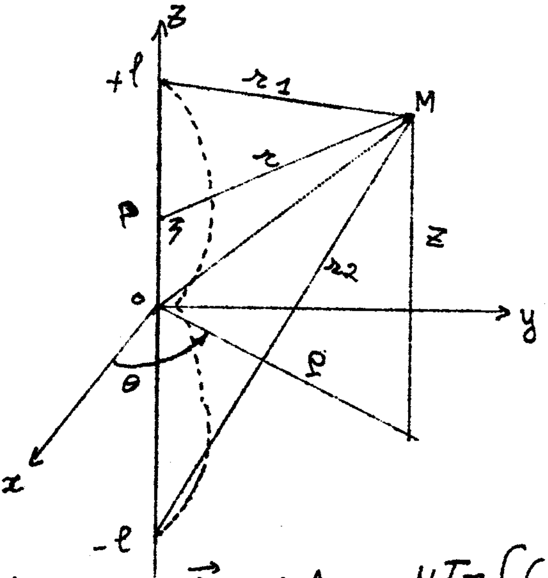
ANNEXE II

CHAMP AU VOISINAGE D'UNE ANTENNE RECTILIGNE MINCE - RESISTANCE DE RAYONNEMENT - IMPEDANCE MUTUELLE ENTRE 2 ANTENNES - REACTANCE DE RAYONNEMENT

On se propose de déterminer le champ rayonné par une antenne rectiligne infiniment mince alimentée symétriquement, la distribution du courant sur l'antenne est supposée sinusoïdale.



$$\vec{I}(\zeta) = I_m \sin k(l - |\zeta|)\,\vec{z}$$

ζ abcisse du point P de la distribution.

Etant donné la symétrie de révolution de la distribution, on effectue le calcul dans un système de coordonnées cylindriques orthogonales(ρ , θ , z).

Le potentiel vecteur est donné par :

$$\vec{A} = \vec{z} A_z = \frac{\mu I_m}{4\pi}\left\{\int_0^{l} \frac{\sin k(l-\zeta) e^{-jkr}}{r} d\zeta + \int_{-l}^{0} \frac{\sin k(l+\zeta) e^{-jkr}}{r} d\zeta\right\} \quad (1)$$

avec

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}$$

.1 CALCUL DU CHAMP MAGNETIQUE

Le champ magnétique au point M (ρ , θ , z) est obtenu à partir de l'induction magnétique

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}\,\vec{rot}\,\vec{A}$$

Dans le système des coordonnées choisies :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \times \frac{1}{\rho} \times \begin{vmatrix} \vec{e_\rho} & \rho\vec{e_\theta} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$$

$\vec{A}$ ne dépendant de θ , il vient

$$\vec{H} = \vec{e_\theta}\, H_\theta = \vec{e_\theta}\left[-\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]$$

d'où

$$H_\theta = \frac{-I_m}{8\pi j}\frac{\partial}{\partial \rho}\left\{\int_0^\ell e^{jk(\ell-\zeta)}\psi(r)\,d\zeta - \int_0^\ell e^{-jk(\ell-\zeta)}\psi(r)\,d\zeta + \int_{-\ell}^0 e^{jk(\ell+\zeta)}\psi(r)\,d\zeta - \int_{-\ell}^0 e^{-jk(\ell+\zeta)}\psi(r)\,d\zeta\right\}$$

Avec

$$\psi(r) = \frac{e^{-jkr}}{r} \qquad (2)$$

On dérive sous les signes $\int$ en appliquant

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial r}\times\frac{\rho}{r}$$

$$\psi'(r) = \left[\frac{jk}{r} - \frac{1}{r^2}\right]e^{-jkr} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r} = \rho\left[\frac{-jk}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right]e^{-jkr} = \rho\,\frac{\psi'(r)}{r}$$

et

$$H_\theta = \frac{-I_m\rho}{8\pi j}\left\{e^{jk\ell}\int_0^\ell e^{-jk\zeta}\frac{\psi'(r)}{r}d\zeta - e^{-jk\ell}\int_0^\ell e^{jk\zeta}\frac{\psi'(r)}{r}d\zeta + e^{jk\ell}\int_{-\ell}^0 e^{jk\zeta}\frac{\psi'(r)}{r}d\zeta - e^{-jk\ell}\int_{-\ell}^0 e^{-jk\zeta}\frac{\psi'(r)}{r}d\zeta\right\} \quad (3)$$

Le calcul se réduit à celui des deux primitives

$$I = \int e^{-jk\zeta}\frac{\psi'(r)}{r}d\zeta \qquad \text{et} \qquad J = \int e^{jk\zeta}\frac{\psi'(r)}{r}d\zeta$$

soit en explicitant :

$$I = \int\left[-\frac{jk}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right]e^{-jk(r+\zeta)}d\zeta \qquad r = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}$$

<u>On pose</u> $\theta = r + \zeta - z$

$$\theta + (z-\zeta) = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$\theta^2 + 2\theta(z-\zeta) + \cancel{(z-\zeta)^2} = \rho^2 + \cancel{(z-\zeta)^2}$$

$$\zeta = z + \frac{\theta^2 - \rho^2}{2\theta} \qquad d\zeta = \frac{\theta^2 + \rho^2}{2\theta^2}d\theta \quad (a)$$

$$r + \zeta = \theta + z \quad (b)$$

$$r = \theta + z - \zeta = \frac{\theta^2 + \rho^2}{2\theta} \quad (c)$$

Soit en reportant dans I :

$$I = \int \frac{-2jk}{\theta^2 + \rho^2}e^{-jk(\theta+z)}d\theta - \int \frac{4\theta}{(\theta^2+\rho^2)^2}e^{-jk(\theta+z)}d\theta$$

et en intégrant par parties la deuxième intégrale

$$I = \int \frac{-2\delta k}{\theta^2+\rho^2} e^{-\delta k(\theta+z)} d\theta + \frac{2e^{-\delta k(\theta+z)}}{\theta^2+\rho^2} + \int \frac{2\delta k}{\theta^2+\rho^2} e^{-\delta k(\theta+z)} d\theta$$

d'où

$$I = \frac{2e^{-\delta k(\theta+z)}}{\theta^2+\rho^2} = \frac{e^{-\delta k(r+\zeta)}}{r(r+\zeta-z)}$$

$$J = \int \left[\frac{-\delta k}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right] e^{-\delta k(r-\zeta)} d\zeta$$

