$(-1-j) \quad (-1+j) \quad -5 \quad -6$$

(e) Montrer que la commande L exprimée dans le premier espace d'état se déduit de L_r par une relation du type :

$$L = L_r P^{-1}$$

Que représente P ? *

(f) Calculer L.

4. On suppose que l'état complet du système n'est pas accessible à la mesure et que seul le déplacement du chariot est connu (1 seul capteur). On décide alors de reconstruire l'état du système à partir de cette seule mesure.
   (a) Montrer que le système est observable.
   (b) Représenter le couple (système+observateur) sous forme d'un schéma bloc.
   (c) Calculer le gain K de l'observateur permettant d'assurer une dynamique de l'observateur 5 fois plus grande que celle du système. Justifier ce choix.
5. Montrer que le correcteur constitué du retour d'état et de l'observateur est équivalent au correcteur dynamique :

$$C(p) = L(pI - A + BK + LC)^{-1}K$$

6. On montre que le correcteur ainsi obtenu n'est pas stable, ce qui signifie qu'il n'est pas possible de stabiliser le pendule en utilisant un seul capteur de position. Ce point nécessite des calculs complexes qui seront effectués à l'aide de Matlab en séance de TP.

6.5 Travaux dirigés n^o5 : exemple des cuves en cascade (commande des systèmes perturbés)

Cet exemple est issu du cours polycopié d'automatique de G. Duc, Supélec, 1988.

Ce sujet est intégralement résolu comme illustration pendant le cours.

On se propose d'étudier le probème de la commande d'un système composé de quatre cuves en cascade (voir figure 6.2).

Au point nominal de fonctionnement (H_0, Q_0), les équations du système s'écrivent :

$$\begin{cases} S\frac{dh_1}{dt} = q_1 - kh_1 \\ S\frac{dh_2}{dt} = kh_1 - kh_2 \\ S\frac{dh_3}{dt} = q_2 - kh_2 - kh_3 \\ S\frac{dh_2}{dt} = kh_3 - kh_4 \end{cases}$$

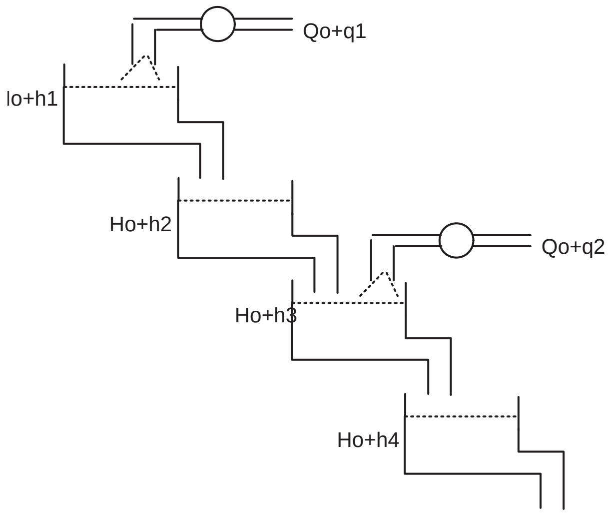


FIG. 6.2 – *Quatre cuves en cascade alimentées par des électro-vannes*

On donne

$$a = \frac{k}{S} = 0.25(USI) \qquad b = \frac{1}{S} = 1.5(USI)$$

1. On choisit $\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h4 \end{bmatrix}$ comme vecteur d'état. La commande est $u = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$. Ecrire les équations d'état du système.

2. Quels sont les pôles du système ? Le système est-il stable ? Quelle est sa dynamique (constante de temps relative à chaque cuve) ?

3. On désire imposer une valeur propre quadruple au système $-c < -a$. Quelle va être la conséquence sur la dynamique du système ? Déterminer le retour d'état L permettant d'imposer $(-c)$ comme pôle quadruple (indication : pour alléger les calculs, utiliser la symétrie). Application numérique pour $c = 0.5$ et $c = 1$.

4. La pluie est considérée comme une perturbation extérieure au système. On modélise l'influence du débit q_s dû à la pluie par :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + \begin{bmatrix} b \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix} q_s$$

On note

$$F = \begin{bmatrix} b \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = 1.5(USI)$$

On cherche à réguler les hauteurs des cuves 2 et 4, c'est-à-dire à les rendre insensible au débit q_s.

(a) Montrer qu'il est impossible de rendre tout l'état insensible à q_s.

(b) La commande sécrit maintenant : $u = -Lx - L_s q_s$. Chercher L_s telle que $y = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_4 \end{bmatrix}$ soit indépendante de q_s. (Indication : considérer l'état augmenté $\begin{bmatrix} x \\ q_s \end{bmatrix}$ et écrire les nouvelles équations du système augmenté).

6.6 Travaux dirigés $n^o 6$: analyse et commande d'un système discret

1. On considère le système discret de transmittance :

$$F(z) = \frac{z+1}{z^3 + 6z^2 + 8z}$$

Donner sa représentation d'état sous la forme :

(a) Canonique pour la commande. Donner le scéma bloc correspondant (décomposition du système sous forme de cellules de retard élémentaires).

