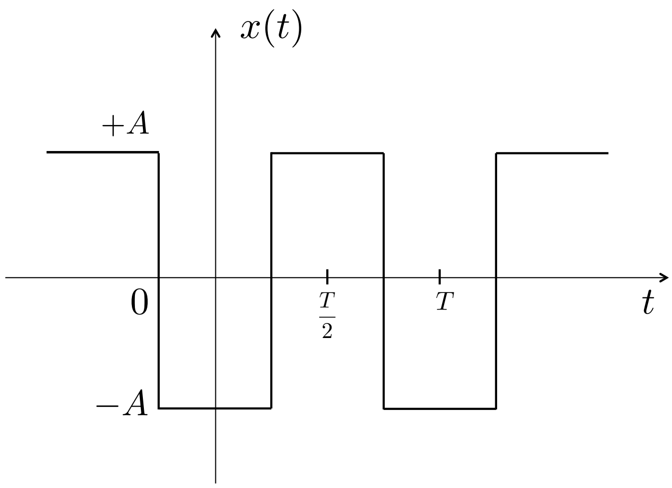
Devoir maison de Traitement du Signal

à rendre au format PDF ou manuscrit numérisé

Exercice 1

Soit le filtre passe bas du premier ordre de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u(t)$ où $u(t)$ est l'échelon unité. On met à l'entrée de ce filtre le signal périodique suivant.



1. Déterminer la réponse fréquentielle du filtre. Représenter son module et sa phase.
2. Quels sont les coefficients nuls de la série de Fourier de $x(t)$ et pourquoi ?
3. Calculer et écrire la décomposition en série de Fourier réelle de $x(t)$ (on distinguera les valeurs suivant la parité de n).
4. En déduire sa décomposition en série de Fourier complexe.
5. Déterminer l'expression de la décomposition en série de Fourier complexe du signal $y(t)$ en sortie du filtre.
6. Déterminer l'expression de la décomposition en série de Fourier réelle du signal $y(t)$.

Exercice 2

Soit le signal suivant issu d'un redresseur

$$x(t) = A|\cos(\omega_0 t)| = A|\cos(2\pi f_0 t)|$$

1. Quelles sont la fréquence, période et pulsation de ce signal ?
2. Représenter $x(t)$ sur 4 périodes.
3. Calculer les coefficients c_n de la série de Fourier de $x(t)$ et donner sa décomposition complexe.
4. En déduire sa décomposition réelle.
5. Déduire du résultat des questions 1) et 3) l'expression de la transformée de Fourier de $x(t)$ et la représenter sur un graphe.

Exercice 3

On considère le signal réel $x(t)$ et sa transformée de Fourier $X(f)$. On cherche à construire le signal $z(t)$ sous la forme $z(t) = x(t) + jy(t)$ dont le spectre est nul pour les fréquences négatives et égal à $2X(f)$ pour les fréquences positives, i.e. $Z(f) = 2X(f)U(f)$ où $U(f)$ est l'échelon unité en fréquence.

1. Montrer que la TF de $y(t)$ et celle de $x(t)$ sont liées par $Y(f) = -j\text{sgn}(f)X(f)$, où sgn est la fonction signe.
2. La relation qui lie $x(t)$ à $y(t)$ est appelée transformé de Hilbert et notée $\mathcal{H}$. On a donc $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$. Calculer la transformée de Hilbert de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

Exercice 4

Soit $x(t)$ un signal *réel* et à *energie finie*, ayant pour fonction d'autocorrélation $C_X(\tau)$ et pour densité spectrale d'énergie $S_X(f)$. Soit $y(t) = x(t + t_0) + x(t - t_0)$.

1. Exprimer la fonction d'autocorrélation $C_Y(\tau)$ de $y(t)$ en fonction de $C_X(\tau)$.
2. En déduire la densité spectrale d'énergie $S_Y(f)$ de $y(t)$ en fonction de $S_X(f)$.