On pose $\theta = \zeta - r - z$

$$\theta + (z-\zeta) = -r = -\sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}$$

$$\theta^2 + 2\theta(z-\zeta) + \cancel{(z-\zeta)^2} = \rho^2 + \cancel{(z-\zeta)^2}$$

$$\zeta = z + \frac{\theta^2-\rho^2}{2\theta} \qquad d\zeta = \frac{\theta^2+\rho^2}{2\theta^2} d\theta \quad (a)$$

$$r - \zeta = -(\theta+z) \quad (b)$$

$$r = \zeta - \theta - z = -\frac{\theta^2+\rho^2}{2\theta} \quad (c)$$

Soit en reportant dans J :

$$J = \int \frac{-2\delta k}{\theta^2+\rho^2} e^{\delta k(\theta+z)} d\theta + \int \frac{4\theta}{(\theta^2+\rho^2)^2} e^{+\delta k(\theta+z)} d\theta$$

et en intégrant par parties la deuxième intégrale

$$J = \int \frac{-2\delta k}{\theta^2+\rho^2} e^{\delta k(\theta+z)} d\theta - \left[\frac{2e^{\delta k(\theta+z)}}{\theta^2+\rho^2}\right] + \int \frac{2\delta k}{\theta^2+\rho^2} e^{\delta k(\theta+z)} d\theta$$

d'où

$$J = \frac{-2e^{\delta k(\theta+z)}}{\theta^2+\rho^2} = \frac{-e^{-\delta k(r-\zeta)}}{r(r-\zeta+z)}$$

d'où

$$H_\theta = \frac{-I m \rho}{8\pi\delta} \left\{ e^{\delta k \ell} \left[\frac{e^{-\delta k(r+\zeta)}}{r(r+\zeta-z)}\right]_0^{\ell} - e^{-\delta k \ell} \left[\frac{-e^{-\delta k(r-\zeta)}}{r(r-\zeta+z)}\right]_0^{\ell} \right.$$
$$\left. - e^{-\delta k \ell} \left[\frac{e^{-\delta k(r+\zeta)}}{r(r+\zeta-z)}\right]_{-\ell}^{0} + e^{\delta k \ell} \left[\frac{-e^{-\delta k(r-\zeta)}}{r(r-\zeta+z)}\right]_{-\ell}^{0} \right\}$$

Soit en remarquant que pour

$\zeta = 0 \quad r = r_0 \quad ; \quad \zeta = \ell \quad r = r_1$

$\zeta = -\ell \quad r = r_2$

$$r_0^2 - z^2 = r_1^2 - (\ell - z)^2 = r_2^2 - (\ell + z)^2 = \rho^2$$

$$H_\theta = \frac{-I_m}{4\pi j \rho}\left[e^{-jkr_1} + e^{-jkr_2} - 2\, e^{-jkr_0} \cos kl\right] \qquad (4)$$

.2 CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE

On obtient le champ électrique à partir de

$$\vec{rot}\, \vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{E}$$

d'où

$$E = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \times \frac{1}{\rho} \times \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho H_\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$E = -\frac{1}{j\omega\varepsilon\rho}\, \frac{\partial \rho H_\theta}{\partial z}\, \vec{e}_\rho + \frac{1}{j\omega\varepsilon\rho}\, \frac{\partial \rho H_\theta}{\partial \rho}\, \vec{e}_z$$

On a dans ( )

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (l-z)^2} \qquad \frac{\partial r_1}{\partial z} = \frac{z-l}{r_1} \qquad \frac{\partial r_1}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r_1}$$

$$r_2 = \sqrt{\rho^2 + (l+z)^2} \qquad \frac{\partial r_2}{\partial z} = \frac{z+l}{r_2} \qquad \frac{\partial r_2}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r_2}$$

$$r_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2} \qquad \frac{\partial r_0}{\partial z} = \frac{z}{r_0} \qquad \frac{\partial r_0}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r_0}$$

Alors

$$E_\rho = \frac{-I_m}{4\pi j\rho} \times \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial r_1}\left(e^{-jkr_1}\right) \times \frac{\partial r_1}{\partial z} + \cdots\right]$$

de même

$$E_z = \frac{-I_m}{4\pi j\rho}\, \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial r_1}\left(e^{-jkr_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial \rho} + \cdots\right]$$

Soit, en remplaçant $\frac{k}{\omega\varepsilon}$ par 120π

$$E_\rho = \frac{j30 I_m}{\rho}\left[\frac{z-l}{r_1}\, e^{-jkr_1} + \frac{z+l}{r_2}\, e^{-jkr_2} - 2\frac{z}{r_0}\, e^{-jkr_0} \cos kl\right.$$

$$E_z = -j30 I_m \left[\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} + \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} - 2\frac{e^{-jkr_0}}{r_0} \cos kl\right] \qquad (5)$$