(b) Parallèle (décomposition en éléments simples).

(c) Série (mise en série de systèmes élémentaires).

Indication : conseillé de traiter d'abord le cas sans numérateur puis de déduire le résultat avec numérateur.

2. On considère le système continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0^2 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

(a) Le système continu est-il commandable ? observable ?

(b) Déterminer la fonction de transfert $F(p)$ du système continu.

(c) On discrétise le système en utilisan un bloqueur d'ordre 0 (voir figure 6.3). Déterminer la transmittance $G(z)$ du système discret.

(d) Donner sa représentation sous forme compagne

(e) Le système discret est-il observable ? commandable ?

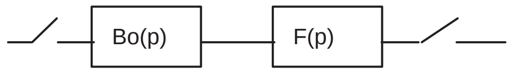


Fig. 6.3 – ? ? ?

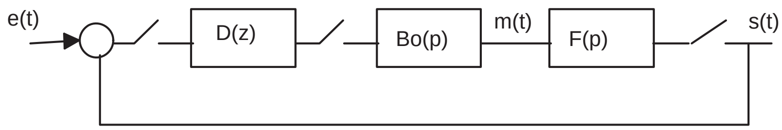


Fig. 6.4 – ? ? ?

3. On considère le système asservi de la figure 6.4. Le système continu a pour fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

La commande est réalisée par un calculateur ; l'élément de commande est donc discret. Il est noté $D(z)$:

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

D'autre part, on utilise un échantillonneur bloqueur d'ordre 0.

On consid'ere comme vecteur d'état le vecteur formé de chacune des sorties des éléments du système asservi. On note x ce veteur.

On suppose la dynamique des échantillonneurs très grande devant celle des systèmes dynamiques. On se place entre deux instants d'échantillonnage t_n et t_{n+1} :

(a) Entre t_n et $t_n^+ < t_{n+1}$, l'échantillonnage a lieu. Ecrire l'équation matricielle entre $x(t_n^+)$, $x(t_n)$ et $e(t_n)$.

(b) Entre t_n^+ et $t_n^{++} < t_{n+1}$, le calculateur termine son cycle. Ecrire l'équation matricielle entre $x(t_n^{++})$, $x(t_n^+)$ et $e(t_n^+)$.

(c) Entre t_n^{++} et t_{n+1}, le syst'eme commandé réagit. Ecrire l'équation matricielle entre $x(t_{n+1})$, $x(t_n^{++})$ et $e(t_n^{++})$.

(d) En déduire l'équation d'état du système : $x(t_{n+1})$ en fonction de $x(t_n)$ et de de $e(t_n)$.

Chapitre 7

Travaux pratiques

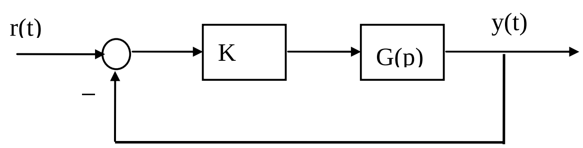
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTEMES LINEAIRES
Séances 1 et 2

Nota : Les fonctions de matlab sont données dans une autre police.

1. Analyse de la stabilité d'un système

Considérons le système

$$G(p) = \frac{(p+1)}{(p-1)(\frac{p}{3}-1)}$$



Ce système est-t'il stable ?

Définir la fonction de transfert G(p) du système sous matlab

```
num= [1 1];
den=conv([-1 1],[-1/3 1]);
```

puis appliquer la commande tf2ss. Expliquer.

1.1 Cas K = 1

Calcul des pôles du système (racines du dénominateur)

```
roots(den)
```

Proposer une autre méthode pour trouver les pôles du système grâce à la commande eig.

Tracé du diagramme de bode de G(p) (les échelles sont choisies automatiquement).

```
bode(num,den);
```

Tracé du diagramme de Nyquist de G(p) (les échelles sont choisies automatiquement).

```
nyquist(num,den);
```

Critère de Nyquist ***Le système sera stable en boucle fermé si le diagramme de Nyquist entoure autant de fois le point -1 qu'il ya de pôles instables dans le système en boucle ouverte.***

Le système en boucle fermée est-il stable ?

Vérification : Formons la boucle fermée par la fonction cloop

```
[numbf1,denbf1]=cloop(K*num,den,-1);
```

Calcul des pôles du système en boucle fermée (racines du dénominateur)

```
roots(denbf)
```

1.2 Cas K = 10

```
K = 10;
```

Tracé du diagramme de bode de K.G(p), les échelles sont choisies automatiquement.

```
bode(K*num,den);
```

Tracé du diagramme de Nyquist de G(p), les échelles sont choisies automatiquement.

```
nyquist(K*num,den);
```

Quel est le; nombre d'encerclement du point -1. Le système en boucle fermée est-il stable ?

Vérification : Formons la boucle fermée par la fonction cloop

```
[numbf1,denbf1]=cloop(K*num,den,-1);
```

Calcul des pôles du système en boucle fermée (racines du dénominateur)

```
roots(denbf)
```

Vérification sur la réponse indicielle

```
step(numbf,denbf);
```

1.3 Valeur limite de K assurant la stabilité

Le système est stable pour K = 10 et instable pour K =1.

