

Chapitre 15

Commande en boucle fermée

Les méthodes empiriques utilisées ci-dessous conviennent pour certaines applications. Elles ont l'avantage d'être très simples et rapides à mettre en oeuvre. Mais elles présentent également l'inconvénient de ne pas toujours être adaptées aux performances requises. Ces méthodes ne sont donc utilisées qu'en industrie et lorsqu'il faut aller vite ou que le personnel n'est pas à l'aise avec les techniques de synthèse des correcteurs.

Lorsque les performances sont un élément important et que les méthodes empiriques ne répondent pas au besoin, il est nécessaire de déterminer les paramètres précis du correcteur, pour ce faire, il faut tout d'abord établir le cahier des charges, puis procéder au calcul du correcteur, soit via des outils graphiques, soit par un véritable calcul.

15.1 Calcul des paramètres avec une méthode empirique

Ziegler-Nichols - Poursuite et Régulation :

$$K_p = 1,2 \cdot \frac{T_1}{T_0} = 1,2 \cdot \frac{138}{5} = 33$$

$$T_i = 2 \cdot T_0 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ s}$$

$$T_d = 0,5 \cdot T_0 = 0,5 \cdot 5 = 2,5 \text{ s}$$

$$K_p = 33 \quad T_i = 10 \text{ s} \quad T_d = 2,5 \text{ s}$$

Chien-Hrones-Reswick - Poursuite :

$$K_p = 0,6 \cdot \frac{T_1}{T_0} = 0,6 \cdot \frac{138}{5} = 28$$

$$T_i = T_1 = 138 \text{ s}$$

$$T_d = 0,5 \cdot T_0 = 0,5 \cdot 5 = 2,5 \text{ s}$$

$$K_p = 28 \quad T_i = 138 \text{ s} \quad T_d = 2,5 \text{ s}$$

Chien-Hrones-Reswick - Régulation :

$$K_p = 0,95 \cdot \frac{T_1}{T_0} = 0,95 \cdot \frac{138}{5} = 26$$

$$T_i = 2,4 \cdot T_0 = 2,4 \cdot 5 = 12 \text{ s}$$

$$T_d = 0,4 \cdot T_0 = 0,4 \cdot 5 = 2 \text{ s}$$

$$K_p = 26 \quad T_i = 12 \text{ s} \quad T_d = 2 \text{ s}$$

15.2 Calcul des paramètres P.D. par calcul à partir d'un cahier des charges

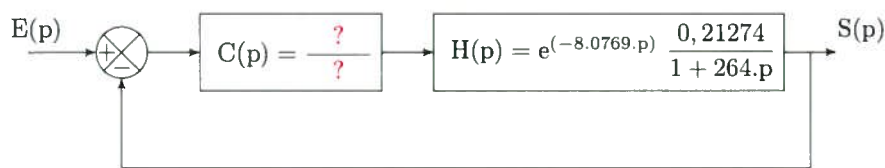
Pour simplifier l'écriture, tf_auto_init sera maintenant noté H.

Le cahier des charges est le suivant :

- augmenter la rapidité en doublant la bande-passante,
- réduire l'erreur statique à 5% de la consigne,
- garder une marge de phase $MP = 70^\circ$.

Choix du correcteur :

Le schéma-bloc du système est le suivant :



Il a été établi qu'en B.O. et sans correcteur, la marge de gain vaut environ 48 dB et la marge de phase tend vers l'infini car le gain est toujours inférieur à 0 dB (car le coefficient d'amplification est toujours égal à 0,21274 et donc toujours inférieur à 1). Il est alors possible d'augmenter, dans une certaine limite, le gain pour rendre le processus plus rapide.

