CHAPITRE 1
LE MODELE DE KIRCHHOFF

Gustav Kirchhoff (1824-1887) fut un étudiant de Gauss. Il enseigna à Berlin, à Breslau, puis devint professeur de physique à Heidelberg, où il collabora avec Bunsen. Il étendit les travaux d'Ohm et contribua de façon magistrale à la théorie des circuits, en 1854, grâce aux *lois de Kirchhoff*, qui permirent de calculer les courants, tensions, et résistances de circuits électriques. Il travailla également sur le rayonnement du corps noir et la spectroscopie. Il termina sa carrière, fortement handicapé, comme titulaire de la chaire de physique mathématique à Berlin.

1.1 Introduction

L'équation de Dirac, fondement de la mécanique quantique relativiste (et extension de l'équation de Shroëdinger au cas relativiste), peut en principe servir à définir le comportement d'objets macroscopiques à faible vitesse (comme la chute d'une pomme). En pratique, heureusement, le simple modèle de Newton, qui régit la mécanique dite *rationnelle*, convient dans bon nombre de cas, tant que la taille des objets reste largement supérieure à celle des atomes dont ils sont constitués et pour autant que leur vitesse reste faible par rapport à celle de la lumière. Les éléments du modèle sont alors des points matériels (voire des solides indéformables) caractérisés par une masse et sur lesquels agissent des forces concentrées. Le modèle rend compte du mouvement des éléments en fonction des forces qui leur sont appliquées.

De même les équations de Maxwell, décrivant l'interaction entre charges électriques élémentaires, pourraient en théorie servir à décrire les mouvements de courants électriques macroscopiques. Dans de nombreux cas, heureusement, on utilise plutôt un modèle simplifié : le *modèle de Kirchhoff*, qui régit ce que l'on pourrait appeler une « *électricité rationnelle* ». Un *circuit* (ou réseau de Kirchhoff) est alors défini comme un assemblage d'*éléments concentrés*. Ces éléments sont connectés à des *sources* (de tension ou de courant). Le modèle de Kirchhoff rend compte de l'évolution temporelle des courants et tensions dans le circuit en fonction des sources qui lui sont appliquées.

1.2 Les éléments du modèle

Les éléments de ce modèle sont essentiellement de deux types : des *dipôles* et des *quadripôles*[1].

Les dipôles élémentaires sont caractérisés par une relation entre la tension *u(t)* (différence de potentiel) entre leurs bornes et le courant *i(t)* qui les traverse (voir Fig 1.1). Cette relation, appelée *caractéristique courant-tension*, peut être *statique* comme dans le cas d'une résistance pure, ou *dynamique, comme* dans le cas d'une inductance pure où la tension à ses bornes dépend du taux de variation du courant la traversant. La caractéristique peut encore être *linéaire*, comme souvent pour la résistance, ou *non-linéaire* comme dans le cas typique de la diode.

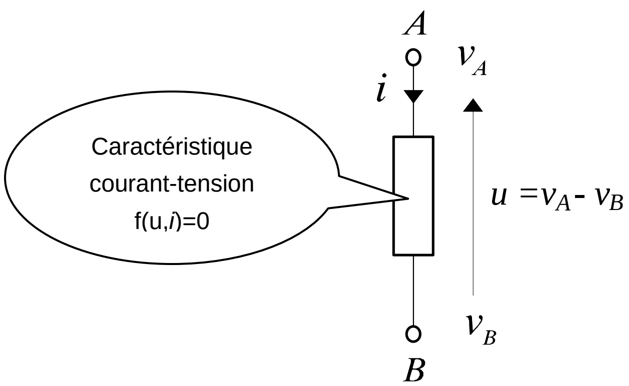


Fig 1.1 Un dipôle et ses grandeurs électriques[2]

Les quadripôles sont des éléments à quatre extrémités, caractérisés par deux relations entre les tensions et les courants à leurs accès[3] (voir Fig 1.2)

---

[1] En toute rigueur, on peut généraliser au cas des multipôles, dont le nombre d'extrémités est quelconque. Voir (Boite et Neyrinck, 1996) pour plus de détails.

[2] Comme nous le verrons plus loi, la relation entre *u* et *i* ne sera en général pas une simple fonction, comme semble le faire croire la notation « f(u,i) », mais bien un *opérateur* liant *u(t)* à *i(t)*. Cet opérateur pourra par exemple faire intervenir la dérivée des grandeurs *u* et *i*.

[3] Nous ne considérerons ici que les quadripôles dont les bornes 1 et 1' sont associées (au sens où le courant entrant en 1 est égal au courant sortant en 1'), ainsi que les bornes 2 et 2'. Ce type de quadripôle est aussi appelé *biporte.* Un quadripôle est un biporte selon qu'on l'utilise comme tel (en forçant l'égalité des courants en branchant deux dipôles entre (1,1') et entre (2,2')), ou selon sa nature même (comme par exemple le transformateur que nous étudierons plus loin)

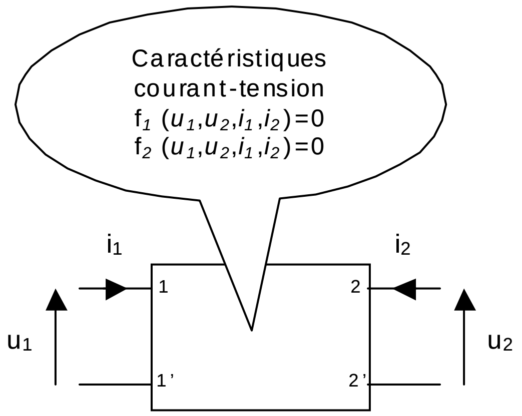


Fig 1.2 Un quadripôle et ses grandeurs électriques

Les dipôles incontournables en théorie des circuits sont la résistance, l'inductance, la capacité, et les sources (de courant et de tension). Les quadripôles élémentaires sont le transformateur et le gyrateur. Ces éléments abstraits (tout comme peut l'être un point de masse *m* en mécanique rationnelle) servent à décrire des éléments ou des circuits réels, que nous examinerons au chapitre 2.

Dans les paragraphes qui suivent, nous nous intéressons à l'expression de ces caractéristiques courant-tension pour les dipôles et quadripôles élémentaires, en les faisant systématiquement apparaître sous forme temporelle et en transformée de Laplace (voir Annexe I pour un rappel concernant cette transformée). Nous verrons en effet que cet outil permet d'exprimer les équations d'un réseau sous une forme simple.

1.2.1 La résistance

Un dipôle élémentaire dont la tension et le courant sont reliés par une relation du type :

$$\boxed{u(t)=Ri(t) \quad \text{ou} \quad U(p)=RI(p) \qquad (1.1)^4}$$

ou, de façon équivalente,

$$i(t)=Gu(t) \quad \text{ou} \quad I(p)=GU(p) \qquad (1.2)$$

est une *résistance* (Fig 1.3) de valeur *R* ou une *conductance* de valeur *G* avec les relations évidentes $R=G^{-1}$.

Fig 1.3 La résistance (a : symbole actuel ; b : symbole plus ancien)

[4] Cette relation n'est valable qu'avec les conventions prises à la Fig 1.3 pour le sens du courant et de la tension.

Si R est constante dans le temps, on parle de résistance *autonome* (ou *permanente*). Si elle ne varie pas en fonction de la valeur instantanée d'une des grandeurs tension ou courant, on la dit *linéaire*.

Une résistance autonome est caractérisée par une courbe dans le plan (i, u). La Fig 1.4.a représente le cas de la résistance linéaire caractérisée par une droite issue de l'origine. La Fig 1.4.b représente un exemple de résistance non linéaire.

Dans la suite, l'exposé sera limité aux circuits ne comportant que des résistances linéaires et autonomes. On supposera également que R est une quantité positive. Dans le cas contraire, on dira explicitement qu'il s'agit d'une *résistance négative*.