Répéter la fonction suivante pour K allant de 1 à 1.5 par pas de 0.1.

```
nyquist(K*num,den);
```

Conclusion quelle est la valeur limite de K assurant la stabilité du système bouclé ?
Quels sont alors les pôles du système en boucle fermée ?

2. Synthèse de Correcteurs

2.1 synthèse d'un correcteur a avance de phase

Un correcteur à avance de phase permet d'augmenter la marge de phase du système au voisinage de la bande passante. Sa fonction de transfert s'écrit sous la forme

$$C(p) = K\frac{(1+\mathrm{T.p})}{(1+\mathrm{a.T.P})} \qquad avec \quad a < 1$$

Considérons le système

$$G(p) = \frac{10}{(5p+1)(0.13p+1)}$$

```
num=10;
den=conv([5 1],[.13 1]);
```

Le gain statique du système vaut G(0) = 10. Vérification :

```
dcgain(num,den)
```

On désire une erreur statique en boucle fermée de 1%

$$0.01 = \frac{11}{1+C((0).G(0)} = \frac{1}{1+10.K}$$

d'où K = 10.

```
K=10
```

On désire un temps de réponse en boucle fermée de 0.2 seconde. Une formule empirique permet de relier la pulsation de coupure ω_c au temps de réponse t_r.

$$t_r.\ \omega_c = \pi$$

Donc la pulsation de coupure est égale à 15 rd/s

```
wc = 15;
```

Détermination de la marge de gain et de phase à la pulsation de coupure.

```
bode(K*num,den);
```

```
margin(K*num,den);
```

La marge de phase du système à cette pulsation est de 28°.

On désire un dépassement sur la réponse indicielle de mois de 20%. Ceci entraîne une marge de phase de 45°. Le correcteur doit donc apporter une marge de phase de 17°

```
a =(1-sin(17/180*pi))/(1+sin(17/180*pi));

T = 1/(sqrt(a)*wc);
```

Calculons la fonction de transfert du correcteur :

```
numcor=K*[T 1]
dencor=[a*T 1]
```

Tracer le diagramme de bode du correcteur

```
bode(numcor,dencor);
```

Formons la boucle ouverte C(p).G(p), soit en multipliant numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux. Soit en utilisant la fonction series

```
[numbo,denbo]=series(numcor,dencor,num,den);
```

Tracé du diagramme de la boucle ouverte

```
bode(numbo,denbo);
```

Vérifier la marge de phase et la bande passante. Remarques

```
margin(numbo,denbo);
```

Fonction de transfert de la boucle fermée');

```
[numbf,denbf]=cloop(numbo,denbo,-1);
```

Tracer maintenant la réponse indicielle du système

```
step(numbf,denbf);
```

Est ce que le cahier des charges est réalisé.

2.2 synthèse d'un correcteur Proportionnel Integral (PI)

Considérons le système d'ordre 2 suivant :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)(0.05p+1)}$$

On désire synthétiser un correcteur annulant l'erreur statique. Le système n'étant pas intégrateur, le correcteur doit l'être. On choisit donc le correcteur proportionnel intégral.

$$C(p) = K\frac{(1+T_i p)}{T_i p}$$

On choisit le correcteur le plus simplement possible en décidant de compenser le pôle (-1) du système. Donc :

```
Ti  = 1;
K  = 1;
```

Calculons la fonction de transfert du correcteur

```
numcor=K*[Ti 1]
dencor=[Ti  0]
```

Tracer le diagramme de bode du correcteur

```
bode(numcor,dencor);
```

Formons la boucle ouverte C(p).G(p).

```
[numbo,denbo]=series(numcor,dencor,num,den);
```

Tracé du diagramme de la boucle ouverte

```
bode(numbo,denbo);
```

Vérifier la marge de phase et la bande passante. Remarques

```
margin(numbo,denbo);
```

Fonction de transfert de la boucle fermée');

```
[numbf,denbf]=cloop(numbo,denbo,-1);
```

Tracer maintenant la réponse indicielle du système

```
step(numbf,denbf);
```

Est ce que le cahier des charges est réalisé ?.

Calculons la réponse du système à une rampe. L'erreur pour un échelon étant nulle, elle doit être constante pour une rampe.

```
u = 0:.1:10;
[y,x]=lsim(numbf,denbf,u,u);
plot(u,y);
```

2.3 synthèse d'un correcteur Proportionnel Intégral Dérivée (PID)

Considérons le système d'ordre 3 suivant :

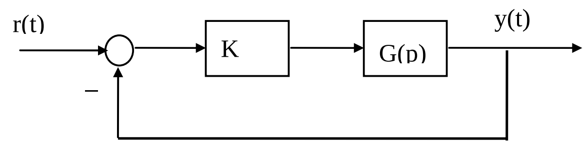
$$G(p) = \frac{1}{(0.1p+1)(0.2p+1)(0.4p+1)}$$

```
num=1;
den=conv([.1 1],conv([.2 1],[.4 1]));
```

