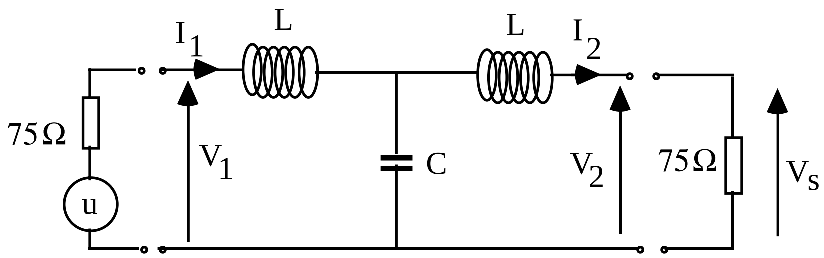
ENSEIRB Filière Electronique $1^{ère}$ Année AU 101 Circuits	Année 2006/2007 Session de juin Lundi 20 juin 2007

CIRCUITS

2 heures ; documents autorisés

On veut interposer, entre un générateur d'impédance interne R_i = 75 Ω et une charge de même impédance, un filtre ayant la structure du quadripôle (en réalité le biporte) ci-dessous :



On sait que la transmission de puissance du générateur vers la charge sera maximale lorsque l'impédance vue par le générateur sera la conjuguée de son impédance propre (ici 75Ω+j0)

1- On demande de déterminer L et C de telle sorte que le quadripôle (biporte) ait une bande passante comprise entre 0 et 10 mégahertz, et qu'il assure la transmission de puissance maximale pour la fréquence centrale (5 MHz).

2- Le générateur délivre une tension à vide, $u = U_0 \sin\omega t$. Le générateur, le filtre et la charge étant reliés, déterminer $v_s(t)$ lorsque la fréquence du générateur est de 5 MHz.

(on conseille d'utiliser le générateur équivalent de Thévenin ; ceux qui n'ont pas pu résoudre la première question ne pourront pas faire l'application numérique).

3- Le générateur délivre, à vide, un échelon unitaire de tension. Déterminer $v_s(t)$.

SESSION de juin 2007

Circuits

Corrigé

1. Détermination de **L** et **C** pour une bande passante de 0 à 10 MHz et une transmission de puissance maximale.

a) Transmission de puissance maximale :

Le quadripôle (biporte) doit montrer 75Ω à la source. Comme il est chargé par 75Ω, 75Ω, représente son impédance itérative.

Le biporte est passif et symétrique. Dans ce cas, on a (voir cours)

$$Z_i = \frac{T_{12}}{\mathrm{sh}\,\gamma},$$

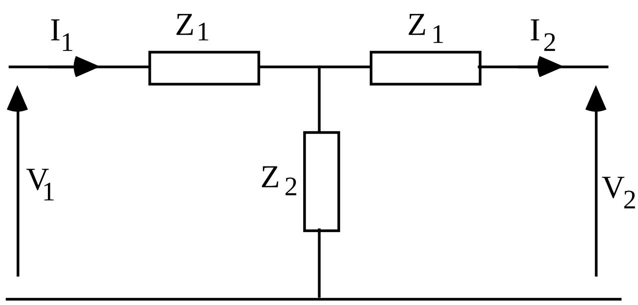
Dans cette expression, Z_i est l'impédance itérative (valeur unique puisque le biporte est symétrique) et T_{12} le coefficient de transfert inverse de la matrice [T].

On calcule sh γ selon la relation :

$$\mathrm{sh}\,\gamma = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2} = \frac{\mu'_1 - \mu'_2}{2}$$

μ'_1 et μ'_2 sont les valeurs propres de [T].

