## Description du problème :

Nous avons le schéma suivant :



Le but étant de trouver un moyen de calculer Vs(t) en fonction de Ve(t) et de R01, R02, R03 et C01 et C02. Deux méthodes pour parvenir à cela seront expliquées dans ce document :

1. En utilisant la résolution d’équation différentielle.
2. En utilisant la transformation inverse de Laplace.

## Le commencement :

La première chose à réaliser est de trouver la fonction de transfert du montage VS/VE.

Pour cela, je propose de calculer deux fonctions de transfert intermédiaires et ensuite de faire le produit de ces fonctions : $H= \frac{Vs}{Vint} × \frac{Vint}{Ve}= \frac{Vs}{Ve}$.

Nous allons donc travailler sur le schéma suivant :



On applique la règle du pont diviseur de tension pour trouver Vs en fonction de Vint:

$$Vs=\frac{Vint ×Z5}{Z5+Z4}$$

$$\frac{Vs}{Vint}= \frac{Z5}{Z5+Z4}$$

Ensuite pour déterminer $Vint$ en fonction de $Ve$, deux méthodes s’offrent à nous :

* Le théorème de Millman.
* La méthode bourrine !

|  |  |
| --- | --- |
| *Pour millman :* $$Vint= \frac{\frac{Ve}{Z1}+\frac{GND}{Z2}+\frac{GND}{Z3}+ \frac{GND}{Z4+Z5}}{\frac{1}{Z1}+ \frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z3}+ \frac{1}{Z4+Z5}}$$donc$$Vint= \frac{\frac{Ve}{Z1}}{\frac{1}{Z1}+ \frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z3}+ \frac{1}{Z4+Z5}}$$On sort $Ve$ de l’équation et on met le dénominateur sur le même dénominateur :$$\frac{Vint}{Ve}= \frac{\frac{1}{Z1}}{\frac{\left(Z2Z3+Z1Z3+Z1Z2\right)\left(Z4+Z5\right)+Z1Z2Z3}{Z1Z2Z3(Z4+Z5)}}$$On multiplie le numérateur par l’inverse du dénominateur :$$\frac{Vint}{Ve}= \frac{Z2Z3(Z4+Z5)}{\left(Z2Z3+Z1Z3+Z1Z2\right)\left(Z4+Z5\right)+Z1Z2Z3}$$Toujours pas finis, à-côté …Ah ! enfin ! | *Méthode bourrine :*$$Vint=Ve × \frac{Z2//Z3//(Z4+Z5) }{Z2//Z3//(Z4+Z5)+Z1}$$$Z2//Z3//(Z4+Z5)$ signifie que $Z2$ est parallèle à $Z3$ qui est elle-même en parallèle avec $(Z4 + Z5).$$$Z3//(Z4+Z5) = \frac{Z3.(Z4+Z5)}{Z3+Z4+Z5}$$$$Z2//Z3//(Z4+Z5) = \frac{Z2 ×Z3//(Z4+Z5) }{Z2+ Z3//(Z4+Z5) }$$$$ = \frac{\frac{Z2.Z3(Z4+Z5)}{Z3+Z4+Z5} }{\frac{Z2.\left(Z3+Z4+Z5\right)+Z3.(Z4+Z5)}{Z3+Z4+Z5} }$$On multiplie le numérateur par l’inverse du dénominateur$$=\frac{Z2.Z3(Z4+Z5) }{Z2.\left(Z3+Z4+Z5\right)+Z3.(Z4+Z5)}$$On remplace dans l’équation de départ tout en passant Ve de l’autre coter du « = ».$$\frac{Vint}{Ve}= \frac{\frac{Z2.Z3.(Z4+Z5) }{Z2.\left(Z3+Z4+Z5\right)+Z3.(Z4+Z5)}}{\frac{Z2.Z3.(Z4+Z5) }{Z2.\left(Z3+Z4+Z5\right)+Z3.(Z4+Z5)}+Z1}$$En mettant le dénominateur sur le même dénominateur Puis en multipliant le numérateur par l’inverse du dénominateur, obtient : $$\frac{Z2.Z3.(Z4+Z5) }{Z2.Z3.\left(Z4+Z5\right)+Z1.(Z2.\left(Z3+Z4+Z5\right)+Z3.\left(Z4+Z5\right))}$$ $$\frac{Z2.Z3.\left(Z4+Z5\right)}{Z2.Z3.\left(Z4+Z5\right)+Z1.Z2.Z3+Z1.Z2.Z4+Z1.Z2.Z5+Z1.Z3.\left(Z4+Z5\right)}$$$$\frac{Vint}{Ve}=\frac{Z2.Z3.\left(Z4+Z5\right)}{(Z2.Z3+Z1.Z3+Z1.Z2)\left(Z4+Z5\right)+Z1.Z2.Z3}$$Beaucoup plus long mais j’aime bien =) |