On désire synthétiser un correcteur annulant l'erreur statique et assurant une bonne précision. Le système n'étant pas intégrateur, le correcteur doit l'être. On choisit donc le correcteur proportionnel intégral.dérivée

$$C(p) = K\left[1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right]$$

2.2.1 Réglage des paramètres par la méthode de Ziegler-Nichols



On augmente le gain K de la figure ci-dessus de manière à rendre le système oscillant (limite de stabilité). Soit K_u cette valeur limite de K et P_u la période des oscillations observée. On peut donc choisir comme paramètres du régulateur :

```
K= 0.6*Ku
Ti=0.5*Pu
Td = 1/8*Pu
```

2.2.1 Réglage empirique des paramètres

Dans une première étape, on réduit le régulateur à l'action proportionnelle K seule (T_i infini et T_d nul). On augmente K de façon à avoir un dépassement de 20% sur la réponse indicielle en boucle fermée. On diminue alors Ti de façon à avoir aussi un dépassement de 20% avec une erreur statique nulle. Finalement on augmente T_d pour avoir le dépassement désiré.

Pour ce système des valeurs possibles sont :

```
K  = 1.2;
Ti  = 0.4;
Td = 0.13;
```

3 Simulation Temporelle en utilisant simulink.

Les systèmes en boucle fermée ont été réalisés pour chacune des études précédentes. Ces fichiers peuvent être complétés si on le désire.

sta_*sim.m* *étude de la stabilité du système par observation de la réponse indicielle pour différentes valeurs du gain*

av_sim.m *étude du système corrigé par correcteur à avance de phase. Observation de la réponse à différents signaux*

pi_sim.m *étude du système corrigé par correcteur à PI. Observation de la réponse à différents signaux d'entrée et de perturbation*

pid_sim.m *étude du système corrigé par correcteur à PID. Observation de la réponse à différents signaux d'entrée et de perturbation*

REPRESENTATION D'ETAT - COMMANDE TEMPORELLE
Séance 2

Considérons le système

$$G(p) = \frac{(1+2p)}{p^3 + 7p^2 - 8p}$$

I. Etude en boucle ouverte

1. Quels sont les pôles du système ?
2. Le système est-t-il stable en boucle ouverte ?
3. Le système est-il stable en boucle fermée (rétro-action unitaire négative) ?
4. Donner les matrices A, B, C et D de la représentation d'état du système en boucle ouverte

II. Commande par placement de pôles

5. Le système est-il commandable ?
6. Déterminer le retour d'état L permettant de placer les pôles de la boucle fermée en [-10 ; $-5(1+\sqrt{3}\,j)$; $-5(1-\sqrt{3}\,j)$]
7. Déterminer la fonction de transfert du système en boucle fermée.
8. Déterminer le temps de réponse du système en boucle fermée. Expliquez.
9. Déterminer la marge de phase du système en boucle fermée. Expliquez.
10. Déterminer la marge de gain du système en boucle fermée. Expliquer.
11. Déterminer l'erreur statique en réponse à un échelon.
12. Déterminer l'erreur statique en réponse à une rampe.

III. Commande intégrale

13. Déterminer une commande intégrale permettant d'annuler l'erreur statique du système en réponse à un échelon.
14. Déterminer le temps de réponse du système en boucle fermée. Expliquez.
15. Déterminer la marge de phase du système en boucle fermée. Expliquez.
16. Déterminer la marge de gain du système en boucle fermée. Expliquer.
17. Déterminer l'erreur statique en réponse à une rampe.

IV. Synthèse d'observateur

18. Le système est-il observable ?
19. Déterminer le gain K de l'observateur permettant d'assurer une estimation correcte de l'état du système sans en perturber le fonctionnement.
20. Déterminer la fonction de tranfert de l'estimateur
21. Déterminer le temps de réponse du couple (système+ observateur) en boucle ouverte. Expliquez.
22. Déterminer le temps de réponse du couple (système+ observateur) en boucle fermée. Expliquez.
23. Déterminer la marge de phase du système en boucle fermée. Expliquez.
24. Déterminer la marge de gain du système en boucle fermée. Expliquer.
25. Déterminer l'erreur statique en réponse à un échelon.
26. Déterminer l'erreur statique en réponse à une rampe.

Chapitre 8

Annales d'examens

Matrise EEA - Formation Initiale - Formation Continue
Université Paris XII - Val de Marne

Examen de Représentation d'Etat
19 mai 2004

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé

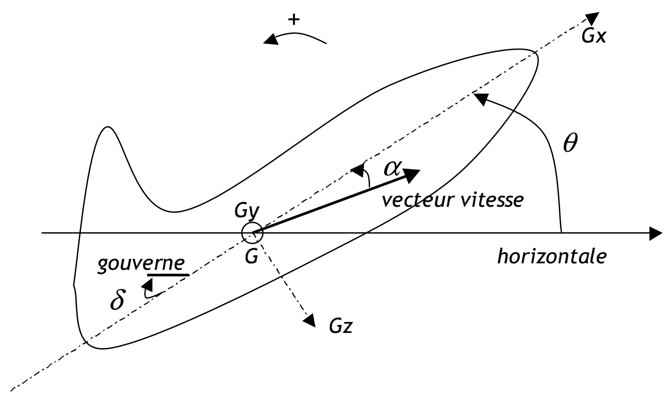


Figure 1: Etude du mouvement de tangage d'un avion.