Pour ce qui est de la bande-passante, elle peut être déterminée à l'aide de la commande `bandwidth(H)`, qui retourne, dans ce cas, la valeur 0.0038 rad/s. Conformément au cahier des charges, la nouvelle pulsation de coupure ω' sera égale à deux fois la pulsation de coupure de $H(p)$, notée ω . **Cette augmentation de vitesse nécessite une composante Proportionnelle.**

L'erreur statique, pour le système de classe zéro, est égale à $\varepsilon_p = \frac{E}{1+k}$. En accord avec le cahier des charges, elle ne doit pas dépasser 5% de E. Il est alors possible d'écrire : $\frac{E}{1+k} \leq 0,05.E$. Donc, $k \geq 20 - 1$. Soit $k \geq 19$. **Cette augmentation de précision requiert également une composante Proportionnelle.**

Pour ce qui est de la marge de phase souhaitée, étant de 70° et la marge actuelle tendant vers l'infini, il est possible de rajouter de la phase (réduire le déphasage, c'est-à-dire réduire le retard). **Cela se fait grâce à la composante Dérivée du correcteur.**

Traduction du cahier des charges :

Le correcteur sera de type Proportionnel-Dérivée

$$\omega' = 2 \cdot 0,0038 \approx 0,008 \text{ rad/s}$$

$$C(p) = kp \left(\frac{1 + \alpha \cdot \tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \right), \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

$$\text{Erreur statique } \varepsilon_p = \frac{E}{1+k} \leq 0,05.E$$

$$\text{Marge de phase } MP = 70^\circ$$

Calcul des paramètres du correcteur :

A) Calcul de k_p pour satisfaire la condition de rapidité :

A noter que le retard pur a un module constant et égal à 1. D'où la simplification ci-dessous.

$$|H(j.\omega')| = 1 = \left| e^{(-8.0769.\omega')} \frac{k_p.0,21274}{1 + 264.\omega'} \right| = \frac{\sqrt{(k_p.0,21274)^2}}{\sqrt{1^2 + (264.0,008)^2}} = k_p.0,091$$

$$\text{D'où : } k_p = \frac{1}{0,091} = 10.98$$

$$k_p \approx 11$$

B) Calcul de k_p pour satisfaire la condition de précision :

L'on pose k_T le coefficient d'amplification total, résultant de celui du système, en cascade avec celui du correcteur, soit $k_T = k_p.0,21274$.

$$\text{Erreur statique } \varepsilon_p = \frac{E}{1 + k_T} \leq 0.05.E \quad \Rightarrow \quad 1 + k_T \geq 20 \quad \Rightarrow \quad k_T \geq 19$$

$$k_T = k_p.0,21274 \geq 19$$

$$k_p \geq \frac{19}{0,21274} = 89.3$$

$$k_p \approx 90$$

La valeur précédente de k_p permettant de satisfaire la condition de rapidité (11) ne permet pas de satisfaire la seconde condition du cahier des charges, à savoir de précision. C'est donc cette deuxième valeur (90) qui sera retenue. Le système sera alors bien plus rapide que demandé dans le cahier des charges.

C) Calcul pour satisfaire la condition de stabilité :

Tout d'abord, il faut recalculer la pulsation de coupure avec $k_p = 90$:

$$|H(j.\omega'')| = \left| e^{(-8.07.\omega'')} \cdot \frac{k_p.0,21274}{1 + 264.\omega''} \right| = \frac{90.0,21274}{\sqrt{1 + (264.\omega'')^2}} = \frac{19,15}{\sqrt{1 + (264.\omega'')^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + (264.\omega'')^2} = 19,15$$

$$\Rightarrow (264.\omega'')^2 = 19,15^2 - 1$$

$$\Rightarrow 264.\omega'' = \sqrt{19,15^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \omega'' = \frac{\sqrt{19,15^2 - 1}}{264}$$

$$\omega'' = 0,0724 \text{ rad/s}$$

Ce qui semble cohérent par rapport à la pulsation de coupure précédente : une plus large bande-passante engendre une plus grande rapidité.