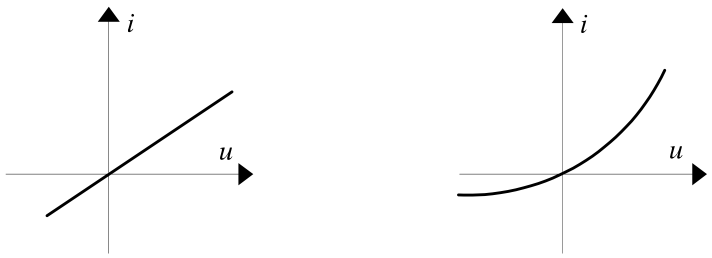


Fig 1.4 a : résistance linéaire ; b : résistance non-linéaire

1.2.2 Les sources indépendantes

On appelle *source de tension* (Fig 1.5.a) un dipôle défini par une tension entre ses bornes imposée à une valeur $u_s(t)$, indépendamment du courant $i(t)$. De même, une *source de courant* (Fig 1.5.b) est un dipôle qui impose un courant $i_s(t)$ pénétrant et sortant par ses bornes quelle que soit la tension qui lui est appliquée.

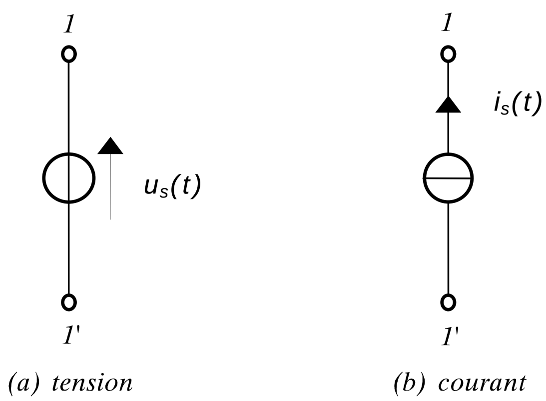
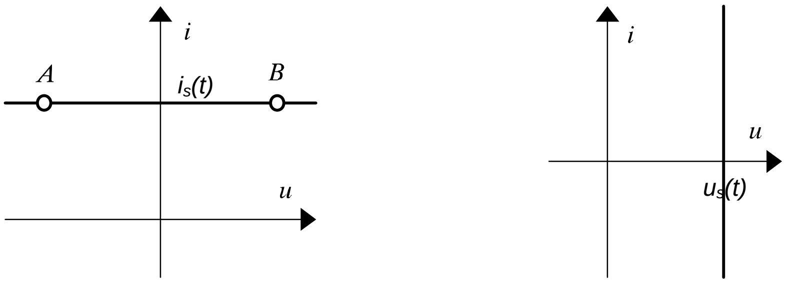


Fig 1.5 Les sources indépendantes

Dans le plan *(i,u)*, la caractéristique d'une source est représentée pour une valeur déterminée de *t* par une parallèle à l'un des axes (Fig 1.6) :

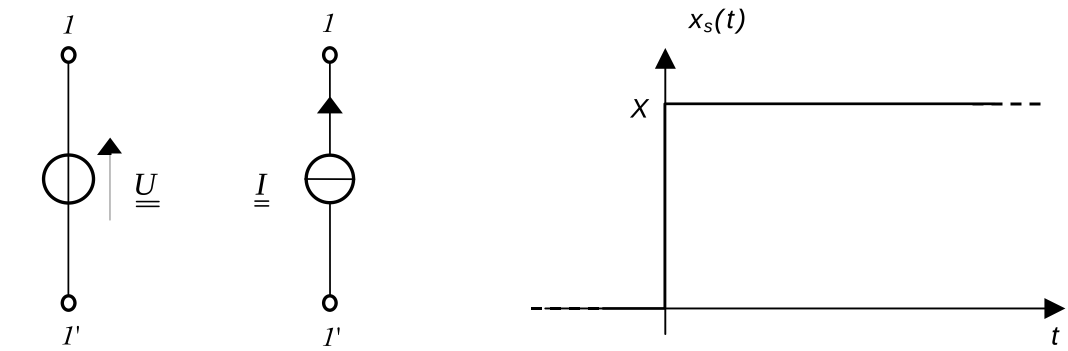


(a) Source de courant *(b) Source de tension*

Fig 1.6 Caractéristiques courant-tension des sources indépendantes

Il convient de noter qu'en électronique analogique, la plupart du temps les sources produisent des tensions ou courants variables dans le temps (autrement dit, les sources de tension et de courant sont le plus souvent *non autonomes*) : ils peuvent être sinusoïdaux, périodiques ou même apériodiques ou aléatoires. Nous utiliserons ici les notations suivantes (où *x* est mis indifféremment pour *u* ou *i*):

Sources continues (Fig 1.7)



(a) tension *(b) courant* *(c) évolution temporelle*

Fig 1.7 Source constante

La caractéristique courant/tension d'une source continue est :

$$x(t) = X\,\varepsilon(t) \quad \text{ou} \quad X(p) = \frac{X}{p} \qquad (1.3)$$

où $\varepsilon(t)$ est la *fonction échelon*, nulle pour *t* négatif, et valant 1 pour $t \geq 0$. Ceci permet de modéliser le *branchement* d'une source en $t=0$.

Il existe également deux cas particuliers importants: le *court-circuit* (Fig 1.8.a) est une source de tension nulle et le *circuit ouvert* (Fig 1.8.b) est une source de courant nul[5].

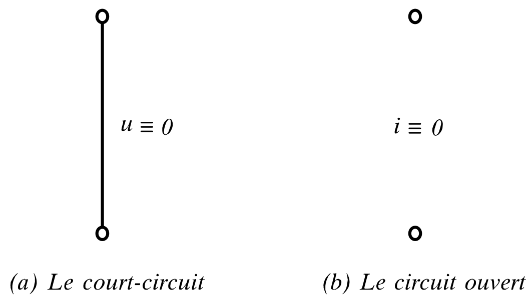


Fig 1.8 Cas particuliers

Sources cisoïdales (Fig 1.9)

Une source de tension ou de courant de forme cosinusoïdale ou sinusoïdale de *valeur efficace X*, de *pulsation* ω (ou de période $T=2\pi/\omega$), et de *phase* ϕ sera modélisée par une source de tension ou de courant complexe (1.4). Ceci conduira évidemment à des tensions et courants complexes dans le circuit, et il suffira de se souvenir, après analyse, de ne considérer que leur partie réelle (si la source est cosinusoïdale) ou imaginaire (si elle est sinusoïdale).

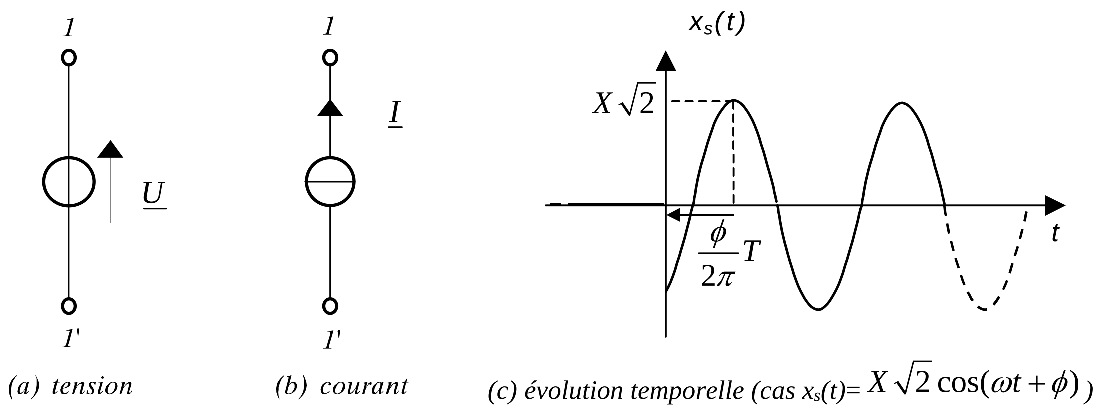


Fig 1.9 Source cisoïdale

$$x(t) = X\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j(\omega t+\phi)}\,\varepsilon(t) = \underline{X}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\varepsilon(t) \quad \text{ou} \quad X(p) = \frac{X\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\phi}}{p-j\omega} = \frac{\underline{X}}{p-j\omega} \tag{1.4}$$

5 Il est clair qu'une résistance de valeur nulle est indiscernable d'un court-circuit et qu'une résistance de valeur infinie ne diffère en rien d'un circuit ouvert.

