# 1 PID.

## 1.1 Schéma-bloc du PID.

Le schéma-bloc du contrôleur PID utilisé est représenté sur la figure 1

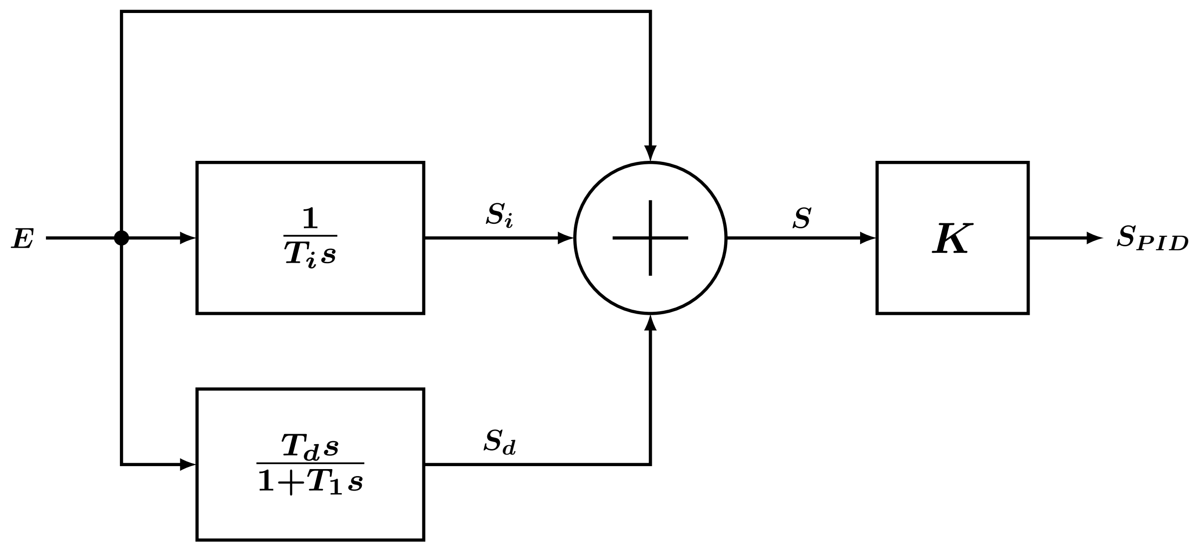


Figure 1 – Contrôleur PID.

## 1.2 Fonction de transfert du PID.

Nous avons la relation suivante :

$$S_{PID} = K \cdot S$$

Ou :

$$S_{PID} = K \cdot (E + S_i + S_d)$$

Ou :

$$S_{PID} = K \cdot \left( E + \frac{1}{T_i s} \cdot E + \frac{T_d s}{1 + T_1 s} \cdot E \right)$$

Ou :

$$S_{PID} = K \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_1 s} \right) \cdot E$$

La fonction de transfert du PID est :

$$G(s) = \frac{S_{PID}}{E}$$

D'où :

$$G(s) = K \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_1 s} \right)$$

Ou :

$$G(s) = K \cdot \left( \frac{T_i s \cdot (1 + T_1 s)}{T_i s \cdot (1 + T_1 s)} + \frac{1 + T_1 s}{T_i s \cdot (1 + T_1 s)} + \frac{T_i T_d s^2}{T_i s \cdot (1 + T_1 s)} \right)$$

Ou :

$$G(s) = K \cdot \frac{T_i s + T_i T_1 s^2 + 1 + T_1 s + T_i T_d s^2}{T_i s \cdot (1 + T_1 s)}$$

Ou :

$$G(s) = K \cdot \frac{T_i(T_d + T_1)s^2 + (T_i + T_1)s + 1}{T_i s \cdot (1 + T_1 s)}$$

Ou :

$$G(s) = K \cdot \frac{T_i(T_d + T_1)s^2 + (T_i + T_1)s + 1}{T_i T_1 s(s + \frac{1}{T_1})}$$

Ou :

$$G(s) = \frac{K}{T_i T_1} \cdot \frac{T_i(T_d + T_1)s^2 + (T_i + T_1)s + 1}{s(s + \frac{1}{T_1})}$$

Ou :

$$G(s) = \frac{K(T_d + T_1)}{T_1} \cdot \frac{s^2 + \frac{T_i + T_1}{T_i(T_d + T_1)} s + \frac{1}{T_i(T_d + T_1)}}{s(s + \frac{1}{T_1})}$$

On pose :

$$K_{PID} = \frac{K(T_d + T_1)}{T_1}$$

Ou :

$$G(s) = K_{PID} \cdot \frac{s^2 + \frac{T_i + T_1}{T_i(T_d + T_1)} s + \frac{1}{T_i(T_d + T_1)}}{s(s + \frac{1}{T_1})}$$

