Étude de la décharge du condensateur dans un circuit RLC série

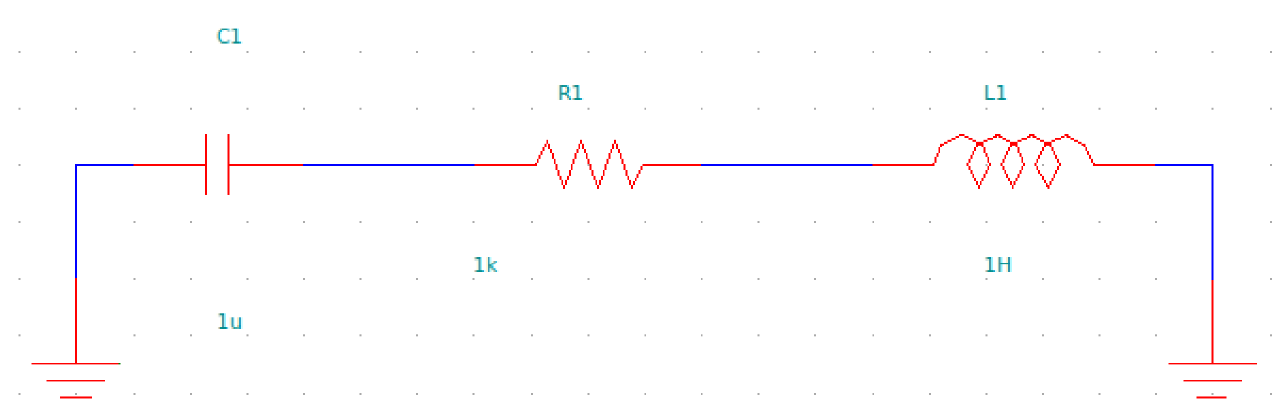

Illustration 1: Schéma décharge condensateur

Calcul de i(p)

- On considère le condensateur chargé à la valeur : $U_C(0)=V_0$
- On pose : $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\alpha=\frac{R}{2L}$

On applique la loi des mailles et on obtient : $U_C(0)+U_C(t)+U_R(t)+U_L(t)=0$

L'équation différentielle qui en résulte est : $\boxed{U_C(0)+\frac{1}{C}\int i(t).dt+R.i(t)+L.\frac{\partial i(t)}{\partial t}=0}$

On effectue la transformé de Laplace et on obtient :

$$f(t)\overset{L}{\rightarrow}\frac{V_0}{p}+\frac{1}{C.p}.i(p)+R.i(p)+L.p.i(p)=0$$

On cherche à isoler i(p) :

$$\frac{-V_0}{p}=\frac{1}{C.p}.i(p)+R.i(p)+L.p.i(p)=i(p)(\frac{1}{C.p}+R+L.p)$$

$$i(p)=\frac{-V_0/p}{\frac{1}{C.p}+R+L.p}$$

$$\boxed{i(p)=\frac{-1}{L}.\frac{V_0}{p^2+p.\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}=\frac{-1}{L}.\frac{V_0}{p^2+2\alpha.p+\omega_0^2}}$$

Calcule des pôles : $p^2+2\alpha.p+\omega_0^2=0$

$$\Delta=b^2-4.a.c=4.\alpha^2-4.\omega_0^2=4(\alpha^2-\omega_0^2)$$

Cas Δ=0

$$\Delta=0\rightarrow\alpha^2=\omega_0^2\rightarrow\left(\frac{R}{2L}\right)^2=\frac{1}{LC}$$

La valeur de la résistance pour laquelle le discriminant est nul est appelé « résistance critique » R_c . Elle correspond à la valeur de résistance pour laquelle le condensateur se décharge le plus rapidement dans la bobine.

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2=\frac{1}{LC}\rightarrow R^2=4.L^{\cancel{2}}.\frac{1}{\cancel{L}C}\rightarrow R=2.\sqrt{\frac{L}{C}}\quad\rightarrow\quad\boxed{R_c=2.\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

L'équation admet une solution double :

$$z=-\alpha=-\cancel{2}.\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\cancel{2}L}=\frac{\cancel{\sqrt{L}}/\sqrt{C}}{\cancel{\sqrt{L}}.\sqrt{L}}=\frac{-1}{\sqrt{LC}}=\frac{-1}{\tau}\ avec\ \tau=\sqrt{LC}$$

On remplace τ dans i(p) : $\boxed{i(p)=\frac{-V_0}{L}.\frac{1}{p^2+\frac{2}{\tau}.p+\frac{1}{\tau^2}}}$