Sources quelconques

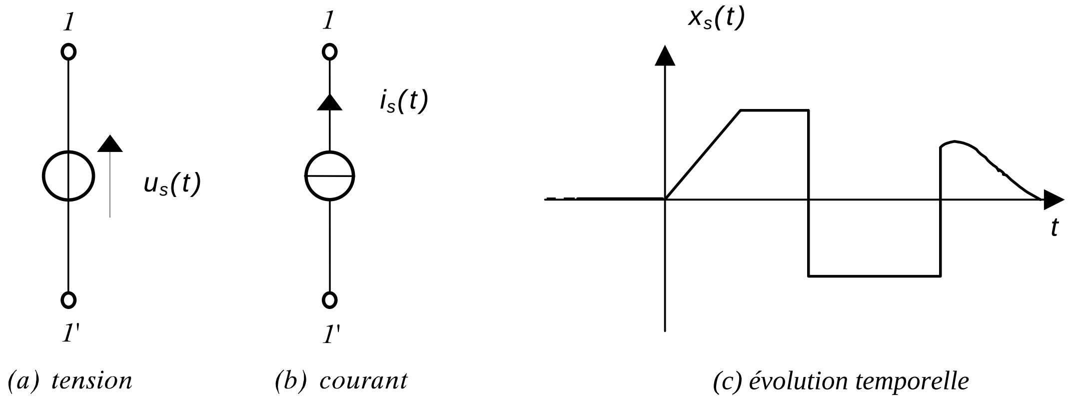


Fig 1.10 Source quelconque

$$x(t) = x_s(t) \quad \text{ou} \quad X(p) = X_s(p) \qquad (1.5)$$

où $X_s(p)$ est la transformée de Laplace de $x_s(t)$

1.2.3 Les sources dépendantes

On appelle *source dépendante* (Fig 1.11) une source de tension ou de courant qui est dépendante d'une grandeur, courant ou tension, caractérisant un autre élément du réseau. A titre d'exemple, on peut définir une source de tension dépendante $u(t) = \alpha i(t)$ où $i(t)$ est le courant circulant dans un autre dipôle du réseau.

Il est à noter que chacune des sources de la Fig 1.11 peut être commandée par une tension ou un courant, ce qui fait donc quatre types de sources dépendantes au total.

Si la relation de dépendance est linéaire, la source est dite *linéaire*.

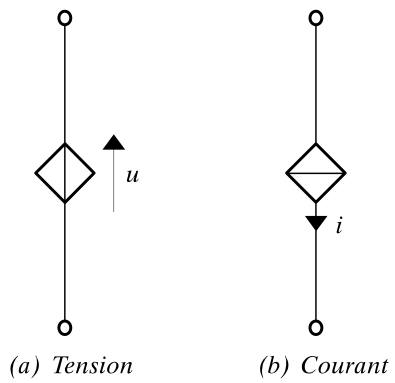


Fig 1.11 Sources dépendantes

1.2.4 La capacité

On définit la charge *q(t)* comme :

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(x).dx = q(0) + \int_{0}^{t} i(x).dx \tag{1.6}$$

ce qui revient à dire que :

$$i(t) = dq/dt \tag{1.7}$$

Un dipôle élémentaire défini par la relation :

$$q(t) = Cu(t) \tag{1.8}$$

est une *capacité* de valeur *C* (Fig 1.12).

En général *C* dépend du temps et des grandeurs *q* ou *u*. Dans le cas particulier où *C* est constant, la capacité est dite linéaire et autonome *(permanente)*.

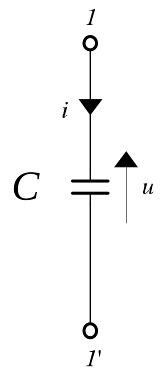


Fig 1.12 La capacité

En combinant (1.7) et (1.8), on obtient, dans le cas général

$$i(t) = (du/dt)C(t) + (dC/dt)u(t) \tag{1.9}$$

qui se réduit dans le cas autonome à :

$$i(t) = Cdu/dt \quad \text{ou} \quad I(p) = pC\,U(p) - C\,u(0_-) \tag{1.10}$$

En combinant (1.6) et (1.8) on obtient :

$$\boxed{u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(x)dx \quad \text{ou} \quad U(p) = \frac{u(0_-)}{p} + \frac{1}{pC}I(p)} \tag{1.11}$$

Dans la suite, l'exposé sera limité aux circuits ne comportant que des capacités linéaires et autonomes. Avec les conventions de signe de la Fig 1.12, on supposera, en général, que *C* est positif, c'est à dire qu'à un courant positif correspond une tension croissante.

1.2.5 L'inductance

L'intégrale de la grandeur *u(t)* est appelée le flux $\Phi(t)$. On a donc :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(x)dx = \Phi(0) + \int_{0}^{t} u(x)dx \tag{1.12}$$

et

$$u(t) = d\Phi / dt \tag{1.13}$$

Un bipôle élémentaire défini par la relation :

$$\Phi(t) = Li(t) \tag{1.14}$$

ou

$$i(t) = \frac{1}{L}\Phi(t) \tag{1.15}$$

est une *inductance* (Fig 1.13) de valeur *L*.

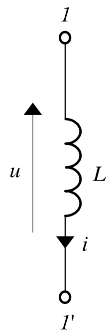


Fig 1.13 L'inductance

En général, *L* est une fonction à valeurs réelles dépendant du temps et des grandeurs caractéristiques *Φ* ou *i* du dipôle. Une inductance, telle que *L* soit une constante, est dite linéaire et autonome *(permanente)*.

En combinant (1.12) et (1.13), on obtient dans le cas général :

$$u(t) = (di/dt)L(t) + (dL/dt)i(t) \tag{1.16}$$

et si l'inductance est autonome :

$$\boxed{u(t) = Ldi/dt \quad \text{ou} \quad U(p) = pL\,I(p) - Li(0\_)} \tag{1.17}$$

En combinant (1.12) et (1.15), on obtient :

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u(x)dx \quad \text{ou} \quad I(p) = \frac{i(0\_)}{p} + \frac{1}{pL}U(p) \tag{1.18}$$

Une inductance est caractérisée par une courbe dans le plan (Φ, i). La Fig 1.14.a représente le cas d'une inductance linéaire et autonome et la Fig 1.14.b celui d'une inductance non linéaire.

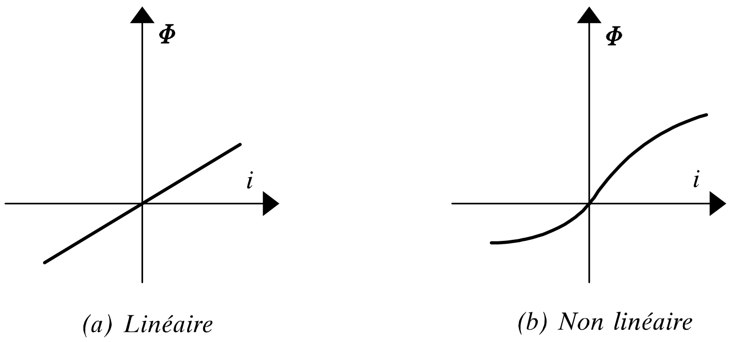


Fig 1.14 Caractéristique (Φ, i) de l'inductance

Dans la suite, l'exposé sera limité aux circuits ne comportant que des inductances linéaires et autonomes. Avec les conventions de signe de la Fig 1.13, on supposera en général que *L* est positif, c'est-à-dire qu'à un courant croissant correspond une tension positive.