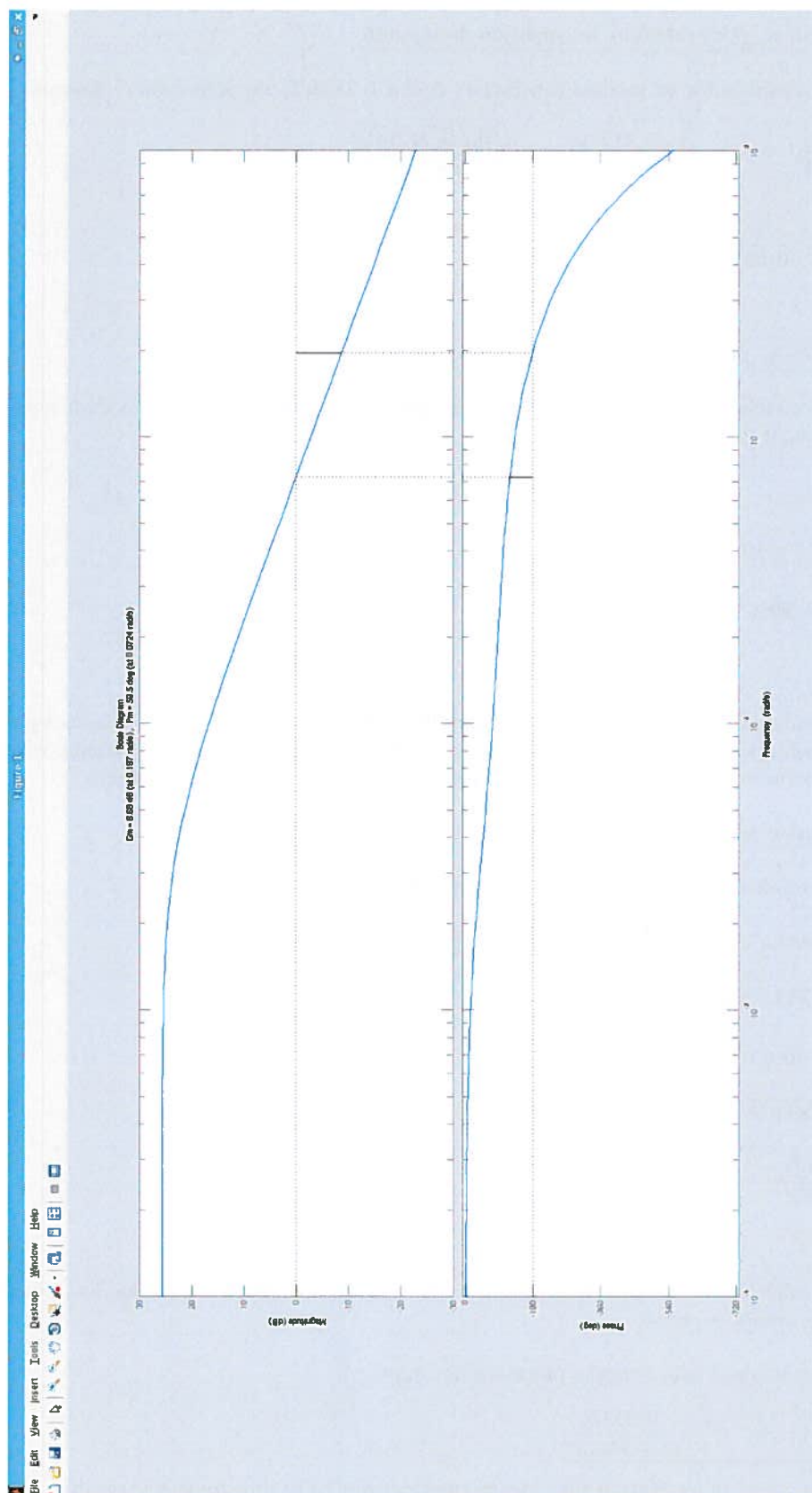
Ensuite, calculer la phase à la nouvelle pulsation de coupure :

$$\angle H(j.\omega'') = \angle \left(k_p \cdot e^{-8.07.\omega''} \frac{0,21274}{1 + 264.\omega''} \right)$$

L'utilisation des commandes Matlab suivantes permettent d'obtenir directement le résultat :

```
s=tf('s');  
k_p=90;  
H=tf(k_p*exp(-8.07*s)*(0.21274)/(1+264*s))  
margin(H)
```

Voici le diagramme de Bode généré :



Cette marge de phase vaut donc 59.5° .

