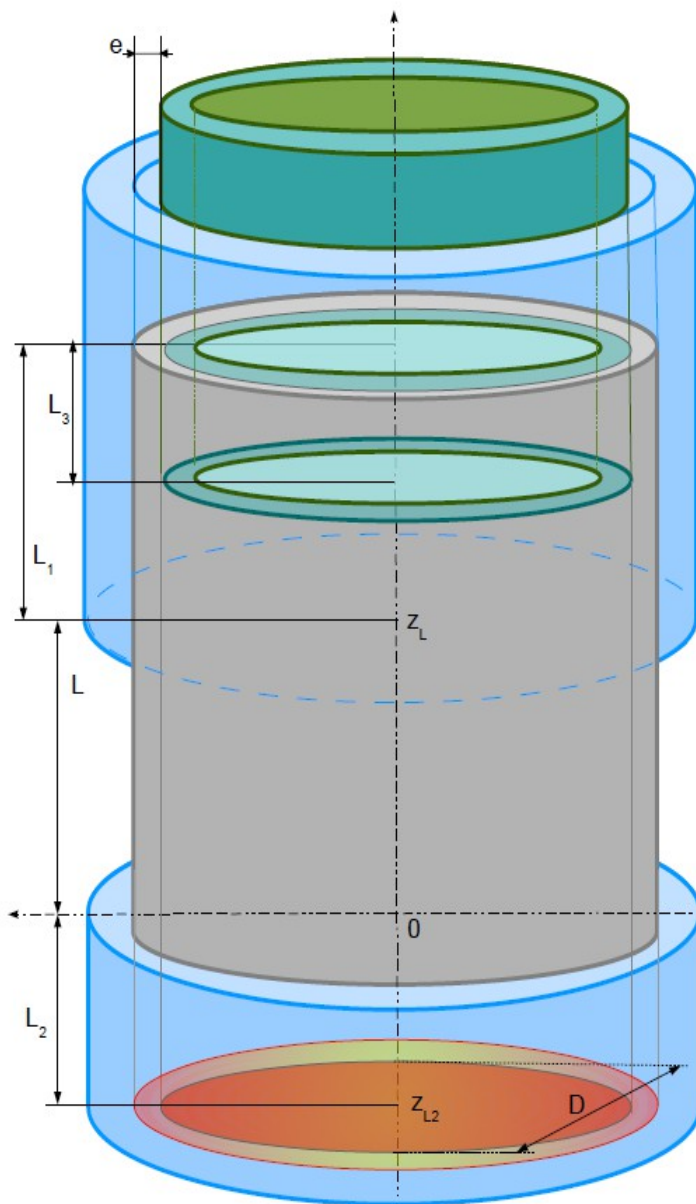


1 Description

On cherche à déterminer les propriétés thermiques du dissipateur représenté sur la figure suivante :



Le dissipateur est de forme cylindrique, creux, de diamètre intérieur D fermé à l'une des extrémités où se situe la source de chaleur. Il se trouve inséré dans un premier tube isolant du côté de la source de chaleur. Il y est inséré d'une longueur L_2 .

