

1 Calcul d'incertitude

Ici nous allons effectuer en détail les calculs d'incertitude pour estimer la précision de la chaîne de mesure. Ceci dans le but de connaître l'incertitudes des mesures de températures envoyées par le PIC. Les calculs seraient allégés en utilisant les dérivées logarithmiques, mais j'ai préféré n'utiliser qu'une seule méthode.

1.1 Données

Les documentations constructeurs nous donnent :

$$R_s = 1 \text{ k}\Omega \text{ } 0,1\% ;$$

$$R = 100 \text{ }\Omega \text{ } 0,1\% ;$$

$$R_{Pt100} = (R_0 + \delta R) \text{ }\Omega \text{ à } 0,01\%. \text{ Pour la suite on choisira } R_0 = R \text{ pour avoir } R_0 \text{ à } 0,1\% \text{ et } \delta R \text{ à } 0,01\% ;$$

Pour une température supérieure à $\theta = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, on à $2,498 \text{ V} \leq V_{ref} \leq 2,500 \text{ V}$.

L'OPA335 a++++ un offset d'entrée de $5 \text{ }\mu\text{V}$ et l'amplificateur d'instrumentation (INA118) un offset de $50 \text{ }\mu\text{V}$;

R_g la résistance de gain, est à $0,1\%$.

Soit T la température et T_0 la température de référence ($0,00 \text{ }^\circ\text{C}$ dans notre cas). Pour les calculs d'incertitudes pour le cas le plus défavorable, on choisit la température la plus éloignée, $\theta = 30 \text{ }^\circ\text{C}$.

1.2 Les étapes

Incertitude absolue de V_{ref}

$$V_{ref} = \overline{V_{ref}} \pm \Delta V_{ref}$$

$$\boxed{V_{ref} = (2,499 \pm 0,001) \text{ V}} \quad (1.1)$$

Incertitude absolue sur R_s , R et δR

$$\Delta R_s = (R_s \times 0,1\%) \text{ }\Omega. \text{ Soit :}$$

$$\boxed{R_s = (1000 \pm 1) \text{ }\Omega} \quad (1.2)$$

De même on trouve

$$\boxed{R = (100 \pm 0,1) \text{ }\Omega} \quad (1.3)$$

Pour calculer l'incertitude sur δR on choisira le cas le plus défavorable, c'est-à-dire la plus grande variation à mesurer. Pour $\delta R(\theta) = 11,67 \Omega$.

D'où $\Delta \delta R = (\delta R(\theta) \times 0,01\%) = 0,0012 \Omega$. Finalement,

$$\boxed{\delta R = (\delta R \pm 0,001) \Omega} \quad (1.4)$$

Incertitude absolue sur I

On a $I = \frac{V_{ref}}{R_s}$

$$dI = \frac{\partial I}{\partial V_{ref}} dV_{ref} + \frac{\partial I}{\partial R_s} dR_s = \frac{1}{R_s} dV_{ref} - \frac{V_{ref}}{R_s^2} dR_s$$

On en déduit l'incertitude relative ΔI :

$$\Delta I = \left| \frac{1}{R_s} \right| \Delta V_{ref} + \left| \frac{-V_{ref}}{R_s^2} \right| \Delta R_s$$

Application numérique : $\Delta I = \left| \frac{1}{100} \right| \times 0,001 + \left| \frac{-2,499}{100^2} \right| \times 1$. D'où :

$$\boxed{I = (2,499 \pm 0,004) mA} \quad (1.5)$$

Incertitude absolue sur V_0

Soient V_A et V_B tels que $V_0 = V_A - V_B$ et I' le courant traversant une sonde. Il faut avant tout déterminer $\Delta I'$.

