.1 Ligne Lisse $\mathcal{R}$

.1.1 Introduction

La ≪ Smooth Infinitesimal Analysis ≫ qui sera appelée ici ≪ la Ligne Lisse ≫[1] est une reformulation de l'analyse, développée dans les années 1970, basée sur des idées de Francis William Lawvere (théorie des catégories), un mathématicien américain (1937 -). Dans cette théorie, les infinitésimaux sont des éléments nilpotents, et même plus précisément nilcarrés, c'est à dire que ε est un infinitésimal si et seulement si $\varepsilon^2 = 0$.

A la place de ≪ Smooth Infinitesimal Analysis ≫ on trouve aussi ≪ Synthetic Differential Geometry ≫ .

.1.2 Définition

La Ligne Lisse, qui sera notée $\mathcal{R}$ est munie de deux opérations, notées $+$ et $\cdot$ ainsi que d'une relation binaire notée $<$ qui vérifie les axiomes suivants :

Axiome 1 : $(\mathcal{R}, +, \cdot, 0, 1)$ est un anneau commutatif unitaire qui vérifie en plus :
$\forall x\, \exists y\, ((x \neq 0) \Rightarrow (x \cdot y = 1))$

Axiome 2 : $(\mathcal{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ vérifie

a) $\forall x\, (\neg(x < x))$

b) $\forall x\, \forall y\, (\neg((x < y) \wedge (y < x)))$

c) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (((x < y) \wedge (y < z)) \Rightarrow (x < z))$

d) $0 < 1$

e) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x < y) \Rightarrow (x + z < y + z))$

f) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (((0 < z) \wedge (x < y)) \Rightarrow (x \cdot z < y \cdot z))$

g) $\forall x\, \forall y\, (\neg(x = y) \Rightarrow ((x < y) \vee (y < x)))$

Axiome 3 : $\forall x\, \exists!\, y\, ((0 < y) \wedge (y = x^2))$

Axiome 4 : En notant $\Delta = \{\varepsilon \,|\, (\varepsilon \in \mathcal{R}) \wedge (\varepsilon^2 = 0)\}$, alors pour toute fonction $f : \Delta \mapsto \mathcal{R}$:

$$\exists!\, \alpha_f \in \mathcal{R}\, \forall \varepsilon \in \Delta (f(\varepsilon) = f(0) + \alpha_f \cdot \varepsilon)$$

Ces axiomes peuvent paraître bizarres, puisque les Axiomes 1 et 2 semblent dire que $(\mathcal{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ est un corps ordonné, et l'axiome 4 dit que toutes les fonctions sont continues en 0, et même plus que toutes les fonctions sont des morceaux de droites recollés (résultat étonnant).

On peut même voir (ou croire) que $\Delta = \{0\}$, en effet : soit $\varepsilon \in \Delta$ tel que $\neg(\varepsilon = 0)$, donc il existe ε^{-1}, tel que $\varepsilon\varepsilon^{-1} = 1$, or $\varepsilon^2 = 0$ et donc $(\varepsilon^2)\varepsilon^{-1} = \varepsilon(\varepsilon\varepsilon^{-1})$ c'est à dire $\varepsilon(1) = (0)\varepsilon$ et donc $\varepsilon = 0$, mais ce résultat est contradictoire avec l'unicité demandé par l'axiome 4 (sinon on aurait $0 = 1$).

En fait, les axiomes précédents doivent se comprendre dans le cadre de la logique intuitionniste dans laquelle le tiers exclu ne s'applique pas, alors que la ≪ démonstration ≫ ci-dessus l'utilise.

1. Aucune traduction officielle ne nous est connue.

.1.3 Mode de construction, Modèles

Du fait de l'utilisation de la logique intuitionniste, la Ligne Lisse ne s'interprète pas dans la catégorie des ensembles [2], mais plutôt dans un topos [3],

Bref [4] schéma d'une construction (on ne considérera que des « petites » catégories) :

1. Soit **Set** la catégorie des ensembles.
   Soit **Man** la catégorie des variétés différentielles dont les flèches sont C^∞.
   Soit **ACU** la catégorie des Anneaux Commutatifs Unitaires.
2. L'ensemble des applications d'une variété M dans $\mathbb{R}$ peut être naturellement muni d'une structure d'Anneau Commutatif Unitaire avec les deux opérations suivantes :
   $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
   $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
   Cet anneau sera noté CM (C pour Coordonnées).
3. On considère la collection $\mathfrak{A}$ des Anneaux Commutatifs Unitaires qui sont l'anneau des coordonnées d'une variété M de **Man**.
4. On définit l'anneau $\mathbb{R}^\circ = (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$, où les opérations sont définies par :
   $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$
   $(a,b) \otimes (c,d) = (ac, ad+bc)$ [5].
5. Soit Δ tel que $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}^\Delta$ ou encore $\mathbb{R}^\circ = C\Delta$.
   $\mathbb{R}^\circ$ est ajouté à $\mathfrak{A}$.
6. A toute application C^∞ de M dans N on associe l'homomorphisme d'Anneaux de CM dans CN (ce qui permet de construire un foncteur contravariant de **Man** dans $\mathfrak{A}$).
7. On construit le topos $\mathbf{Set}^{\mathfrak{A}}$. Ce topos n'a pas toutes les propriétés nécessaires (pour la relation d'ordre par exemple).
8. Enfin on enrichit ce topos en un autre topos $\mathcal{E}$ ayant toutes les propriétés voulues.