Le modèle de tangage d'un avion dans le plan vertical est décrit par les équations suivantes :

$$\frac{d\alpha}{dt} - q = -2\alpha - 0.05\cos\theta - 10\delta \quad (1)$$

$$\frac{dq}{dt} = -11\alpha - 7q - 100\delta \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = q \quad (3)$$

$\alpha(t)$ est l'angle d'incidence, $\theta(t)$ est l'assiette, $q(t)$ est la vitesse de rotation autour de l'axe Gy, $\delta(t)$ est l'angle de braquage de la gouverne.

A. Modélisation autour du régime permanent

1. Déterminer les valeurs α_0,δ_0 et q_0 des différentes grandeurs pour le régime permanent correspondant à une position horizontale de l'avion, c'est-à-dire $\theta_0 = 0$.

2. On pose $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, $\theta = \theta_0 + \theta_1$, $\delta = \delta_0 + \delta_1$ et $q = q_0 + q_1$.

   En faisant l'approximation $\cos\theta = \cos\theta_0$, déterminer les équations différentielles linéaires satisfaites par α_1, δ_1, θ_1 et q_1.

3. En supposant toutes les condtions initiales nulles, montrer que la transmittance $H_1(p) = \frac{\theta_1(p)}{\delta_1(p)}$ vaut :

$$H_1(p) = \frac{\theta_1(p)}{\delta_1(p)} = \frac{-10(10p+9)}{p(p^2+9p+25)}$$

B. Etude du système en boucle ouverte

On reprend le système précédent de fonction de transfert $H_1(p)$. L'éntrée du système est l'angle de braquage de la gouverne δ_1. la sortie est l'assiette θ_1.

1. Construire la représentation d'état du système sous forme compagne pour la commande (équation d'état et équation de sortie). On notera x le vecteur d'état. On précisera bien comment le vecteur x est défini.

2. Quels sont les pôles du système ?

3. Le système est-il stable en boucle ouverte ?

4. Le système est-il commandable ?

C. Commande du système dans l'espace d'état

1. Déterminer, **dans la forme compagne pour la commande précédemment déterminée**, le retour d'état L permettant d'imposer les pôles -5, $\frac{-9+j\sqrt{19}}{2}$ et $\frac{-9-j\sqrt{19}}{2}$ à la boucle fermée.

2. Disposer les pôles imposés sur le cercle unité et commenter ce choix de pôles.

3. Exprimer la commande calculée (que l'on nontera u) en fonction de δ_1, de θ_1 etd e ses dérivées.

4. Déterminer la fonction de transfert $H_2(p)$ du système asservi.

5. Déterminer la valeur de la sortie du système asservi en régime statique en réponse à un échelon unitaire.

Université Paris 12 - Master 1 Option Sciences de l'Ingénieur

Automatique avancée

Contrôle final du 24 janvier 2006
(Durée 2h - Tous les documents sont interdits)

Les trois exercices sont indépendants.

1. On considère le système à une entrée, une sortie et d'ordre n associé à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Be \\ s = Cx \end{cases}$$

   (a) Quelles sont les dimensions des matrices A, B et C ?

   (b) Quel nom donne-t-on à la matrice A ?

   (c) Que représentent les valeurs propres de la matrice A ?

   (d) Que doit satisfaire A pour que le système soit stable ?

   (e) Donner l'expression de la fonction de transfert du système en fonction de A, B et C.

   (f) Donner la condition portant sur A et B pour que le système soit commandable.

   (g) Ecrire l'expression générale de la commande par retour d'état et donner une représentation schématique du coupe système + retour d'état.

   (h) Donner la condition portant sur A et C pour que le système soit observable.

   (i) Rappeler les équations de l'observateur identité.

   (j) Faire une représentation schématique de l'ensemble système + retour d'état + observateur.

2. Soit le système décrit par le schéma de la figure 1.

   On prend comme vecteur d'état, le vecteur X suivant:

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

   (a) Ecrire la représentation d'état de ce système.

   (b) Etudier la commandabilité et l'observabilité en utilisant les matrices de commandabilité et d'observabilité.

   (c) A partir du schéma fonctionnel de la figure 1, déterminer la fonction de transfert du système.