Incertitude sur I'

$I' = I \frac{2R + \delta R}{4R + 2\delta R} = \frac{I}{2} = 1,2495$. D'où la différentielle suivante :

$$\begin{aligned} dI' &= \frac{\partial I'}{\partial I} dI \\ \Delta I' &= \left| \frac{1}{2} \right| \Delta I = 1,7 \mu A \end{aligned}$$

$$\boxed{I' = (1,250 \pm 0,002) mA} \quad (1.6)$$

Incertitude sur V_A

On a $V_A = I' \times R$

$$\begin{aligned} dV_A &= \frac{\partial V_A}{\partial I'} dI' + \frac{\partial V_A}{\partial R} dR \\ &= R dI' + I' dR \\ \Delta V_A &= |R| \Delta I' + |I'| \Delta R \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta V_A = 0,325 \text{ mV}} \quad (1.7)$$

Incertitude sur V_B

On a

$$V_B = I \frac{2R + \delta R}{4R + 2\delta R} (2R + \delta R) = I \frac{(2R + \delta R)^2}{4R + 2\delta R}$$

$$\begin{aligned} dV_B &= \frac{\partial V_B}{\partial I} dI + \frac{\partial V_B}{\partial R} dR + \frac{\partial V_B}{\partial \delta R} d\delta R \\ &= \frac{(2R + \delta R)^2}{4R + 2\delta R} dI + I \frac{(8R + 4\delta R)(4R + 2\delta R) - 4(2R + \delta R)^2}{(4R + 2\delta R)^2} dR + \\ &\quad I \frac{(4R + 2\delta R)(4R + 2\delta R) - 2(2R + \delta R)^2}{(4R + 2\delta R)^2} d\delta R \\ &= \frac{(2R + \delta R)^2}{4R + 2\delta R} dI + I \frac{16R^2 - 8\delta R^2}{(4R + 2\delta R)^2} dR + I \frac{1}{2} d\delta R \end{aligned}$$

Pour un cas général on obtient donc :

$$\boxed{\Delta V_B = \left| \frac{(2R + \delta R)^2}{4R + 2\delta R} \right| \Delta I + \left| I \frac{16R^2 - 8\delta R^2}{(4R + 2\delta R)^2} \right| \Delta R + \left| \frac{1}{2} \right| \Delta \delta R} \quad (1.8)$$

Dans notre étude, nous allons prendre le cas le plus défavorable, c'est-à-dire $T = \theta$. Soit $\delta R = 11,67 \Omega$.

Application numérique :

$$\boxed{\Delta V_B(\delta R(\theta)) = 1,157 \text{ mV}} \quad (1.9)$$

Incertitude sur V_0

En reprenant le calcul réalisé dans le rapport (page ??) on a :

$$V_0 = \frac{I}{2} \times \delta R$$

Et pour l'incertitude,

$$\Delta V_0 = \Delta V_A + \Delta V_B = 1,482 \text{ mV}$$

D'où

$$\boxed{V_0 = \left(\frac{I}{2} \times \delta R \pm 1,482 \times 10^{-3} \right) V} \quad (1.10)$$

Incertitude absolue sur V_s

Gain

Soit V_s le signal disponible en sortie de l'amplificateur d'instrumentation, et R_g sa résistance de gain à 0,1%. La détermination de R_g est issue de la formule disponible dans la documentation constructeur (voir ci-dessous) pour une pleine échelle (0 V–5 V).

$$\boxed{R_g = (150 \pm 0,15) \, \Omega} \quad (1.11)$$

On a

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{50 \times 10^3 \, [\Omega]}{R_g} = 334,33 \\ dG &= \frac{\partial G}{\partial R_g} dR_g = \frac{-200 \times 10^3}{R_g^2} dR_g \\ \Delta G &= \left| \frac{50 \times 10^3}{R_g^2} \right| \Delta R_g = 0,3333 \, \Omega \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{G = 334,33 \pm 0,3333} \quad (1.12)$$

Calcul de l'incertitude sur V_s

$$\begin{aligned} V_s &= V_0 \times G \\ dV_s &= \frac{\partial V_s}{\partial V_0} dV_0 + \frac{\partial V_s}{\partial G} dG = G dV_0 + V_0 dG \\ \Delta V_s(\theta) &= G \cdot \Delta V_0 + V_0 \cdot \Delta G \end{aligned}$$

Application numérique pour $T = \theta$: $\Delta V_s = 0,5003 \, V$. On en déduit donc que les 5 μV d'offset de l'INA118 sont négligeables.

$$\boxed{V_s = (G \cdot \frac{I}{2} \cdot \delta R \pm 0,5003) \, V} \quad (1.13)$$

Calcul final

Des calculs précédents, on trouve (avec l'incertitude valable pour une plage 0–30 °C) :

$$V_s = \left(G \cdot \frac{I}{2} \cdot \delta R \pm 0,5003 \right) \, V \quad (1.14)$$