1.2.6 Le transformateur (idéal)

Le quadripôle élémentaire défini par :

$$u_1(t) = nu_2(t) \quad \text{ou} \quad U_1(p) = nU_2(p) \tag{1.19}$$

$$ni_1(t) = -i_2(t) \quad \text{ou} \quad nI_1(p) = -I_2(p) \tag{1.20}$$

est appelé *transformateur (idéal)* (Fig 1.15). La grandeur *n* est réelle, positive ou négative. Si elle est positive, cela signifie simplement que u_1 et u_2 ont même signe et que i_1 et i_2 sont des signes opposés. On appelle *n* le *rapport de transformation.* Si *n* est constant, le transformateur est linéaire et autonome.

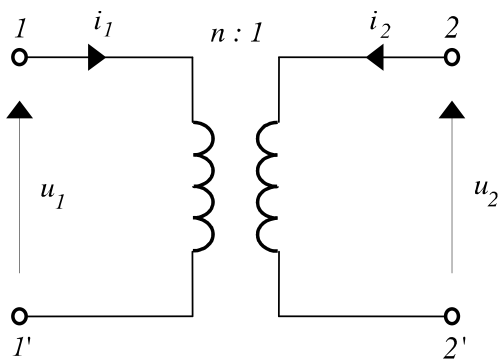


Fig 1.15 Le transformateur idéal

Notons que si l'on établit un court-circuit entre les bornes 1'et 2' d'un transformateur *(référence commune)*, on obtient un *autotransformateur* (Fig 1.16), dont les équations sont identiques à celles du transformateur.

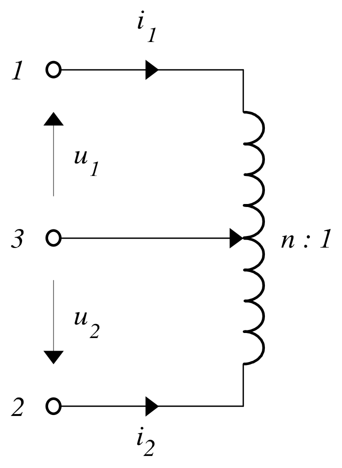


Fig 1.16 L'autotransformateur idéal (la flèche sur la borne centrale indique que l'on peut régler le rapport de transformation)

1.2.7 Le gyrateur

Le quadripôle élémentaire défini par les équations :

$u_1(t) = ri_2(t)$ ou $U_1(p) = rI_2(p)$	(1.21)
$u_2(t) = -ri_1(t)$ ou $U_2(p) = -rI_1(p)$	(1.22)

est appelé *gyrateur* (Fig 1.17). La grandeur *r*, rapport d'une tension à un courant, est la résistance de gyration et son inverse *g* est donc la conductance de gyration.

Le symbole graphique du gyrateur est représenté à la Fig 1.17. La flèche soulignant la lettre *r* est indispensable pour fixer laquelle des équations (1.21) et (1.22) est à affecter d'un signe négatif. Si *r* est une constante, le gyrateur est un élément linéaire et autonome.

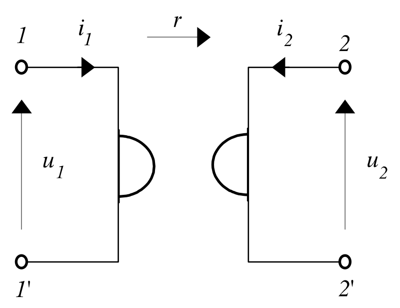


Fig 1.17 Le gyrateur idéal

1.2.8 Equivalences entre éléments

On peut légitimement se demander s'il est nécessaire, pour bâtir un circuit quelconque, de disposer de tous les éléments définis précédemment, ou si un sous-ensemble de ces éléments pourrait suffire. Les équivalences sont données ci-dessous. On les démontrera à titre d'exercice.

Il est clair, vu ses caractéristiques courant-tension, qu'un gyrateur est équivalent à deux sources de tension dépendantes (des courants aux accès opposés) ou à deux sources de courant dépendantes (des tensions aux accès opposés) (Fig 1.18).

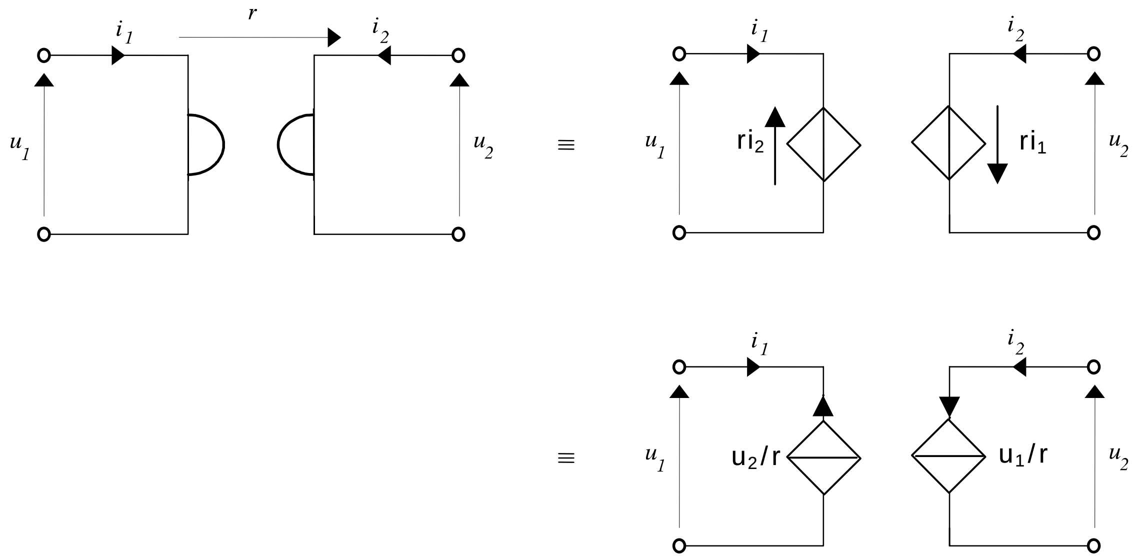


Fig 1.18 Circuits équivalents au gyrateur

De même, le transformateur idéal se réduit à deux sources dépendantes (de tension et de courant) (Fig 1.19)

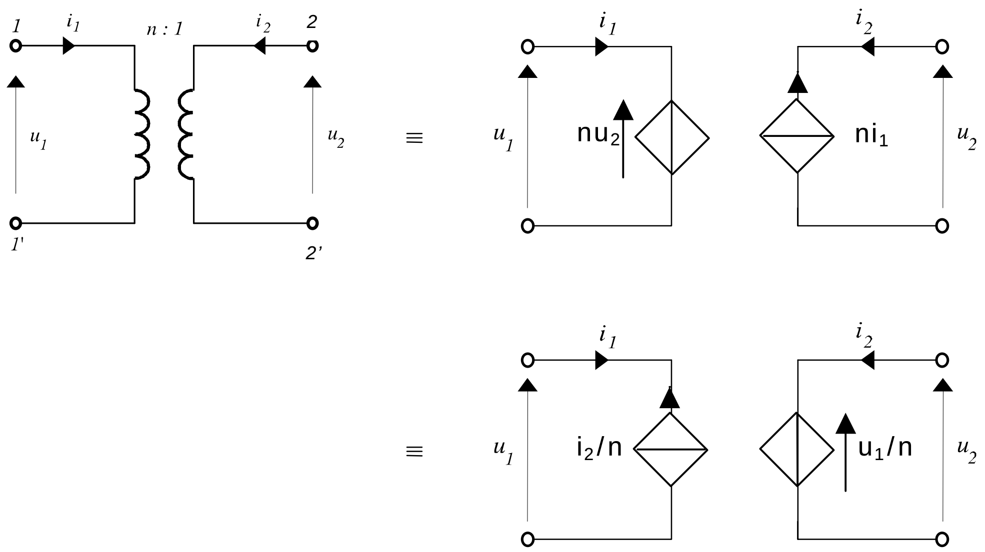


Fig 1.19 Circuits équivalents au transformateur

La Fig 1.20 montre qu'une capacité est équivalente à un gyrateur chargé par une inductance.