On calcule $[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ Pour un quadripôle (ici un biporte) passif et symétrique, on a : $T_{11} = T_{22}$ et $T_{12} = T_{21}$; on détermine $T_{11} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)_{I_2=0}$ et $T_{12} = \left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2=0}$ (I_2 est sortant)



Après quelques calculs, on trouve :

$$\begin{cases} T_{11} = \dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \\ T_{12} = \dfrac{Z_1}{Z_2}(Z_1 + 2Z_2) \end{cases}$$

μ'_1 et μ'_2 sont les valeurs propres de [T]. Elles sont solution de :

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\mu' & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}-\mu' \end{vmatrix}=0 \qquad \text{soit } \mu'^2-(T_{11}+T_{22})\,\mu'+T_{11}T_{22}-T_{21}T_{12}=0$$

Comme $(T_{11}+T_{22}) = 2\,T_{11}$ et $T_{11}T_{22}-T_{21}T_{12} = |T| = 1$,
Il vient :

$$\begin{cases} \mu'_1 = T_{11}+\sqrt{T_{11}^{\,2}-1} \\ \mu'_2 = T_{11}-\sqrt{T_{11}^{\,2}-1} \end{cases}$$

On sait que $\mu'_1\mu'_2 = 1$; $|\mu'_1|$ est donc supérieur ou égal à 1, donc $|T_{11}|\geq 1$ et la racine carrée est réelle.

On en déduit $\mathrm{sh}\,\gamma = \dfrac{\mu'_1-\mu'_2}{2} = \sqrt{T_{11}^{\,2}-1}$ et $Z_i = \dfrac{T_{12}}{\sqrt{T_{11}^{\,2}-1}}$

Après quelques calculs, $\boxed{Z_i = \sqrt{Z_1(Z_1+2Z_2)} = \sqrt{2\dfrac{L}{C}-L^2\omega^2}}$ (1)

b) Bande passante de 0 à 10 MHz :

Lorsqu'un quadripôle non dissipatif est fermé sur son impédance itérative, on a (voir cours) :

$$-1\leq T_{11}\leq +1 \;\Leftrightarrow -1\leq \frac{jL\omega+\dfrac{1}{jC\omega}}{\dfrac{1}{jC\omega}}\leq +1, \quad \text{soit : } -1\leq 1-LC\omega^2\leq +1$$

ou : $\boxed{0\leq LC\omega^2\leq +2}$ (2)

Des deux équations (1) et (2), on déduit, après application numérique :

$$\begin{cases} 75 = \sqrt{2\dfrac{L}{C}-L^2(2\pi.5.10^6)^2} \\ LC(2\pi.10^7)^2 = 2 \end{cases}$$

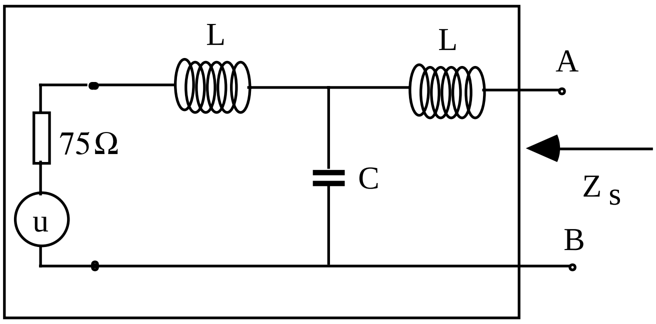
On trouve : $\boxed{\begin{cases} L = 1{,}38.10^{-6}\ \mathrm{H} \\ C = 0{,}368.10^{-9}\ \mathrm{F} \end{cases}}$

2. Détermination de $V_s(t)$ pour une entrée sinusoïdale.

A- On a le circuit suivant (à vide) :

On recherche le générateur de THEVENIN.

a. Impédance vue de AB (quadripôle symétrique) : $Z_s=75\Omega$, puisque 75Ω est l'impédance itérative.



b. V_{AB} à vide :

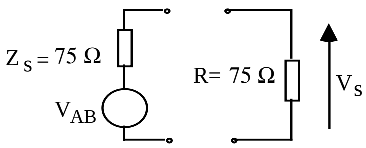
$$V_{AB} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R} u(t) = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} u(t)$$

<u>A.N.</u> : $V_{AB} = \dfrac{1}{0{,}5 + j0{,}866} U_0 e^{j\omega t}$

Soit : $V_{AB} = e^{-j\frac{\pi}{3}} U_0 e^{j\omega t} = U_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{3})}$

Donc à vide, $\boxed{V_{AB} = U_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})}$

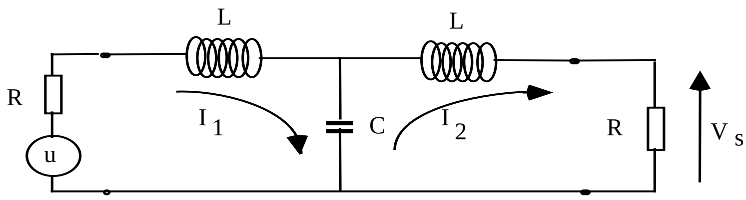
B- On branche l'impédance R=75Ω.