Maintenant que $\frac{Vint}{Ve}$ et que $\frac{Vs}{Vint}$ sont écrit, il ne reste plus qu’à les multiplier entre elles !

$$\frac{Vint}{Ve} ×\frac{Vs}{Vint}= \frac{Vs}{Ve}=\frac{Z2.Z3.\left(Z4+Z5\right)}{\left(Z2.Z3+Z1.Z3+Z1.Z2\right)\left(Z4+Z5\right)+Z1.Z2.Z3} × \frac{Z5}{Z5+Z4}$$

$$\frac{Vs}{Ve}=\frac{Z2.Z3.Z5}{Z2.Z3.Z4+Z1.Z3.Z4+Z1.Z2.Z4+Z2.Z3.Z5+Z1.Z3.Z5+Z1.Z2.Z5+Z1.Z2.Z3} $$

Oui ce fut rapide, on a notre fonction de transfert ! On peut alors remplacer les Z par les impédances des composants !

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Z1 = R1 | Z2 = R2 | Z3 = $\frac{1}{jc1w}$ | Z4 = $\frac{1}{jc2w}$ | Z5 = R3 |

Pour simplifier les écritures, on utilisera la notation de Laplace avec **p = jw.**

On obtient alors :

$$\frac{Vs}{Ve}=\frac{\frac{R2R3}{C1p}}{\frac{R2}{C1C2p^{2}}+\frac{R1}{C1C2p^{2}}+\frac{R1R2}{C2p}+\frac{R2R3}{C1p}+\frac{R1R3}{C1p}+R1R2R3+\frac{R1R2}{C1p}}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par C1.C2.p²

$$H(p)= \frac{Vs\left(p\right)}{Ve\left(p\right)}= \frac{R2.R3.C2.p}{R2+R1+R1.R2.C1.p+R2.R3.C2.p+R1.R3.C2.p+R1.R2.R3.C1.C2.p²+R1.R2.C2.p}$$

On regroupe les termes de même poids ensemble

$$H(p)= \frac{Vs\left(p\right)}{Ve\left(p\right)}= \frac{R\_{2}.R\_{3}.C\_{2}.p}{\left(R\_{1}+R\_{2}\right)+\left(R\_{1}.R\_{2}.C\_{1}+R\_{1}.R\_{2}.C\_{2}+R\_{1}.R\_{3}.C\_{2}+R\_{2}.R\_{3}.C\_{2}\right).p+\left(R\_{1}.R\_{2}.R\_{3}.C\_{1}.C\_{2}\right).p²}$$

On divise maintenant le numérateur et dénominateur par R1 + R2 afin de faire apparaitre un terme égal à 1 au dénominateur. Le but est d’avoir le dénominateur de la forme a.p² + b.p + 1.