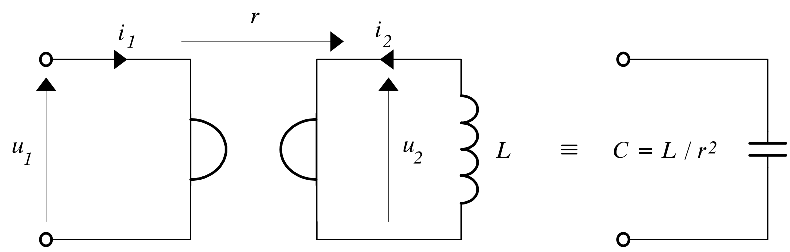


Fig 1.20 Circuit équivalent à la capacité

L'inverse est vrai : une inductance est équivalente à un gyrateur chargé par une capacité. Cette propriété du gyrateur lui donne tout son sens en pratique : on cherche toujours à éviter de construire des circuits comprenant des inductances (matérialisées par des bobinages, encombrants, et peu précis). On y parvient aisément si on accepte de les remplacer par des gyrateurs et des capacités.

De même, il est facile de montrer qu'un gyrateur chargé par une source de tension est équivalent à une source de courant (et réciproquement) (Fig 1.21).

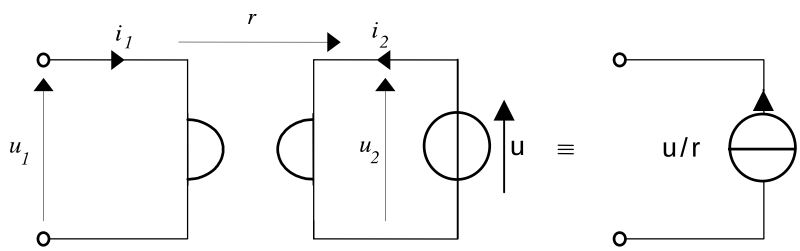


Fig 1.21 Circuit équivalent à la source de courant

La Fig 1.22 montre l'équivalence entre un transformateur et la mise en cascade de 2 gyrateurs. A titre d'exercice on démontrera l'égalité $n = r_1/r_2$.

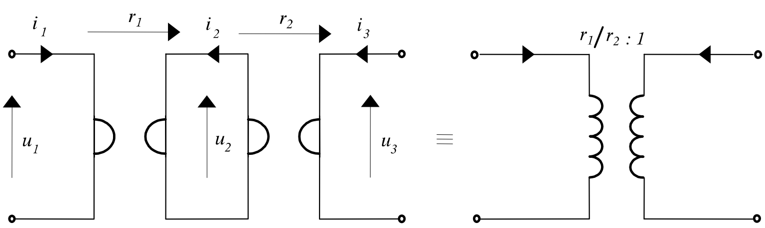


Fig 1.22 Circuit équivalent au transformateur idéal

Exemple 1.1

Montrons l'équivalence de la Fig 1.20. On a en effet :

$$\begin{cases} u_1(t) = ri_2(t) \\ u_2(t) = -ri_1(t) \\ u_2 = -Ldi_2/dt \end{cases} \tag{1.23}$$

Par élimination de i_2 et u_2 entre les trois équations, on obtient :

$$i_1(t) = (L/r^2)\frac{du_1}{dt} \tag{1.24}$$

qui définit une capacité de valeur L/r^2.

On en déduit que l'ensemble des éléments définis peut être engendré à partir de l'ensemble composé de la résistance, la source de tension, l'inductance et les sources dépendantes. Les autres éléments seront cependant utilisés pour des raisons purement pratiques.

1.2.9 Classification énergétique des éléments

La *puissance instantanée p(t)* pénétrant dans un accès est définie comme la fonction réelle du temps :

$$p(t) = u(t)i(t) \tag{1.25}$$

(où les sens conventionnels du courant et de la tension sont ceux de la Fig 1.1)

De même, on appelle *énergie absorbée* par l'accès, la fonction *w(t)* :

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx \tag{1.26}$$

Si l'énergie absorbée par l'accès d'un dipôle ou par les accès d'un quadripôle est une fonction à valeurs non négatives pour toutes les valeurs de *u* et *i*, cet élément est dit *passif*. Si l'énergie absorbée est (même parfois seulement) négative, il est dit *actif*. Si l'énergie absorbée est identiquement nulle, l'élément est dit *non énergétique.*

Exemple 1.2

La résistance, l'inductance et la capacité (supposés linéaires, autonomes, et positifs) sont des éléments passifs :

$$w_R(t) = R\int_{-\infty}^{t} i^2(x)dx \geq 0 \tag{1.27}$$

$$w_L(t) = L\int_{-\infty}^{t} i(t)\, di(t) = Li^2(t)/2 \geq 0 \tag{1.28}$$

$$w_C(t) = Cu^2(t)/2 \geq 0 \tag{1.29}$$

w_C est appelée énergie *électrostatique* et w_L énergie *magnétique*.

On remarque que, l'énergie électrostatique étant une fonction de la tension aux bornes des capacités u_C et l'énergie magnétique une fonction de courant circulant dans les inductances i_L, u_C et i_L ne peuvent varier soudainement car ces variations entraîneraient une variation brusque de l'énergie, ce qui correspond à un apport de puissance infini et est donc physiquement impossible.

Exemple 1.3

Les sources de courant ou de tension sont des éléments actifs. Une des grandeurs étant indépendante de l'autre, *w(t)* peut prendre des valeurs positives ou négatives. Ainsi dans le cas de la source de courant dont la caractéristique *(i, u)* à un instant déterminé est celle de la .a, la source débite de la puissance si le point représentatif est dans le deuxième quadrant, par exemple *A*. Par contre en *B*, la source absorbe de la puissance.

Exemple 1.4

Le transformateur et le gyrateur sont des quadripôles non énergétiques.

On obtient en effet dans chaque cas :

$$u_1(t)i_1(t)+u_2(t)i_2(t)=0 \qquad (1.30)$$

Un élément qui absorbe de la puissance et ne la restitue jamais est appelé *dissipatif*. Un élément qui peut au contraire restituer à tout instant l'énergie qu'il a absorbée est appelé *non dissipatif* ou *réactif* : il ne dissipe pas l'énergie, il l'accumule.

Exemple 1.5

La résistance est un élément dissipatif, tandis que l'inductance et la capacité sont des éléments réactifs:

$$p_R(t)=Ri^2(t) \qquad (1.31)$$

$$p_L(t)=(L/2)d\left[i^2(t)\right]/dt \qquad (1.32)$$

$$p_C(t)=(C/2)d\left[u^2(t)\right]/dt \qquad (1.33)$$

En comparant ces équations, on constate que $p_R(t)$ est une fonction non négative tandis que le signe de $p_L(t)$ et $p_C(t)$ est quelconque. Ainsi une résistance ne peut jamais qu'absorber de la puissance alors que l'inductance (et donc également la paire d'inductances couplées) ou la capacité peuvent en restituer. [6]

On en déduit une classification énergétique des éléments, représentée à la Fig 1.23.