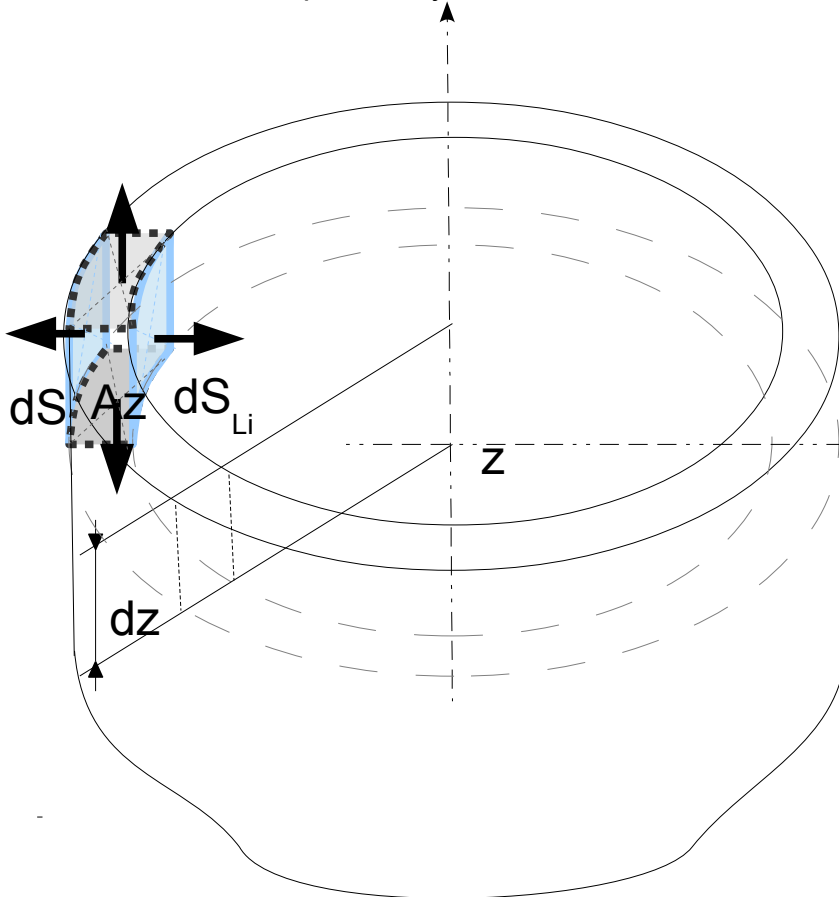
A l'extrémité opposée à la source de chaleur il est implanté entre deux autres tubes isolants. La longueur du dissipateur insérée dans le tube externe est notée L_1 . La longueur du tube interne insérée dans le dissipateur est notée L_3 . Le fond du tube en contact avec la source de chaleur se trouve à la coordonnée z_{L2} . La température y vaut T_s .

L'épaisseur de la paroi e du tube dissipateur est supposée faible devant les autres dimensions. La température de la surface extérieure du tube dissipateur est notée T_f . Le coefficient d'échange thermique h avec y est très supérieur à celui de la surface interne noté h_i . La température au niveau de la surface interne est notée T_i .

Dans ces conditions, l'échange thermique ne se fait que sur la portion de la surface externe du dissipateur située entre les deux tubes isolants externes. La longueur de cette dernière est notée L .

2 Conservation du flux thermique

On considère un élément cylindrique du tube dissipateur de hauteur dz situé à la coordonnée z . Sa température y vaut T_z .



L'aire liée au flux conductif tube vaut $Az = \pi \cdot D \cdot e$

L'aire liée au flux convectif tube vaut $dS_{Li} = \pi \cdot D \cdot dz$ du côté intérieur,

du côté extérieur, elle vaut $dS_L = \pi \cdot (D + 2 \cdot e) \cdot dz \approx \pi \cdot D \cdot dz$ puisque $e \ll D$.

En considérant les normales aux quatre surfaces délimitant l'élément cylindrique telles que représentées ci dessus, il voit

- un flux élémentaire conductif entrant en z par l'élément de surface élémentaire dAz
 $dq_z = \vec{q}_z \cdot \vec{Az} = q(z) \cdot Az$ noté positivement puisque contribuant à l'augmentation de la température.
- un flux élémentaire conductif sortant en $z+dz$, par un élément de surface élément identique dAz
 $dq_{z+dz} = -\vec{q}_{z+dz} \cdot \vec{Az} = -q(z+dz) \cdot Az$ noté négativement,
- un flux de convection sortant par la surface externe dS_L $dq_{cvx} = h \cdot dS_L \cdot (T_f - T_z)$
- un flux de convection sortant par la surface interne dS_{Li} $dq_{cvi} = h_i \cdot dS_{Li} \cdot (T_i - T_z)$

Le bilan des flux conductifs s'écrit donc

$$dq_{cn} = q(z) \cdot Az - q(z+dz) \cdot Az = -Az \cdot \frac{\partial q_z}{\partial z} \cdot dz$$

le bilan des flux de convection s'écrit par ailleurs

$$dq_{cv} = h_i \cdot d\vec{S}_{Li} \cdot (T_i - T_z) + h \cdot dS_L \cdot (T_f - T_z) \approx h \cdot dS_L \cdot (T_f - T_z) \quad \text{compte tenu des hypothèses}$$

En régime stationnaire, et en l'absence de tout travail, la somme algébrique des flux de chaleur qui entrent dans le système doit être nulle d'après premier principe de la thermodynamique. Ce qui s'écrit :

$$-Az \cdot \frac{\partial q_z}{\partial z} \cdot dz + h \cdot dS_L \cdot (T_f - T_z) = 0 \quad \text{soit :}$$

$$Az \cdot \frac{\partial q_z}{\partial z} \cdot dz = h \cdot dS_L \cdot (T_f - T_z) = h \cdot \pi \cdot D \cdot (T_f - T_z) \cdot dz \quad \text{or} \quad q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dz} \quad \text{donc}$$

$$\lambda \cdot e \cdot \pi \cdot D \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} = -h \cdot \pi \cdot D \cdot (T_f - T_z) \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 T}{dz^2} = m^2 \cdot (T - T_f) \quad \text{avec} \quad m = \sqrt{\frac{h}{\lambda \cdot e}}$$