## 1.3 Réponse indicielle du PID.

### 1.3.1 Transformée de Laplace d'un échelon unité $u(t)$.

La transformée de Laplace d'un échelon unité $u(t)$ est :

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

### 1.3.2 Réponse indicielle.

Nous avons la fonction de transfert du PID :

$$G(s) = K_{PID} \cdot \frac{s^2 + \frac{T_i + T_1}{T_i(T_d + T_1)} s + \frac{1}{T_i(T_d + T_1)}}{s(s + \frac{1}{T_1})}$$

On pose :

$$G_1(s) = \frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s(s + \frac{1}{T_1})}$$

Avec :

$$a_1 = \frac{T_i + T_1}{T_i(T_d + T_1)}$$

Et :

$$a_0 = \frac{1}{T_i(T_d + T_1)}$$

La réponse indicielle $Y_1(s)$ de $G_1(s)$ est donc :

$$Y_1(s) = G_1(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Ou :

$$Y_1(s) = \frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s(s + \frac{1}{T_1})} \cdot \frac{1}{s}$$

Ou :

$$Y_1(s) = \frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s^2(s + \frac{1}{T_1})}$$

Le développement en éléments simples donne :

$$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s^2(s + \frac{1}{T_1})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + \frac{1}{T_1}}$$

D'où :

$$s^2 + a_1 s + a_0 = \frac{As^2(s + \frac{1}{T_1})}{s} + \frac{Bs^2(s + \frac{1}{T_1})}{s^2} + \frac{Cs^2(s + \frac{1}{T_1})}{s + \frac{1}{T_1}}$$

Ou :

$$s^2 + a_1 s + a_0 = As\left(s + \frac{1}{T_1}\right) + B\left(s + \frac{1}{T_1}\right) + Cs^2$$

Pour $s = 0$ :

$$a_0 = \frac{B}{T_1}$$

D'où $B$ :

$$B = a_0 T_1$$

Alors :

$$B = \frac{T_1}{T_i(T_d + T_1)}$$

Pour $s = \frac{-1}{T_1}$ :

$$\frac{1}{T_1^2} + a_1\frac{-1}{T_1} + a_0 = C\frac{1}{T_1^2}$$

D'où $C$ :

$$C = 1 - a_1T_1 + a_0T_1^2$$

Alors :

$$C = 1 - \frac{T_i + T_1}{T_i(T_d + T_1)}T_1 + \frac{1}{T_i(T_d + T_1)}T_1^2$$

Ou :

$$C = 1 - \frac{T_1(T_i + T_1)}{T_i(T_d + T_1)} + \frac{T_1^2}{T_i(T_d + T_1)}$$

Ou :

$$C = 1 + \frac{T_1^2 - T_1(T_i + T_1)}{T_i(T_d + T_1)}$$

On développe le membre de droite de l'équation :

$$s^2 + a_1s + a_0 = As\left(s + \frac{1}{T_1}\right) + B\left(s + \frac{1}{T_1}\right) + Cs^2$$

D'où :

$$s^2 + a_1s + a_0 = As^2 + \frac{A}{T_1}s + Bs + \frac{B}{T_1} + Cs^2$$

Ou :

$$s^2 + a_1s + a_0 = (A + C)s^2 + \left(B + \frac{A}{T_1}\right)s + \frac{B}{T_1}$$

D'où :

$$A + C = 1$$

Alors $A$ :

$$A = 1 - C$$

Ou :

$$A = 1 - C = a_1T_1 - a_0T_1^2$$

Ou :

$$A = \frac{T_i + T_1}{T_i(T_d + T_1)}T_1 - \frac{1}{T_i(T_d + T_1)}T_1^2$$

La réponse indicielle $y_1(t)$ est donc

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + \frac{1}{T_1}}\right]$$

Ou :

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{B}{s^2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C}{s + \frac{1}{T_1}} \right]$$

Ou :

$$y_1(t) = A \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] + B \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \right] + C \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right]$$

D'où :

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ est négatif} \\ A + B \cdot t + C \cdot e^{\frac{-1}{T_1} t} & \text{si } t \text{ est positif ou nul} \end{cases}$$

La réponse indicielle $y(t)$ est donc

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ est négatif} \\ K_{PID} \cdot \left( A + B \cdot t + C \cdot e^{\frac{-1}{T_1} t} \right) & \text{si } t \text{ est positif ou nul} \end{cases}$$

Remarque : ne pas oublier de remette l'intégrateur à zéro pour des mesures...