Maintenant, il faut calculer la phase que doit apporter le correcteur :

Le cahier des charges requiert une marge de phase de $MP = 70^\circ$. La marge de phase actuelle est de 59.5° . Pour satisfaire le cahier des charges, il faut être encore un peu plus éloigné du point -180° , c'est-à-dire qu'il faut que le correcteur ajoute une phase $\phi_m = 10.5^\circ$ à la pulsation ω'' .

Il faut cependant augmenter la pulsation à laquelle l'on souhaite ajouter un maximum de phase, car après correction, la courbe de gain aura elle aussi changé, car le correcteur ne fait pas qu'ajouter de la phase, il ajoute également de l'amplitude – certes peu dans le cas présent, car 10.5° à ajouter n'engendrera qu'un coefficient α faible, mais tout de même. Ainsi, pour palier à cela, la pulsation ω'' sera majorée de 50%. A noter que pour ne pas alourdir davantage la notation, la nouvelle pulsation de coupure sera encore notée ω'' .

$$\omega'' = 1.5 * 0.0724$$

$$\omega'' = 0.1086 \text{ rad/s}$$

Sachant que la phase apportée par le correcteur apportée vaut :

$$\phi_m = 10.5^\circ = \arcsin\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)$$

Il est possible de calculer le paramètre α du correcteur. Par exemple, avec une calculatrice TI :

$$\text{solve}\left(\sin^{-1}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right) = 10.5, \alpha\right)$$

Ce qui donne :

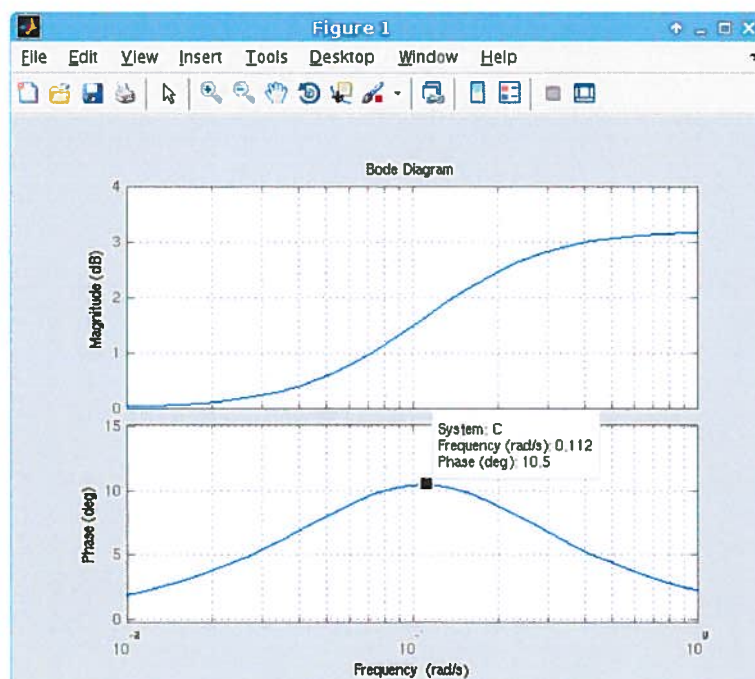
$$\alpha = 1.4457$$

Sachant que le correcteur doit donner son maximum de phase à la pulsation $\omega'' = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$, il vient :

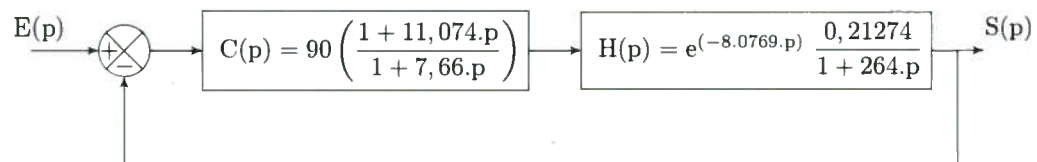
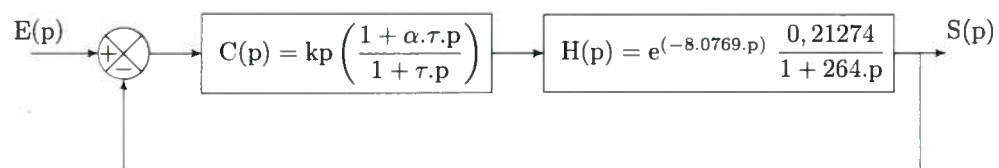
$$\tau = \frac{1}{\omega''\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{0.1086 \cdot \sqrt{1.4457}} = 7.66$$