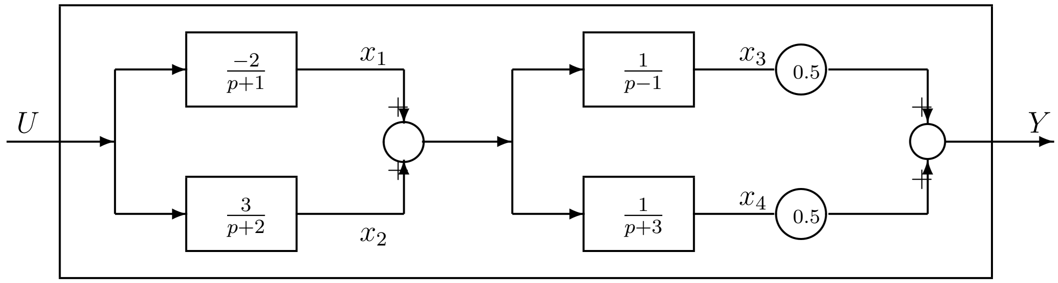


Figure 1: Schéma fonctionnel du système

(d) En effectuant un changement de variables d'état, déterminer la représentation d'état du système sous forme modale.

(e) Etudier la commandabilité et l'observabilité dans cette nouvelle représentation d'état.

(f) Donner le schéma fonctionnel correspondant à la forme modale (décomposition parallèle) et analyser la commandabilité et l'observabilité sur le schéma.

3. On considère le système ayant pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

(a) Donner la représentation d'état du système sous forme compagne pour la commande. On notera x le vecteur d'état associé à cette représentation.

(b) Donner le schéma fonctionnel correspondant à cette représentation.

(c) Déterminer le retour d'état L nécessaire pour imposer -2 et -5 comme pôles du système bouclé.

(d) Déterminer la fonction de transfert du système bouclé.

Université Paris 12 - Master 1 Sciences de l'Ingénieur

AUTOMATIQUE AVANCEE

Examen du 29 juin 2006
Durée 2h

Documents et calculatrices sont interdits
Il est demandé de bien justifier les réponses

EXERCICE I

On considère le système de fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2}$

1. Construire la représentation d'état du système sous forme compagne pour la commande (mise en série d'intégrateurs purs). On notera x le vecteur d'état.
2. Donner la représentation schématique associée à la forme compagne en faisant clairement apparaître les variables d'état.
3. On décide d'améliorer la dynamique du système à l'aide d'une commande par retour d'état de la forme $u(t) = -Kx(t) + u_0$ où u désigne la commande, x l'état et u_0 la consigne en entrée. Expliquer par un shéma en quoi consiste la commande par retour d'état.
4. Donner les équations du système en boucle fermée
5. Déterminer K pour que les pôles de la boucle fermée soient $-1 + j$ et $-1 - j$.
6. Déterminer u_0 permettant d'obtenir une valeur statique en sortie unitaire en réponse à un échelon unitaire.
7. Que vaut alors la fonction de tranfert du système commandé ?

EXERCICE II

On considère le système décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e \\ \\ s = \begin{bmatrix} 25 & \frac{-500}{19} & \frac{25}{19} \end{bmatrix} x \end{cases}$$

e est l'entrée, s est la sortie, x est le vecteur d'état.

1. Quel est le nom de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$?
2. Quel est l'ordre du système ?
3. Quels sont les pôles du système ?
4. Le système est-il stable en boucle ouverte ? Pourquoi ?
5. Le système est-il commandable ? Pourquoi ?
6. Nommer la forme de la représentation d'état ci-dessus.
7. Montrer que la fonction de transfert du système vaut

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{500}{p^3 + 21p^2 + 20p}$$

8. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par les variables s et e. On notera $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$... les dérivées successives de $s(t)$.
9. Faire le shéma bloc correspondant à la représentation compagne pour la commande (le système est mis sous forme d'une série d'intégrateurs purs).
10. Donner la représentation d'état du système sous forme compagne pour la commande. Dans cette représentation le vecteur d'état sera noté q.
11. Donner la relation qui existe entre q et s.

Université Paris 12 - Master 1 Sciences de l'Ingénieur

AUTOMATIQUE AVANCEE

Examen du 21 juin 2007
Durée 2h

Documents et calculatrices sont interdits
Il est demandé de bien justifier les réponses

EXERCICE I
Soit le système décrit par le shéma de la figure 1.

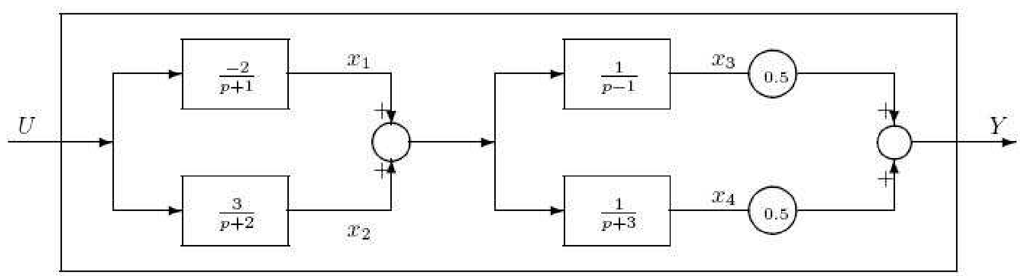


Figure 1: Shéma fonctionnel du système.

On prend comme vecteur d'état le vecteur $x = [x_1 x_2 x_3 x_4]^t$

1. Ecrire la représentation d'état de ce système.
2. Ecrire les matrices de commandabilité et d'observabilité. Calculer les rangs de ces matrices. Conclure sur la commandabilité et l'observabilité du système.
3. A partir de la représentation d'état ci-dessus, déterminer la fonction de transfert du sysème. Quel est l'ordre du système ? Conclure.