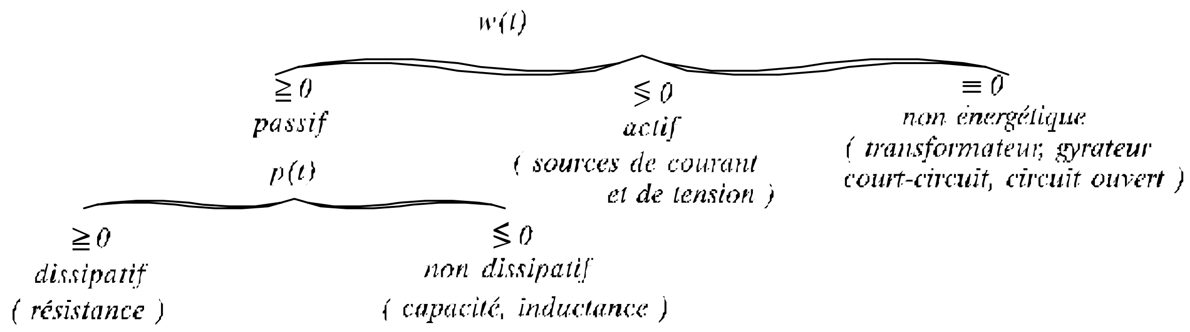


Fig 1.23 Classification des éléments

---

[6] On peut comparer l'énergie dissipée dans une résistance à celle d'un effet mécanique de frottement, alors que les énergies électrostatique et magnétiques peuvent être comparées à l'énergie potentielle et l'énergie cinétique.

1.3 Les lemmes de Kirchhoff

La *connexion* de plusieurs éléments se réalise en faisant coïncider certaines de leurs bornes, ce qui signifie que des bornes appartenant à des éléments différents ont le même potentiel.

On présente parfois un circuit sous la forme d'un *graphe*, composé de *nœuds* et de *branches.* Les branches sont des arcs orientés : leur sens est le sens (arbitrairement) choisi comme positif pour le courant qui les traverse.

Une *maille* est un chemin fermé dans un graphe, où aucun nœud n'apparaît plus d'une fois.

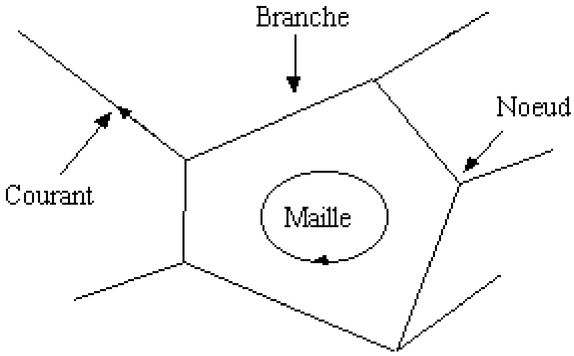


Fig 1.24 Graphe d'un réseau

Le *lemme de Kirchhoff sur les courants* s'exprime comme suit :"La somme algébrique des courants circulant dans l'ensemble des branches incidentes au même noeud est nulle."

$$\sum_{\substack{\text{branches } m \\ \text{incidentes} \\ \text{à un noeud}}} i_m(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{\substack{\text{branches } m \\ \text{incidentes} \\ \text{à un noeud}}} I_m(p) = 0 \tag{1.34}$$

Le *lemme de Kirchhoff sur les tensions* s'exprime comme suit : "La somme algébrique des tensions aux bornes des branches constituant une maille est nulle."

$$\sum_{\substack{\text{branches } m \\ \text{constituant} \\ \text{une maille}}} u_m(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{\substack{\text{branches } m \\ \text{constituant} \\ \text{une maille}}} U_m(p) = 0 \tag{1.35}$$

Ainsi, une répartition de courants et de tensions dans un réseau n'est admissible que si elle vérifie trois types de conditions :

* les caractéristiques tension-courant de chaque élément

* les lemmes sur les courant écrits pour les *n* noeuds du graphe

* les lemmes sur les tensions écrits pour les *m* mailles du graphe

Il est clair que cet ensemble d'équations est surabondant par rapport au nombre d'inconnues. Comme chaque branche comporte deux inconnues et qu'il y a autant d'équations du premier type que le nombre *b* de branches, il faut que les *b* inconnues non déterminées par ces premières équations vérifient les *n* équations du second type (*n* étant le nombre total de nœuds du circuit) et le nombre *m* d'équations du troisième type (*m* étant le nombre total de mailles).

Par ailleurs, il est tout aussi évident que les équations des deux derniers types ne sont pas linéairement indépendantes. Ainsi, les *n* lemmes sur les courants comportent dans leurs premiers membres deux fois chaque inconnue i_m : une fois avec le signe positif dans l'équation du noeud où pénètre le courant de branche; une fois avec le signe négatif dans l'équation du noeud, dont le courant sort. La somme des *n* premiers membres est donc identiquement nulle ou, en d'autres mots, *seuls n-1 des n lemmes sur les courants sont indépendants*.

De même seul un nombre limité de lemmes sur les tensions sont indépendants. Dans les premiers chapitres de ce cours, nous ne nous occuperons que de réseaux dont le graphe est dit *planaire,* c'est-à-dire tel qu'il est possible de le représenter sur un plan de telle façon que les branches n'aient d'autres points communs que des noeuds. L'ensemble des mailles définies par les fenêtres d'un graphe planaire constitue un *système de mailles indépendant*es, c'est-à-dire que les lemmes sur les tensions exprimés dans ces mailles sont indépendants[7]. En effet, toute maille du graphe est une combinaison de ces fenêtres, et aucune fenêtre ne peut être décrite comme une combinaison d'autres fenêtres. Le nombre de fenêtres dans un graphe planaire étant égal à *b-n+1,* on en déduit que *seuls b-n+1 des m lemmes sur les tensions sont indépendants.*

Il est donc clair que les *n-1* lemmes sur les courants, ajoutés aux *b-n+1* lemmes sur les tensions et aux *b* caractéristiques courant-tension, constituent autant d'équations que d'inconnues (*2b*).

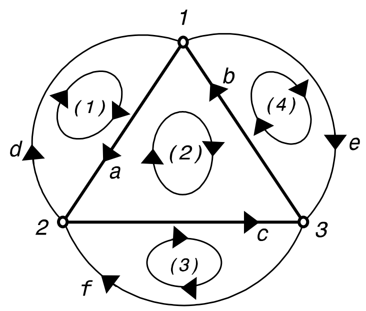


Fig 1.25 Exemple de graphe planaire

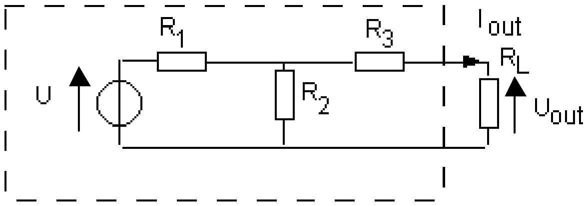
Le sujet de l'analyse des circuits linéaires est précisément le choix, parmi les équations résultant des deux lemmes de Kirchhoff, d'un ensemble optimal d'équations linéairement indépendantes qui permet de calculer les tensions et courants inconnus.

[7] C'est-à-dire qu'aucun d'entre eux ne peut être obtenu par combinaison linéaire des autres.

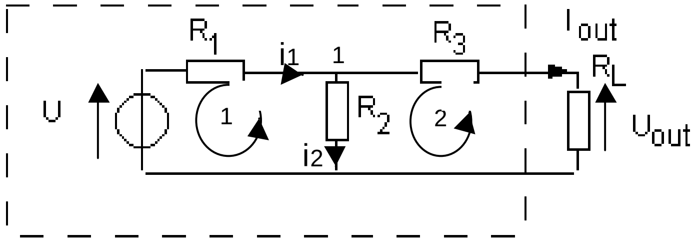
Le but de l'analyse des circuits est donc double : d'une part l'élaboration de méthodes permettant de mettre en équation correctement un réseau; d'autre part la recherche de méthodes permettant de résoudre aisément ces équations. C'est sur ce second point que l'analyse des réseaux a nécessité le plus d'efforts. La théorie des circuits a développé un formalisme qui permet d'algébriser complètement la résolution des systèmes d'équations.