.1.4 Propriétés analytiques

Soit une fonction $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$, alors pour tout $x \in \mathcal{R}$, on considère la fonction $\gamma_x : \Delta \mapsto \mathcal{R}$ définie par :

$$\gamma_x(\varepsilon) = f(x+\varepsilon)$$

En appliquant l'axiome 4 à γ_x on obtient qu'il existe un unique α_{γ_x} tel que $\gamma_x(\varepsilon) = \gamma_x(0) + \alpha_{\gamma_x}\varepsilon$.

C'est à dire qu'il existe un unique α_{γ_x} tel que $f(x+\varepsilon) = f(x) + \alpha_{\gamma_x}\varepsilon$ (principe appelé principe de micro-affinité), en posant $f'(x) = \alpha_{\gamma_x}$, on peut finalement écrire $f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon$.

Ce qui montre que toutes les fonctions de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ sont continues (cf. infra pour un exemple … dérangeant) et mêmes dérivables (en appelant, donc par définition, f' la dérivée de f), et en itérant on obtient qu'elles sont en fait C^∞.

Cette façon de définir la dérivée permet de démontrer très rapidement les formules usuelles de dérivation, nous allons donner deux exemples : $(fg)'$ ou $(f\circ g)'$.

Mais avant, nous avons besoin d'un petit lemme :

Lemme 1 (de micro-intégrité)**.** $\forall x \in \mathcal{R} \forall y \in \mathcal{R} (\forall\varepsilon \in \Delta\, (x\varepsilon = y\varepsilon) \Rightarrow (x = y))$

Ce lemme est une conséquence immédiate de l'axiome 4 (pour la fonction $f(\varepsilon) = x\varepsilon = y\varepsilon$).

Formule pour le produit de fonctions :
- $(fg)(x+\varepsilon) = f(x+\varepsilon)g(x+\varepsilon) = (f(x) + f'(x)\varepsilon)(g(x) + g'(x)\varepsilon)$
- En effectuant la multiplication on obtient $f(x)g(x) + f(x)g'(x)\varepsilon + f'(x)g(x)\varepsilon + +f'(x)g'(x)\varepsilon^2$
- Comme $\varepsilon^2 = 0$, on obtient $(fg)(x+\varepsilon) = (fg)(x) + (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))\varepsilon$

2. A strictement parler, la Ligne Lisse ne devrait pas avoir sa place dans un document appelé « Ensembles de Nombres ».
3. cf. Les références.
4. Voir les détails dans le livre de John Bell *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy* dans les références.
5. On peut reconnaître dans cette opération, celle de $\mathcal{R}$: $(a+\varepsilon b)\cdot(c+\varepsilon d) = ac + \varepsilon^2 bd + \varepsilon ad + \varepsilon bc = ac + \varepsilon(ad+bc)$.

- Or $(fg)(x+\varepsilon) = (fg)(x) + (fg)'(x)\varepsilon$
- Par le lemme de micro-intégrité on obtient $(fg)'(x) = (fg' + f'g)(x)$.

Formule pour la composition de fonctions :
- $(f \circ g)(x+\varepsilon) = f(g(x+\varepsilon)) = f(g(x) + g'(x)\varepsilon)$
- Or $g'(x)\varepsilon \in \Delta$ puisque $(g'(x)\varepsilon)^2 = (g'(x))^2\varepsilon^2 = 0$.
- Donc $f(g(x) + g'(x)\varepsilon) = f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot g'(x)\varepsilon$
- En utilisant à nouveau le lemme de micro-intégrité on obtient $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)) \cdot g'(x)$.

Comme nous l'avons montré plus haut, toutes les fonctions $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ sont continues, ce résultat est, pour dire le moins, surprenant, qu'en est-il, par exemple de la fonction définie par

$$\begin{cases} (x=0) & \Rightarrow (f(x)=0) \\ & \bigwedge \\ \neg(x=0) & \Rightarrow (f(x)=1) \end{cases}$$

Il est clair que dans le cas usuel, cette fonction n'est pas continue en 0, or dans le cas de la Ligne Lisse elle est parfaitement continue, puisque toutes les fonctions sont continues.

Cela vient de ce que la fonction telle que définie ci-dessus n'est pas complètement (n'est pas vraiment) définie, en effet il y a des nombres pour lesquels on n'a pas : $(x = 0) \vee \neg(x = 0)$, puisque le tiers exclu n'est pas applicable dans le cadre de la Ligne Lisse.