EXERCICE II

On considère le système ayant pour fonction de transfert:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{p+3}{p(p+1)(p+2)}$$

1. Donner la représentation d'état du système sous forme compagne pour la commande. On notera x le vecteur d'état. On précisera bien ce que vaut x.

2. Dessiner le shéma fonctionnel correspondant à cette représentation.

3. Déterminer le retour d'état L nécessaire pour imposer les valeurs -2, -5 et -10 comme pôles du système bouclé.

4. Déterminer la fonction de transfert du système bouclé.

EXERCICE III

1. Rappeler le rôle de l'observateur dans la commande des systèmes.

2. Rappeler les équations de l'observateur identité.

3. Donner la représentation shématique de l'ensemble [sysème + retour d'état + observateur identité].

Université Paris 12 **Examen du 10 janvier 2008** **Master 1 SDIA**

Automatique avancée

Durée 3h.
Tous les documents sont interdits.
Le problème se divise en trois parties indépendantes.

On se propose d'aborder le problème du contrôle du pointage d'un satellite en orbite autour de la terre. C'est un problème courant dans le domaine spatial. Une représentation shématique du satellite est donnée en figure 1.

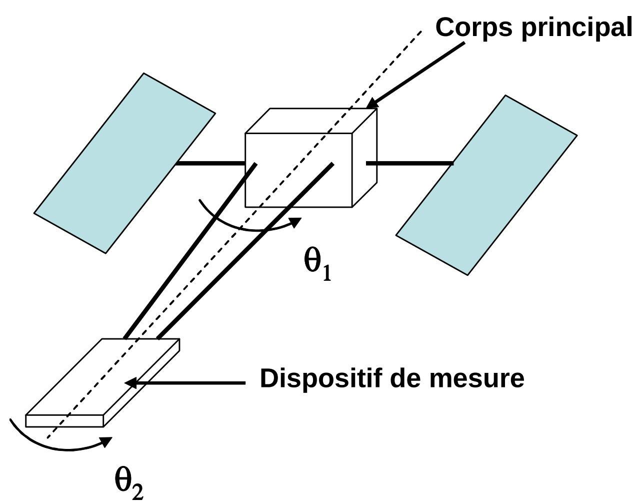


Figure 1: Pointage d'un satellite.

Partie I : modélisation du système (4 points)

La liaison flexible est constituée d'une inertie J_1 (corps principal), d'une inertie J_2 (dispositif de mesure) reliées par un ressort incluant une raideur K_r et un frottement visqueux B_r : voir figure 2.

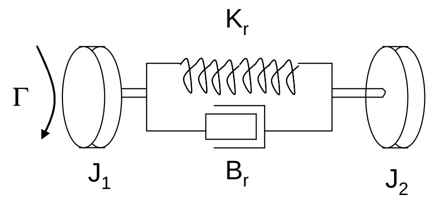


Figure 2: Représentation de la liaison flexible.

On note $\Omega_1 = \dot{\theta}_1$ et $\Omega_2 = \dot{\theta}_2$ les vitesses angulaires du corps principal et du dispositif de mesure. Γ est le couple de commande exercé par le système de propulsion. On note Γ_r le couple auquel est soumis le ressort. Les valeurs des paramètres sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} J_1 & = & 1\,Kg\,m^2 \\ J_2 & = & 0.1\,Kg\,m^2 \\ B_r & = & 3.6\,10^{-3}\,N\,m\,s\,rad^{-1} \\ K_r & = & 9.1\,10^{-2}\,N\,m\,rad^{-1} \end{array} \right.$$

1. On considère que l'inertie J_1 est isolée mécaniquement et l'on rappelle la seconde loi de Newton :
$$J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = \Gamma - \Gamma_r$$
Compléter le shéma bloc suivant représentant ce sous-système :

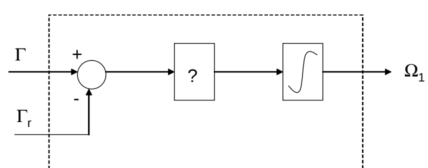


Figure 3:

2. On considère que le ressort est isolé mécaniquement et que l'effort Γ_r est lié aux positions angulaires θ_1 et θ_2 et aux vitesses angulaires $\Omega_1 = \dot{\theta}_1$ et $\Omega_2 = \dot{\theta}_2$ par l'équation
$$\Gamma_r = K_r(\theta_1 - \theta_2) + B_r(\Omega_1 - \Omega_2)$$
Compléter le shéma bloc suivant représentant ce sous-système :

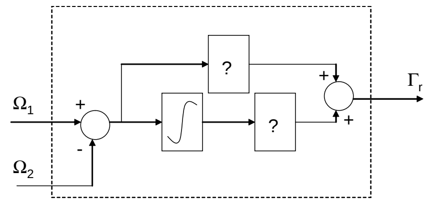


Figure 4:

3. Enfin, l'inertie J_2 étant supposée isolée mécaniquement, on a

$$J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = \Gamma_r$$

Donner le shéma bloc représentant ce sous-système.