Exemple 1.6

En utilisant les relations de Kirchhoff, on veut établir la caractéristique courant-tension du dipôle électrique en pointillé :



On numérote tous les nœuds sauf un, et on place les sens choisis arbitrairement positifs pour les courants dans chaque branche, puis on fait apparaître les mailles indépendantes et on leur donne un sens de parcours arbitraire :



Mise en équation :

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - U = 0$$
$$I_1 - I_2 - I_{out} = 0$$
$$R_L \cdot I_{out} + I_{out} \cdot R_3 - R_2 \cdot I_2 = 0$$

Ce qui conduit à :

$$U_{out} = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \left(R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot I_{out}$$

Notons au passage que cette relation peut se réécrire :

$$U_{out} = U_{TH} - R_{TH} \ I_{out}$$

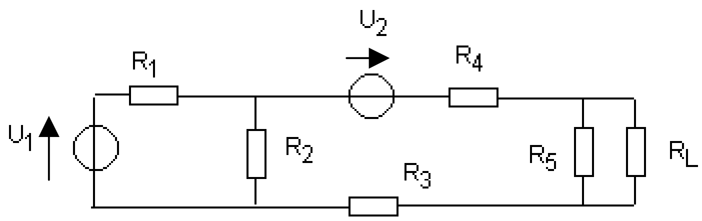
avec

$$U_{TH} = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$R_{TH} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

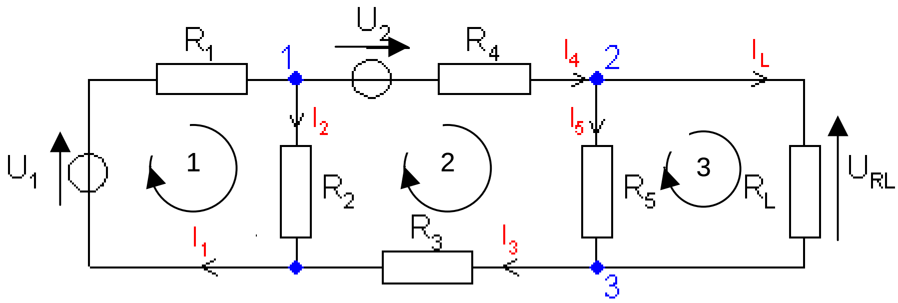
Cette dernière relation montre que le dipôle se comporte comme une source équivalente U_{TH} en série avec une résistance équivalente R_{TH}. Nous verrons plus loin l'importance de ces équivalents, appelés équivalents de Thévenin.

Exemple 1.7

On veut mettre en équation le circuit suivant, pour déterminer le courant et la tension de la charge R_L :



On numérote tous les nœuds sauf un, et on place les sens choisis arbitrairement positifs pour les courants dans chaque branche, puis on fait apparaître les mailles indépendantes et on leur donne un sens de parcours arbitraire :



Mise en équation :

$$I_1 - I_2 - I_4 = 0 \text{ (noeud 1)}$$
$$I_4 - I_5 - I_L = 0 \text{ (noeud 2)}$$
$$I_5 + I_L - I_3 = 0 \text{ (noeud 3)}$$

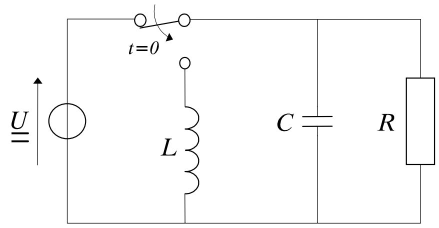
$$U_1 - R_1.I_1 - R_2.I_2 = 0 \text{ (maille 1)}$$
$$U_2 - R_4.I_4 - R_5.I_5 - R_3.I_3 + R_2.I_2 = 0 \text{ (maille 2)}$$
$$R_5.I_5 - U_{RL} = 0 \text{ (maille 3)}$$

On constate que, même pour ce circuit simple, et malgré qu'on ne s'intéresse finalement qu'à deux inconnues (tension et courant au droit de R_L), on aboutit à un système de 6 équations à 6 inconnues.

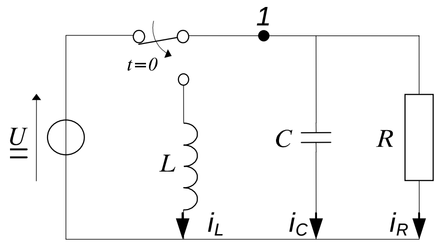
Notons également qu'on aurait pu en réalité écrire 10 équations, si on avait numéroté tous les nœuds, et si on avait considéré également les mailles correspondant au pourtour des mailles (1,2), (2,3), et (1,2,3). On peut vérifier à titre d'exercice que ces équations supplémentaires sont redondantes (elles sont automatiquement vérifiées si les 6 équations précédentes le sont).

Exemple 1.8

On veut mettre en équation le circuit suivant (où U est une source de tension constante, supposée appliquée au circuit depuis un temps infini avant l'ouverture de l'interrupteur), en temporel et en Laplace :



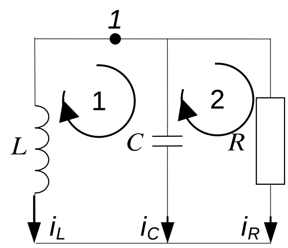
On choisit arbitrairement le sens des courants dans les branches et on numérote les nœuds indépendants (il n'y en a qu'un ici) :



Pour $t<0$: le positionnement initial de l'interrupteur a pour effet d'imposer des conditions initiales particulières :

- $i_L(0_-)=0$
- Après un temps suffisamment long, la capacité est chargée et se comporte comme un circuit ouvert. La tension à ses bornes vaut donc $u_1(0_-)=U$.

Pour $t\geq 0$, il reste un nœud, 3 branches, et 2 mailles indépendantes (auxquelles on donne un sens de parcours arbitraire):



Il vient immédiatement :

$$\begin{cases} i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0 \\ L\dfrac{di_L}{dt}-\left(u_C(0_-)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_C(t)dt\right)=0 \\ u_C(0_-)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_C(t)dt-Ri_R(t)=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} I_R(p)+I_L(p)+I_C(p)=0 \\ pLI_L(p)-\left(\dfrac{u_c(0_-)}{p}+\dfrac{1}{pC}I_C(p)\right)=0 \\ \dfrac{u_c(0_-)}{p}+\dfrac{1}{pC}I_C(p)-RI_R(p)=0 \end{cases}$$

Le gros avantage de la formulation en Laplace est évidemment d'obtenir des relations algébriques, que l'on pourra facilement mettre sous forme matricielle et résoudre (par Cramer, par exemple).

1.4 Signification énergétique des lemmes de Kirchhoff

Considérons une branche quelconque d'un réseau représenté à la Fig 1.26 avec les sens conventionnels de courant et tension tels que u_{kl} i_{kl} représente la puissance instantanée pénétrant dans la branche. On peut encore écrire :

$$i_{kl}(t)u_{kl}(t) = i_{kl}(t)v_k(t) + i_{lk}(t)v_l(t) \tag{1.36}$$

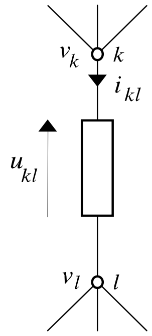


Fig 1.27

Si l'on effectue la somme des équations (1.36) pour toutes les branches du réseau, on trouve :

$$\sum i_{kl}(t)u_{kl}(t) = \sum_k v_k(t)\left[\sum_l i_{kl}(t)\right] \tag{1.37}$$

où les sommations du second membre portent successivement sur tous les noeuds et sur tous les courants quittant ces noeuds.

Par le lemme de Kirchhoff sur les courants, on en déduit que *la somme des puissances absorbées par toutes les branches d'un réseau est identiquement nulle*. Ce résultat est obtenu sans faire appel à d'autres éléments que les lemmes de Kirchhoff. Il est donc valable quelle que soit la nature des éléments constituant le réseau, même s'ils sont non linéaires ou non autonomes.