$$H(p)= \frac{Vs\left(p\right)}{Ve\left(p\right)}= \frac{\frac{R\_{2}.R\_{3}.C\_{2}}{R\_{1}+R\_{2}}.p}{1+\frac{\left(R\_{1}.R\_{2}.C\_{1}+R\_{1}.R\_{2}.C\_{2}+R\_{1}.R\_{3}.C\_{2}+R\_{2}.R\_{3}.C\_{2}\right)}{R\_{1}+R\_{2}}.p+\frac{\left(R\_{1}.R\_{2}.R\_{3}.C\_{1}.C\_{2}\right)}{R\_{1}+R\_{2}}.p²}$$

|  |  |
| --- | --- |
| $$a$$ | $$\frac{\left(R\_{1}.R\_{2}.R\_{3}.C\_{1}.C\_{2}\right)}{R\_{1}+R\_{2}}$$ |
| $$b$$ | $$\frac{\left(R\_{1}.R\_{2}.C\_{1}+R\_{1}.R\_{2}.C\_{2}+R\_{1}.R\_{3}.C\_{2}+R\_{2}.R\_{3}.C\_{2}\right)}{R\_{1}+R\_{2}}$$ |
| $$c$$ | 1 |
| $$d$$ | $$\frac{R\_{2}.R\_{3}.C\_{2}}{R\_{1}+R\_{2}}$$ |

$H(p)= \frac{Vs\left(p\right)}{Ve\left(p\right)}= \frac{d.p}{1+b.p+a.p²}$ Avec :

## Résolution de l’équation :

La résolution de l’équation se fera avec deux méthodes différentes :

* Résolution de l’équation du second degré avec déterminaison de la solution particulière avec les conditions initiales.
* Résolution de l’équation du second degré avec décomposition en éléments simples et transformation inverse de Laplace.

### 1ère méthode :

 L’équation $H\left(p\right)=\frac{d.p}{a.p^{2}+b.p+c}$ est très proche de la forme $H\left(p\right)=T1.p ×\frac{1}{\frac{1}{w0²}.p²+T2.p+1}$

(Avec T1 = d, T2 = b et $\frac{1}{w0²}= \frac{1}{a}$ )

 Sachant que H(p) = Vs(p) / Ve(p), alors on peut écrire l’égalité suivante :

$$\frac{1}{w0^{2}}.p^{2}.Vs\left(p\right)+T2.p.Vs\left(p\right)+Vs\left(p\right)=Ve\left(p\right).T1.p$$

Par définition, **p = jw**, or avoir **jw** revient à faire la dérivée pour passer dans le domaine temporel. On peut donc écrire :

$$\frac{1}{w0^{2}}.\frac{d'Vs}{dt}+T2.Vs.\frac{dVs}{dt}+Vs=T1.\frac{dVe}{dt}$$

 Pour rappel, c’est la forme de la sortie à une réponse d’un échelon qui nous intéresse. Par définition, un signal échelon parfait à sa dérivée qui est égale à 0 donc $\frac{dVe}{dt}=0$. On peut donc écrire :

 $$\frac{1}{w0^{2}}.\frac{d'Vs}{dt}+T2.Vs.\frac{dVs}{dt}+Vs=0$$

Il ne reste alors plus qu’à résoudre !

Pour plus de simplicité, on simplifiera le terme $\frac{1}{w0^{2}}.\frac{d'Vs}{dt} $ par $\frac{d'Vs}{dt}$ , ce qui revient à multiplier tous les termes par w0² :

 $$\frac{d'Vs}{dt}+w0^{2}.T2.Vs.\frac{dVs}{dt}+w0^{2}.Vs=0$$

Et on résout :

L’équation est de la forme : a.y’’ + b.y’ + c.y = 0 Ce qui revient à écrire a.r² + b.r + c = 0

Ici, a = 1, b = w0².T2 et c = w0².

On calcule le discriminant !

$$∆ =b^{2}-4ac$$

$$∆ =\left(w0^{2}.T2\right)^{2}-4.w0²$$

Que l’on peut réécrire :

 $$∆ =w0^{2}.\left(w0^{2}.T2^{2}-4\right)$$

Pour rappel : w0² = $\frac{R1+R2}{R1.R2.R3.C1.C2}$ et T2 = $\frac{R1+R2}{\left(R1.R2.C1+R2.R3.C2+R1.R3.C2+R1.R2.C2\right)}$