$$\tau \approx 7.66 \text{ s}$$

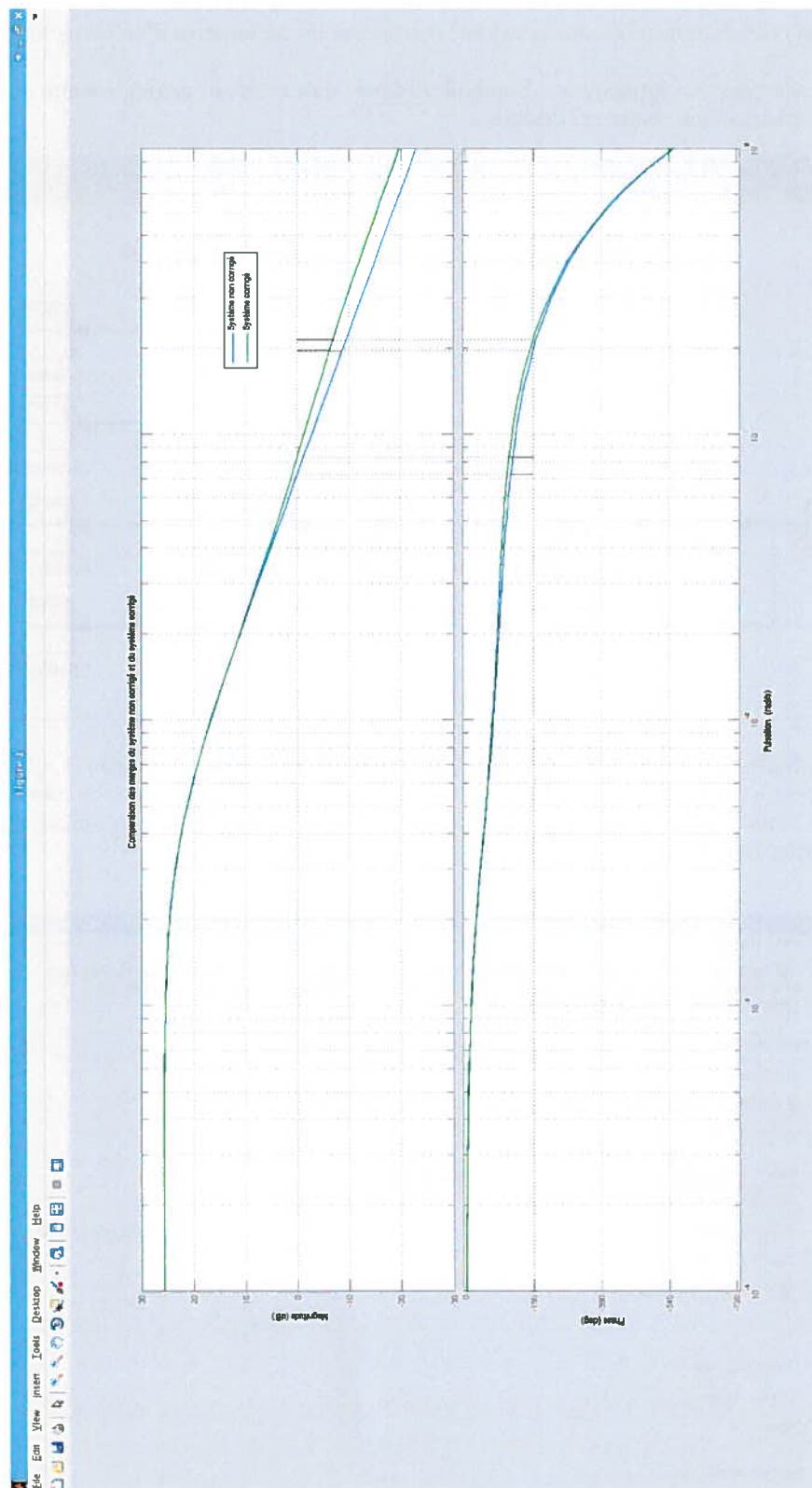
Le diagramme de Bode de $C(p)$ montre que le maximum de phase apparaît effectivement à la pulsation ω'' (à l'arrondi près) ; il montre également l'augmentation de l'amplitude aux hautes fréquences :