4. L'entrée du système est $u = \Gamma$ et la sortie est $y = \theta_2$. Déduire des questions précédentes la fonction de transfert du système

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

On notera $a_1 = \frac{K_r}{J_1}$, $a_2 = \frac{K_r}{J_2}$, $b_1 = \frac{B_r}{J_1}$, $b_2 = \frac{B_r}{J_2}$, $c = \frac{1}{J_1}$.

Partie II : Représentation d'état du système (8 points)

1. Déduire des équations différentielles du système une représentation d'état du système en considérant l'état

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

2. Calculer les produits $a_1 b_2$ et $a_2 b_1$ et montrer que $a_1 b_2 = b_2 a_1$.

3. Quels sont les pôles du système ? Le système est-il stable ? Le système est-il asymptotiquement stable ?

4. A partir de cette représentation d'état du système, calculer la réponse du système en régime libre ($u = 0$) pour la condition initiale suivante :

$$x(t=0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Représenter la forme de la réponse du système à une entrée en échelon. Commenter les rôles de chaque pôle. Décrire le comportement dynamique et statique du système.

6. A partir de cette représentation d'état, retrouver l'expression de la fonction de transfert déjà calculée dans la partie I.

7. Le système est-il commandable ?

Partie III : Commande par placement de pôles (8 points)

On fournit, pour la résolution de cette partie, la fonction de transfert du système déjà calculée dans la partie I. Elle vaut :

$$H(p) = \frac{c(b_2 p + a_2)}{p^2(p^2 + p(b_1 + b_2) + a_1 + a_2)}$$

1. Donner la représentation d'état du système sous forme compagne pour la commande. On notera $\widetilde{x}$ le vecteur d'état dans cette représentation. On précisera ce que vaut $\widetilde{x}$ en fonction de y (remarque : attention au numérateur).

2. Exprimer $\widetilde{x}$ en fonction de x.

3. Pour éviter le phénomème de résonance, on propose d'imposer de nouveaux pôles au système en effectuant un retour d'état linéaire. La commande s'écrit alors $u = e - Lx = e - \tilde{L}\tilde{x}$. Exprimer L en fonction de $\tilde{L}$.

4. On choisit d'imposer au système commandé les pôles $-0,02+j$, $-0,02-j$, $-10+30j$ et $-10-30j$. Commenter ce choix.

5. Déterminer $\tilde{L}$ permettant d'imposer ces pôles au système bouclé.

6. En déduire L et l'expression de la commande en fonction de θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

7. Seuls les angles θ_1, θ_2 sont accessibles à la mesure. Expliquer (par un schéma) comment il est possible d'estimer les grandeurs $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ utiles au calcul de la commande. A quelle condition cette stratégie est-elle réalisable ?

Université Paris 12 - Master 1 SDIA

AUTOMATIQUE AVANCEE

Examen du 3 juillet 2008
Durée 2h

Documents et calculatrices sont interdits
Il est demandé de bien justifier les réponses

EXERCICE I

On considère le système décrit par le shéma de la figure 1.

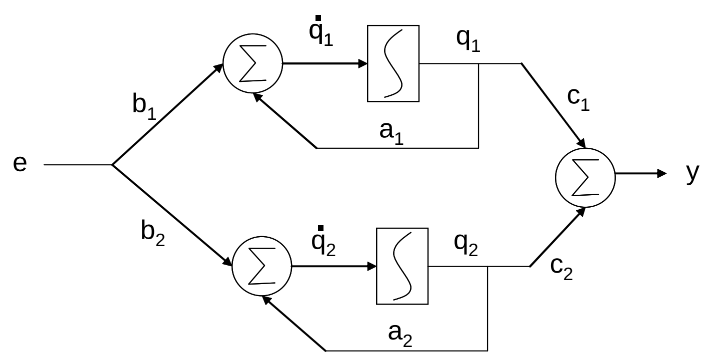


Figure 1: Shéma fonctionnel du système.

En choisissant q_1 et q_2 comme variables d'état le vecteur,

1. Ecrire la représentation d'état de ce système.
2. Donner l'expression de sa fonction de transfert
3. A quelle(s) condition(s) le système est-il stable ?
4. A quelle(s) condition(s) le système est-il commandable ?
5. A quelle(s) condition(s) le système est-il observable ?

Bibliographie

Sur l'automatique avancée
L. Jaulin. *Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes.* Hermès, Lavoisier.

Problèmes d'automatique avec solutions
E. Boilot, ouvrage collectif. *Asservissements et régulations continus (analyse et synthèse)*. Ed. Technip.

Sur l'algèbre matricielle
S. Mammar, *Éléments d'algèbre matricielle*, url : http ://lsc.univ-evry.fr/ smam/

Fonctions matlab utiles
S. Mammar, *Quelques fonctions matlab*, `http://lsc.univ-evry.fr/~smam/fmatlab_ts31.html`

Le site de Wikipédia, très bien conçu et très clair (avec quelques références d'ouvrages en anglais)
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Représentation_d'état`