Du fait de la nature du circuit, $∆ >0$ on auras donc je cite BLACK JACK 2 : « qui donnera 2 exponentielles réelles où apparaîtront 2 constantes qui devront être déterminées à partir de conditions initiales. »

La forme de la solution pour $∆ >0$ est la suivante : $A.e^{r1t}+B.e^{r2t}$

Par définition, comme on a des circuit RC, la solution pourra aussi être écrite sous la forme suivante : $A.e^{-\frac{t}{τ1}}+B.e^{-\frac{t}{τ2}}$

$$r1= \frac{-b+ \sqrt{∆}}{2.a} et r2= \frac{-b- \sqrt{∆}}{2.a}$$

Sachant que $∆ =w0^{2}.\left(w0^{2}.T2^{2}-4\right)$, b = w0².T2 et a = 1 on peut écrire :

$$r1= \frac{-w0^{2}.T2+ \sqrt{w0^{2}.\left(w0^{2}.T2^{2}-4\right)}}{2} et r2= \frac{-w0^{2}.T2- \sqrt{w0^{2}.\left(w0^{2}.T2^{2}-4\right)}}{2}$$

Maintenant que les racines sont définies, il faut trouver solution particulière en fonction des conditions initiales :

A t = 0, Ve = 0, tout le circuit est déchargé, donc Vs = 0. On peut donc écrire :

$$Vs\left(t=0\right)= A.e^{0}+B.e^{0}=0$$

$$A+B=0 Donc, A= -B ou B= -A$$

A t = 0+, Ve = e, tout le circuit comment à se charge, les condensateurs sont cependant toujours déchargés et sont donc considérer comme des interrupteurs fermés ou des fils :



Ainsi, on peut écrire que Vs = Vc1.R2 n’est pas pris en compte car court-circuité par C01. Il ne reste plus qu’a exprimé Vc1 :

$$Le courant dans le condensateur=\frac{Ve}{R01}=C01. \frac{dVc1}{dt}$$

Comme Vc1 = Vs, on peut écrire : $\frac{dVs}{dt}= \frac{EVe}{R01.C01}$

En utilisant Vs(t) = $A.e^{r1.t}+B.e^{r2.t}$, on peut calculer :

$$\frac{dVs}{dt}\left(t=0+\right)= \frac{Ve}{R01.C01}= \frac{d(A.e^{r1.t}+B.e^{r2.t})}{dt}$$

$$\frac{Ve}{R01.C01}= r1.A+r2.B$$

On a donc nos deux équations :

1. A + B = 0
2. $\frac{Ve}{R01.C01}= r1.A+r2.B$

Et on résout :

A = -B donc $\frac{Ve}{R01.C01}= -r1.B+r2.B$

 $\frac{E.Ve}{R01.C01}= B\left(r2-r1\right)$

$$B=\frac{Ve}{R01.C01(r2-r1)}$$

 Et Donc $A=-\frac{Ve}{R01.C01.(r2-r1)}$

Maintenant que l’on a tout définis, on peut écrire que :

$Vs\left(t\right)=-\frac{Ve}{R01.C01.(r2-r1)}e^{r1.t}$ + $\frac{Ve}{R01.C01.(r2-r1)}e^{r2.t}$

$$Vs\left(t\right)=\frac{Ve}{R01.C01}.\left(\frac{-e^{r1.t} + e^{r2.t} }{r2-r1}\right)$$

Et en reprenant la cotation initiale :

$$Vs\left(t\right)=\frac{Ve}{R1.C1}\left(\frac{-e^{r1.t} + e^{r2.t} }{r2-r1}\right)$$

|  |  |
| --- | --- |
| R1 | $$\frac{-w0²T2+ \sqrt{w0^{2}\left(w0^{2}T2^{2}-4\right)}}{2} $$ |
| R2 | $$\frac{-w0²T2- \sqrt{w0^{2}\left(w0^{2}T2^{2}-4\right)}}{2}$$ |
| W0² | $$\frac{R1+R2}{R1R2R3C1C2}$$ |
| T2 | $$\frac{R1+R2}{\left(R1R2C1+R2R3C2+R1R3C2+R1R2C2\right)}$$ |