On travail l'équation afin de pouvoir effectuer la transformé de Laplace inverse :

$$i(p)=\frac{-V_0}{L}.\frac{1}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)^2}\xrightarrow{L^{-1}}\boldsymbol{i(t)=\frac{-V_0}{L}.t.e^{-t/\tau}}$$

On calcul $U_L(t)$:

$$U_L(t)=L.\frac{\partial i(t)}{\partial t}=\cancel{L}.-\frac{V_0}{\cancel{L}}.t.e^{-t/\tau}.dt=\underset{u'}{-V_0}.\underset{v}{e^{-t/\tau}}+\frac{-1}{\tau}.\underset{v'}{e^{-t/\tau}}.\underset{u}{-V_0}.t$$

$$\boxed{U_L(t)=-V_0e^{-t/\tau}.\left(1-\frac{1}{\tau}.t\right)}$$

On calcul $U_C(t)=\frac{1}{C}.\int i(t).dt=\frac{-V_0}{LC}.\int t.e^{-t/\tau}.dt=\frac{-V_0}{\tau^2}.\int t.e^{-t/\tau}.dt$

L'intégration par partie donne : $\int vu'=vu-\int v'u\rightarrow\left\{\begin{matrix}u'=e^{-t/\tau} & u=-\tau.e^{-t/\tau}\\ v=t & v'=1\end{matrix}\right\}$

$$U_C(t)=\frac{V_0}{\tau^{\cancel{2}}}.\cancel{\tau}.e^{-t/\tau}.t+\frac{V_0}{\cancel{\tau^2}}.\cancel{\tau^2}.e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{U_C(t)=V_0.e^{-t/\tau}\left(1+\frac{1}{\tau}.t\right)}$$

Application numérique

Cas Δ=0

- Prenons comme application numérique les valeurs suivantes :

L = 1H C=50F R=0.2828Ω (R=R_C) et V_0 = 5V → On obtient : τ=7.07

En rouge : $U_C(t)$, En bleu : $U_L(t)$, En jaune :i(t)

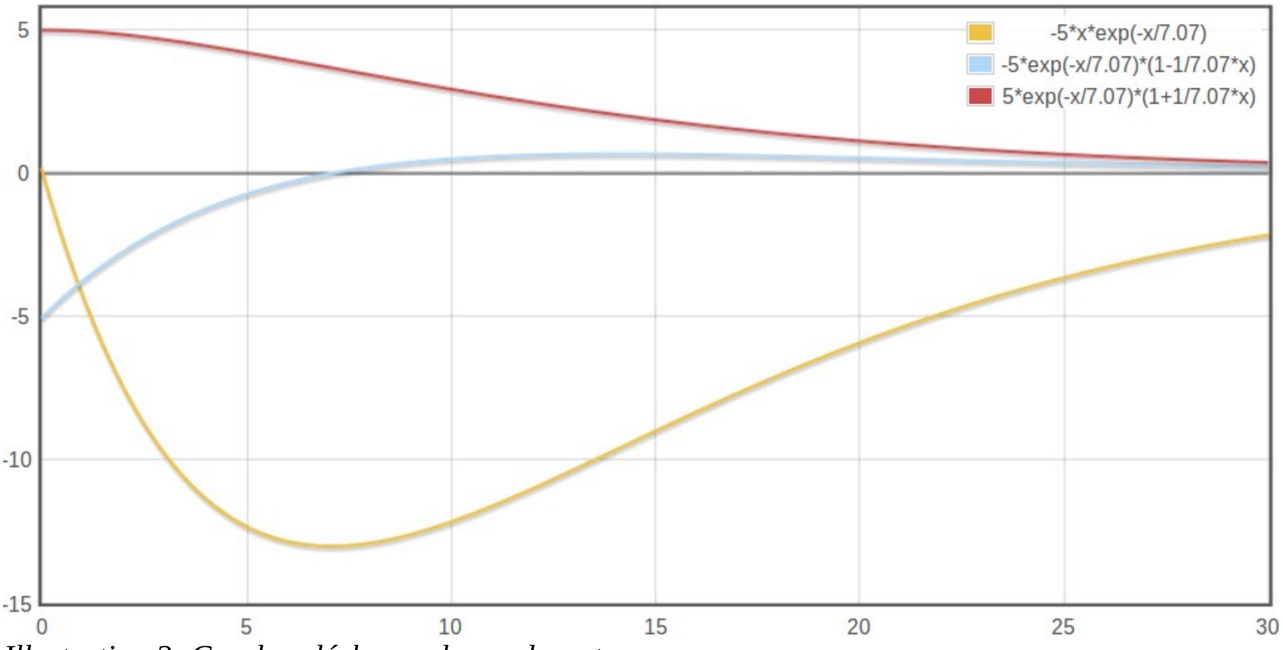

Illustration 2: Courbes décharge du condensateur