Les tables (annexe ??) donnent la résistance standard R_{Pt100} de la Pt100 à la température T , pour une résistance nominale $R_0 = 100,00 \, \Omega$ à la température de référence $T_0 = 0 \, ^\circ C$. Dépendance pouvant être approximée par la relation :

$R_{Pt100} = R_0 (1 + A \cdot \Delta T + B \cdot \Delta T^2)$, où : $\Delta T = T - T_0$. Avec $A = 3,9083 \times 10^{-3} K^{-1}$ et $B = -5,775 \times 10^{-7} K^{-2}$. Ce qui donne pour déterminer la température : $T = T_0 + \frac{\sqrt{A^2 + 4B \cdot r} - A}{2B}$, où

$$r = \frac{R_{Pt100}}{R_0} - 1 \quad (1.15)$$

Or on a $R_0 = R$ et $R_{Pt100} = R + \delta R$. Notre variable étant V_s , la tension disponible en entrée du PIC, il ne faut obtenir que V_s pour calculer la température. On l'obtient par la relation (1.14). Soit,

$$\delta R = \frac{2V_s}{G \cdot I}$$

d'où :

$$\begin{aligned} r &= \frac{R + \delta R}{R} - 1 = \frac{\delta R}{R} = \frac{2V_s}{G \cdot I \cdot R} \\ dr &= \frac{\partial r}{\partial V_s} dV_s + \frac{\partial r}{\partial G} dG + \frac{\partial r}{\partial I} dI + \frac{\partial r}{\partial R} dR \\ &= \frac{2}{G \cdot I \cdot R} dV_s - 2V_s \left(\frac{dG}{G^2 \cdot I \cdot R} + \frac{dI}{G \cdot I^2 \cdot R} + \frac{dR}{G \cdot I \cdot R^2} \right) \\ &= \frac{2}{G \cdot I \cdot R} dV_s - 2 \frac{G \cdot I \cdot \delta R}{2} \left(\frac{dG}{G^2 \cdot I \cdot R} + \frac{dI}{G \cdot I^2 \cdot R} + \frac{dR}{G \cdot I \cdot R^2} \right) \\ \Delta r &= \frac{2}{G \cdot I \cdot R} \Delta V_s + \delta R \left(\frac{\Delta G}{G \cdot R} + \frac{\Delta I}{I \cdot R} + \frac{\Delta R}{R^2} \right) \end{aligned}$$

Soit l'application numérique pour le cas le plus défavorable : $\Delta r = 0,0124$
Finalement on obtient :

$$\boxed{T = T_0 + \frac{\sqrt{A^2 + 4B \cdot r} - A}{2B}} \quad (1.16)$$

Avec

$$\boxed{r = \frac{2V_s}{G \cdot I \cdot R} \pm 0,0124} \quad (1.17)$$

Incertitude finale

On reprend $r = \frac{\delta R(\theta)}{R}$ pour calculer l'incertitude sur T :

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \frac{\sqrt{A^2 + 4B \cdot r} - A}{2B} \\ dT &= \frac{\partial T}{\partial r} dr = \frac{1}{2B} \cdot \frac{4B}{2\sqrt{A^2 + 4B \cdot r}} dr = \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B \cdot r}} dr \\ \Delta T &= \left| \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B \cdot r}} \right| \Delta r \end{aligned}$$

Application numérique : $\Delta T = 0,066 \text{ } ^\circ\text{C}$

Résultat

Théoriquement, on obtient une mesure fidèle à 0,1 °C (avec une marge de 0,03 °C). Avec pour relations :

$$T = \left(T_0 + \frac{\sqrt{A^2 + 4B \cdot r} - A}{2B} \pm 0,07 \right) ^\circ\text{C} \quad (1.18)$$

$$r = \frac{2V_s}{G \cdot I \cdot R} \pm 0,0124 \quad (1.19)$$

$$A = 3,9083 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad (1.20)$$

$$B = -5,775 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-2} \quad (1.21)$$

$$T_0 = 0,00 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1.22)$$

Avec pour le circuit présenté :

$$G = 425,53 \pm 0,4255 \quad (1.23)$$

$$I = (2,499 \pm 0,004) \text{ mA} \quad (1.24)$$

$$R = (100 \pm 0,1) \text{ } \Omega \quad (1.25)$$