D'où : $\boxed{V_s = \dfrac{V_{AB}}{2} = \dfrac{U_0}{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})}$

3. Réponse indicielle.

On détermine la transmittance $\dfrac{V_s(p)}{U(p)}$



Soient les équations :

$$\begin{cases} RI_1 + LpI_1 + \dfrac{I_1 - I_2}{Cp} = U(p) \\ \dfrac{I_2 - I_1}{Cp} + LpI_2 + RI_2 = 0 \\ V_s = RI_2 \end{cases}$$

En calculant $I_1=f_1(U)$ et $I_2=f_2(U)$, on obtient $\frac{V_s}{U}$,

Soit : $$\frac{V_s}{U} = \frac{1}{2(1+\frac{L}{R}p)(\frac{LC}{2}p^2 + \frac{RC}{2}p + 1)}$$

Avec $U(p) = \frac{1}{p}$ on obtient $$V_s(p) = \frac{0,5}{p(1+\frac{L}{R}p)(\frac{LC}{2}p^2 + \frac{RC}{2}p + 1)}$$

On décompose en éléments simples :

$$V_s(p) = \left[\frac{A}{p} + \frac{B}{1+\frac{L}{R}p} + \frac{Xp+Y}{\frac{LC}{2}p^2 + \frac{RC}{2}p + 1}\right]$$

On détermine A et B, puis X et Y par identification :

A=1 ; $B = -\frac{L}{R}$. Le numérateur de la fraction rationnelle s'écrit, après calculs :

$$X\frac{L}{R}p^3 + (\frac{LC}{2} + X + Y\frac{L}{R})p^2 + (\frac{RC}{2} + Y)p + 1 \equiv 1$$

On en déduit : $X \equiv 0$

Il faut : $$\begin{cases} \dfrac{LC}{2} + Y\dfrac{L}{R} \equiv 0 & (3) \\ \dfrac{RC}{2} + Y \equiv 0 & (4) \end{cases}$$

L'équation (3) s'écrit : $\frac{RC}{2} + Y \equiv 0$; elle est identique à (4) et donc compatible.

On en déduit $Y = -\frac{RC}{2}$

Finalement, $V_s(p)$ vaut numériquement :

$$V_s(p) = 0,5\left[\frac{1}{p} - \frac{L}{R}\frac{1}{1+\frac{L}{R}p} - \frac{RC}{2}\frac{1}{\frac{LC}{2}p^2 + \frac{RC}{2}p + 1}\right]$$

L'expression : $\frac{RC}{2}\frac{1}{\frac{LC}{2}p^2 + \frac{RC}{2}p + 1}$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{RC}{2}\frac{1}{\frac{LC}{2}p^2 + \frac{RC}{2}p + 1} = \frac{R}{L\sqrt{\frac{2}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}\frac{\sqrt{\frac{2}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\left[(p + \frac{R}{2L})^2 + (\frac{2}{LC} - \frac{R^2}{4L^2})\right]}$$

Que l'on peut identifier à : $\dfrac{K}{\omega}\dfrac{\omega}{\left[(p+\alpha)^2+\omega^2\right]}$

D'où $v_s(t)$ qui vaut numériquement :

$$\boxed{v_s(t) = 0{,}5\left[1 - e^{-5{,}44.10^7 t} - 0{,}961 e^{-2{,}72.10^7 t}\sin 5{,}66.10^7 t\right]}$$

<u>Remarque</u> : $\omega = 5{,}66.10^7$ correspond à une fréquence de 9 MHz.

La réponse indicielle du biporte est esquissée à la figure ci-après :