Il est inutile de chercher un exemple plus sophistiqué, mais utilisant le même principe, car la Ligne Lisse vérifie le principe *d'indécomposabilité* : il n'est pas possible de définir une partition de $\mathcal{R}$ en deux sous-ensembles ; en effet si cela était possible, nous pourrions construire une fonction non-continue, ce qui est impossible sur $\mathcal{R}$.

On peut considérer Δ comme un voisinage de 0, et on peut aussi envisager un autre voisinage de 0 intéressant :

$$[0\,;0] = \{x \mid (x \in \mathcal{R}) \wedge \neg\neg(x=0)\}$$

La notation $[0; 0]$ est justifiée par une autre définition équivalente :

$$[0\,;0] = \{x \mid (x \in \mathcal{R}) \wedge (\neg(x>0)) \wedge (\neg(x<0))\}$$

.1.5 Propriétés algébriques

Soit l'espace Δ^Δ des applications de Δ dans lui-même, et son sous-ensemble $(\Delta^\Delta)_0$ des applications f de Δ dans lui-même telles que $f(0) = 0$.

Δ^Δ peut-être muni d'une structure de monoïde avec la composition comme multiplication (qui est, définie, associative et unitaire) :

Soit $f \in \Delta^\Delta$ et $g \in \Delta^\Delta$ par l'axiome 4 on peut écrire

- $\exists!\, \alpha_f \in \mathcal{R}\, \forall\varepsilon \in \Delta(f(\varepsilon) = f(0) + \alpha_f \cdot \varepsilon)$ et
- $\exists!\, \alpha_g \in \mathcal{R}\, \forall\varepsilon \in \Delta(g(\varepsilon) = g(0) + \alpha_g \cdot \varepsilon)$
- $(g \circ f)(\varepsilon) = g(f(\varepsilon)) = g(f(0) + \alpha_f \cdot \varepsilon) = g(f(0)) + \alpha_g(\alpha_f\varepsilon)$ (en appliquant le principe de micro-affinité).

En considérant le sous-monoïde $((\Delta^\Delta)_0, \circ)$, c'est à dire les fonctions vérifiant $(f(\varepsilon) = \alpha_f \cdot \varepsilon)$ il apparaît immédiatement que $\varphi : \mathcal{R} \mapsto (\Delta^\Delta)_0$ qui à $\alpha \in \mathcal{R}$ fait correspondre la fonction f de Δ dans lui-même telle que $f(\varepsilon) = \alpha\varepsilon$, est un isomorphisme entre $(\mathcal{R}, \times)$ et $((\Delta^\Delta)_0, \circ)$.

La fonction précédente permet de voir α comme le quotient de deux infinitésimaux, et comme ce résultat est valide pour tous les éléments de $\mathcal{R}$, il est possible de considérer $\mathcal{R}$ comme l'espace des quotients possibles de deux infinitésimaux, ce qui rappelle une définition d'Euler qui considérait les réels comme les résultats possibles de $\dfrac{0}{0}$; c'est pourquoi Lawvere suggéra que $\mathcal{R}$ soit appelé l'espace des réels d'Euler.

La question de l'existence d'infinitésimaux inversibles n'est pas décidable dans l'axiomatique de la Ligne Lisse, aussi, il existe des modèles avec des infinitésimaux inversibles (certains d'entre eux) et des modèles sans infinitésimaux inversibles.

.1.6 Utilisation en physique

A notre connaissance la logique intuitionniste, et donc en particulier la Ligne Lisse, n'est pas très utilisée en physique, même s'il est toujours possible de transposer un calcul avec infinitésimaux standard en un calcul sur la Ligne Lisse.

En tout état de cause, on peut consulter :

1. P. Weingartner, *Basis Logic for Application in Physics and Its Intuitionistic Alternative*, Foundations of Physics, Vol 40, N° 9-10, pages 1578 - 1596, 2010.
2. J. L. Bell, *Smooth Infinitesimal Analysis in Physics*, Nonstandard Methods in Mathematics, International Conference, Université de Pise, 2006.

.1.7 Références

1. G. Hellman, *Mathematical Pluralism : The Case of Smooth Infinitesimal Analysis*, University of Minnesota, 2010.
2. J. L. Bell, *Comparing the Smooth and Dedekind Reals in Smooth Infinitesimal Analysis*, University of Western Ontario, 2002.
3. S. Naranong, *Synthetic Calculus : A Brief Introduction to Smooth Infinitesimal Analysis*, Texas Agricultural and Mechanical University, 2010.
4. R. P. Kostecki, *An Introduction to Topos Theory*, Institute of Theoretical Physics, Université de Varsovie, Pologne, 2011.
5. J. L. Bell, *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Polimetrica, 349 pages, 2005.