Détermination du champ de température

Détermination du champ de température

solution générale

$$T(z) = a_1 \cdot e^{mz} + a_2 \cdot e^{-mz} + T_f$$

$$\frac{dT}{dz} = m(a_1 e^{mz} - a_2 e^{-mz})$$

or pour $z > z_L$, il n'y a plus d'échange de chaleur

$$\Rightarrow \frac{dT}{dz} \Big|_{z=z_L} = 0$$

$$\text{d'où } a_1 e^{mz_L} - a_2 e^{-mz_L} = 0 \quad \text{soit } a_1 = a_2 e^{-2 \cdot m \cdot z_L}$$

la formule de la température se réécrit alors

$$T(z) = a_2 \cdot e^{-2 \cdot m \cdot z_L} e^{mz} + a_2 e^{-mz} + T_f$$

en $z=0$, la température est égale à celle de la source car la partie du dissipateur comprise entre z_L et 0 ne participe pas à l'échange thermique

$$\text{donc } T(z=0) = T_s = a_2 e^{-2 \cdot m \cdot z_L} + a_2 + T_f$$

$$\text{donc } a_2 = \frac{(T_s - T_f)}{(1 + e^{-2 \cdot m \cdot z_L})} \quad \text{et } a_1 = \frac{(T_s - T_f)}{(1 + e^{2 \cdot m \cdot z_L})}$$

D'où l'expression générale de la température

$$T(z) = (T_s - T_f) \times \left[\frac{e^{mz}}{(1 + e^{2 \cdot m \cdot z_L})} + \frac{e^{-mz}}{(1 + e^{-2 \cdot m \cdot z_L})} \right] + T_f$$

Efficacité du dissipateur

$$\frac{dT}{dz} = (T_s - T_f) \cdot m \cdot \left[\frac{e^{mz}}{(1 + e^{2 \cdot m \cdot z_L})} - \frac{e^{-mz}}{(1 + e^{-2 \cdot m \cdot z_L})} \right]$$

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = (T_f - T_s) \cdot m \cdot \zeta \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{(e^{2mz_L} - e^{-2mz_L})}{(1 + e^{2mz_L})(1 + e^{-2mz_L})}$$

Le flux 'échange' vaut $\dot{Q}_a = \lambda \cdot A_z \cdot \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = \lambda \cdot A_z \cdot (T_f - T_s) \cdot m \cdot \zeta$

Si la température était uniforme sur toute la longueur du dissipateur le flux vaudrait

$$\dot{Q}_u = h \cdot S_a (T_f - T_s) \quad \text{avec} \quad S_a \text{ la surface extérieure } S_a = \pi \cdot D \cdot L$$

On définit l'efficacité du dissipateur par le rapport $\frac{\dot{Q}_a}{\dot{Q}_u}$

$$\eta_a = \frac{\lambda \cdot A_z (T_f - T_s) \cdot m \cdot \zeta}{h \cdot S_a (T_f - T_s)} = \frac{\zeta}{m \cdot L}$$

La résistance thermique vaut alors $R_{th} = \frac{1}{\eta_a h \cdot S_a} = \frac{m}{\zeta \cdot h \cdot \pi \cdot D}$

Application numérique

Le dissipateur est constitué d'Aluminium $\lambda = 175 \text{ W/m/K}$

coefficient de transfert convectif : $100 \text{ W/m}^2/\text{K}$

épaisseur $e = 0,5 \text{ mm}$, diamètre $D = 4 \text{ cm}$, longueur utile $L = 5 \text{ cm}$

$$m = \sqrt{\frac{h}{\lambda e}} = \sqrt{\frac{100}{175 \times 0,5 \times 10^{-3}}} = 33,8$$

$$2 \cdot m \cdot z_L = 2 \times 33,8 \times 5 \times 10^{-2} = 3,38 \quad \zeta = 0,934$$

$$R_{th} = \frac{33,8}{0,934 \times 100 \times \pi \times 4 \cdot 10^{-2}} = 2,9 \text{ K/W}$$