### 2nd Méthode

Reprenons l’équation à résoudre :$$H(p)= \frac{Vs\left(p\right)}{Ve\left(p\right)}= \frac{\frac{R\_{2}.R\_{3}.C\_{2}}{R\_{1}+R\_{2}}.p}{1+\frac{\left(R\_{1}.R\_{2}.C\_{1}+R\_{1}.R\_{2}.C\_{2}+R\_{1}.R\_{3}.C\_{2}+R\_{2}.R\_{3}.C\_{2}\right)}{R\_{1}+R\_{2}}.p+\frac{\left(R\_{1}.R\_{2}.R\_{3}.C\_{1}.C\_{2}\right)}{R\_{1}+R\_{2}}.p²}$$

Le dénominateur est de la forme suivante : $D= 1+b.p+a.p^{2}$

Après avoir résolu l’équation du second degré D et ressorti les deux solutions $α\_{1}$et $α\_{2}$, on peut récrire l’équation comme ceci :

$D= 1+b.p+a.p^{2}$ ↔ $a.\left(p-α\_{1}\right).(p-α\_{2})$ avec $α\_{1}$ et $α\_{2}$ les solutions de l’équation D.

Il faut ensuite récrire l’équation de la forme suivante pour pouvoir faire ensuite.

$$H\left(p\right)= \frac{Vs\left(p\right)}{Ve\left(p\right)}= \frac{d.p}{a.\left(p-α\_{1}\right).\left(p-α\_{2}\right)}=\frac{d}{a}.p.\left[\frac{A}{\left(p-α\_{1}\right)}+\frac{B}{\left(p-α\_{2}\right)}\right]$$

Il faut ensuite trouver A et B. Je vous passe la démonstration, elle est simple :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $\frac{1}{\left(p-α\_{1}\right).\left(p-α\_{2}\right)}=\frac{A}{\left(p-α\_{1}\right)}+\frac{B}{\left(p-α\_{2}\right)}$ ↔ | $$A$$ | $$\frac{1}{\left(α\_{1}-α\_{2}\right)}$$ |
| $$B$$ | $$\frac{1}{\left(α\_{2}-α\_{1}\right)}$$ |

On utilisera A et B plus tard. On souhaite avoir Vs en fonction du temps. On passe alors Ve de l’autre côté :

$$H\left(p\right)= \frac{Vs\left(p\right)}{Ve\left(p\right)}= \frac{d}{a}.p.\left[\frac{A}{\left(p-α\_{1}\right)}+\frac{B}{\left(p-α\_{2}\right)}\right] \leftrightarrow V\_{S}\left(p\right)= \frac{d}{a}.p.\left[\frac{A}{\left(p-α\_{1}\right)}+\frac{B}{\left(p-α\_{2}\right)}\right].V\_{e}(p)$$

$V\_{e}\left(p\right) est un échelon à E : $$V\_{e}\left(p\right) -\rightarrow Laplace-\rightarrow \frac{E}{p}$

On obtient l’expression suivante :

$$V\_{S}\left(p\right)= \frac{d.E}{a}.\left[\frac{A}{\left(p-α\_{1}\right)}+\frac{B}{\left(p-α\_{2}\right)}\right]$$

$ \frac{1}{(p-α)} -\rightarrow Laplace inverse-\rightarrow e^{αt}$

Transformons l’équation Laplacienne et équation temporelle pour obtenir Vs(t) :

$$V\_{S}\left(p\right)= \frac{d.E}{a}.\left[\frac{A}{\left(p-α\_{1}\right)}+\frac{B}{\left(p-α\_{2}\right)}\right] -\rightarrow Laplace inverse-\rightarrow V\_{s}\left(t\right)=\frac{d.E}{a}.\left[A.e^{α\_{1}t}+B.e^{α\_{2}t}\right]$$

$$V\_{s}\left(t\right)=\frac{E}{R\_{1}.C\_{1}}.\left[\frac{e^{α\_{1}t}-e^{α\_{2}t}}{α\_{1}-α\_{2}}\right]$$