D) Schéma-bloc résultant :



L'apport du correcteur peut être visualisé en comparant les diagrammes de Bode du système non-corrigé et du système corrigé, avec le script en annexe I :

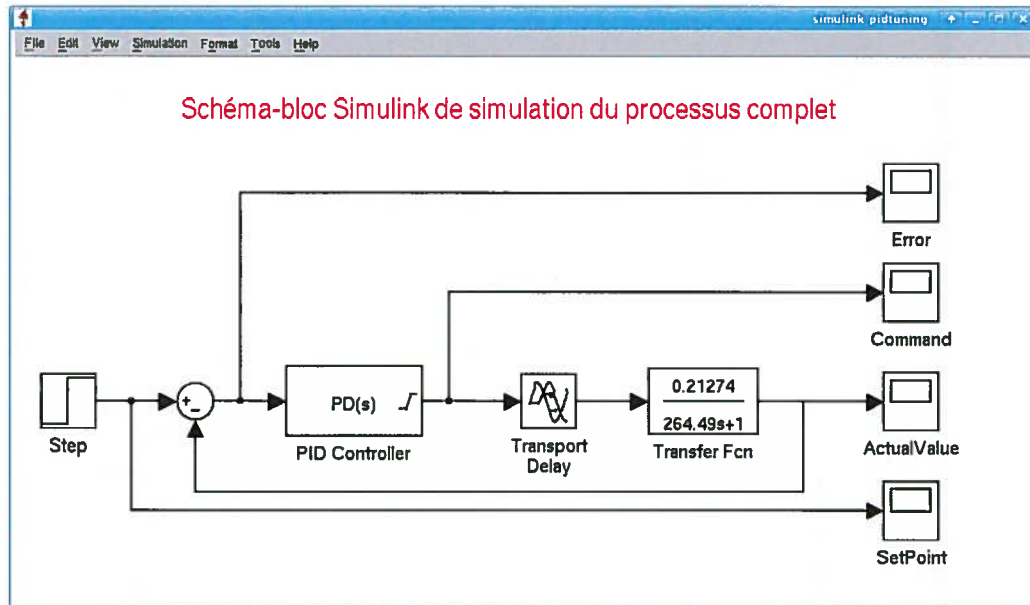


La mise en place du correcteur accélère encore très légèrement le système, mais ajoute surtout 4.8° . La marge de phase MP passe ainsi de 59.5° à 64.3° . L'atteinte de l'objectif de 70° initialement fixé est rendu difficile par le glissement incessant de la pulsation de coupure. Il n'y a pas de méthode calculatoire simple pour atteindre directement une marge de phase précise.

15.3 Calcul des paramètres avec l'outil de synthèse de correcteur *PID Tuner* de Simulink

Matlab fournit un outil extrêmement pratique pour déterminer les paramètres d'un correcteur à moindre effort.

Ouvrir Simulink via Start -> Simulink -> Simulink Project, puis créer un projet, ensuite y ajouter un *Model* et enfin, saisir le schéma-bloc comme ci-dessous :



Ensuite, double cliquer sur le bloc *PID Controller*, sélectionner le type de correcteur et cliquer ensuite sur le bouton Tune. Penser à cliquer sur l'onglet PID Advanced pour y saisir des limitations de commande, car celles-ci sont évidemment limitées. Dans notre exemple, les valeurs 0 et +11,5 ont été saisies, soient approximativement les tensions de saturation de la carte PWM.