Si l'on indice par *a* les branches actives et par *p* les branches passives, on peut également récrire (1.37) sous la forme :

$$\sum_a u_a(t)(-i_a(t)) = \sum_p u_p(t)i_p(t) \tag{1.38}$$

ce qui exprime qu'à tout instant la puissance pénétrant dans les branches passives est identique à celle sortant *(signe négatif de i_a)* des sources.

De même, si l'on intègre les deux membres de l'équation, on trouve que l'énergie fournie par les sources est égale à la somme des énergies w_R dissipées par les résistances, et des énergies w_L et w_C emmagasinées par les inductances et les capacités.

Le lemme de Kirchhoff sur les courants est donc équivalent à un principe de conservation de l'énergie.

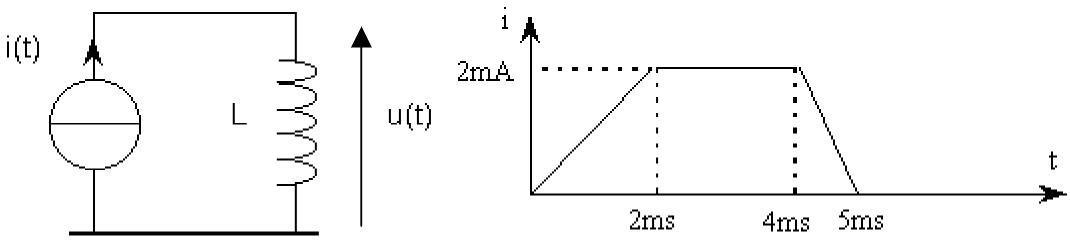
Exercices

Exercice 1.1

Soit un premier dipôle constitué d'une source de courant *i* en parallèle avec une résistance *R* et un second dipôle constitué par une source de tension u_S en série avec une résistance *R'*. Quelles conditions doivent satisfaire *i*, u_S, *R* et *R'* pour que ces deux dipôles soient équivalents?

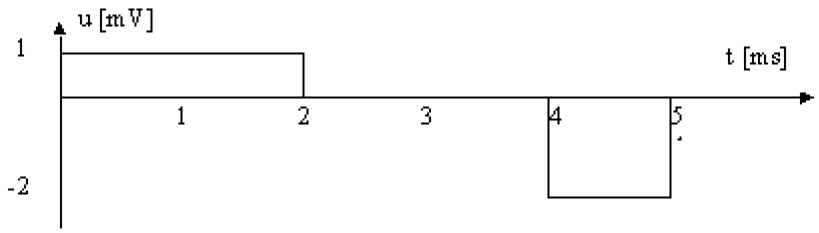
Exercice 1.2

Soit le circuit suivant (où l'impédance vaut 1 Henry):



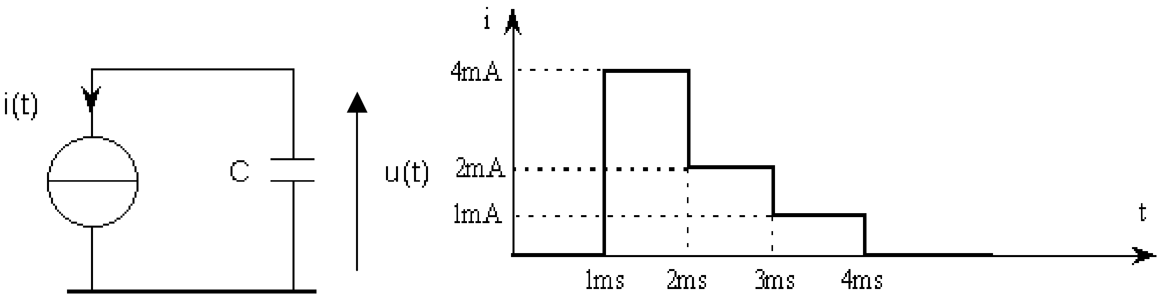
Calculez et représentez u(t) en spécifiant ses valeurs à : t_1 = 2 ms, t_2 = 4 ms, et t_3 = 5ms

Solution



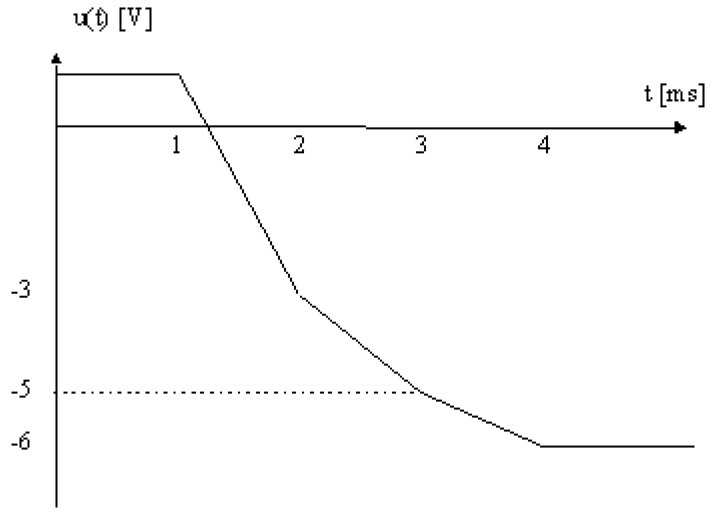
Exercice 1.3

Soit le circuit suivant (où la capacité vaut 1 µF):



Calculez et représentez u(t) en spécifiant ses valeurs à : t_1 = 1 ms, t_2 = 2 ms, t_3 = 3 ms, et t_4 = 4 ms, avec à t = 0, u(0) = 1V.

Solution



Exercice 1.4

Mettre en équation le circuit constitué par la mise en série d'une résistance *R*, d'une capacité *C*, d'une inductance *L* et d'une source de tension.

Exercice 1.5

Si l'on connecte une résistance *(une inductance, une capacité, une source de tension, une source de courant)* entre les bornes *2,2'* d'un transformateur idéal, quel est le dipôle résultant?

Exercice 1.6

Soit un circuit constitué par la mise en série d'une source de courant $i=I \cos \omega t$, une inductance *L* et une capacité *C* pour laquelle on suppose $u(0)=0$. Calculer la puissance instantanée absorbée par chaque élément et son niveau d'énergie. Existe-t-il une valeur de ω, fonction de *L* et *C*, telle que la source ne débite pas de puissance instantanée? Expliquer comment il se fait que néanmoins la puissance instantanée absorbée par les éléments ne soit pas identiquement nulle.

Exercice 1.7

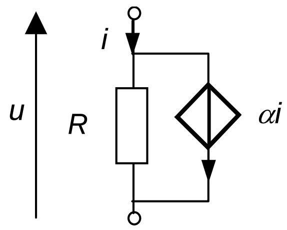
Soient deux transformateurs idéaux de rapport n_1 et n_2. Si l'on connecte un accès de l'un à un accès de l'autre, calculer le rapport de transformation du transformateur idéal résultant.

Exercice 1.8

Si deux transformateurs idéaux ont des rapports n_1 # n_2, pourquoi ne peut-on mettre les deux paires d'accès ni en parallèle, ni en série? Par contre, on peut mettre une paire en série et l'autre en parallèle. Quel est le rapport résultant?

Exercice 1.9

Quel est l'élément équivalent au dipôle suivant? Discuter le signe.



Exercice 1.10

Soit un circuit constitué par la mise en série d'une source de tension continue U, d'une résistance R_1 et d'une résistance R_2. Si U et R_1 sont fixes, quelle valeur de R_2 choisir pour que la puissance dissipée sur R_2 soit maximum? Quelles sont alors les valeurs de cette puissance et de la tension aux bornes de R_2. Donner deux valeurs de R_2 pour lesquelles la puissance dissipée soit nulle.