Oeuvres complètes de Laplace. Tome 9 / publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par MM. les secrétaires [...]

MÉMOIRE SUR LES PROBABILITÉS (¹)

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1778; 1781.

I.

Je me propose de traiter dans ce Mémoire deux points importants de l'analyse des hasards qui ne paraissent point avoir encore été suffisamment approfondis : le premier a pour objet la manière de calculer la probabilité des événements composés d'événements simples dont on ignore les possibilités respectives; l'objet du second est l'influence des événements passés sur la probabilité des événements futurs, et la loi suivant laquelle, en se développant, ils nous font connaître les causes qui les ont produits. Ces deux objets, qui ont beaucoup d'analogie entre eux, tiennent à une métaphysique très délicate, et la solution des problèmes qui leur sont relatifs exige des artifices nouveaux d'analyse; ils forment une nouvelle branche de la théorie des probabilités, dont l'usage est indispensable lorsqu'on veut appliquer cette théorie à la vie civile. Je donne, relativement au premier, une méthode générale pour déterminer la probabilité d'un événement quelconque, lorsqu'on ne connaît que la loi de possibilité des événements simples, et, dans le cas où cette loi est inconnue, je détermine celle dont on doit faire usage. La considération du second objet me conduit à parler des naissances : comme cette matière est une des plus intéressantes auxquelles on puisse appliquer le Calcul des probabilités, je fais en sorte de la traiter avec tout le soin dû à son impor-

(¹) Remis le 19 juillet 1780.

tance, en déterminant quelle est, dans ce cas, l'influence des événements observés sur ceux qui doivent avoir lieu, et comment, en se multipliant, ils nous découvrent le véritable rapport des possibilités des naissances d'un garçon et d'une fille. En généralisant ensuite ces recherches, je parviens à une méthode pour déterminer, non seulement les possibilités des événements simples, mais encore la probabilité d'un événement futur quelconque, lorsque l'événement observé est très composé, quelle que soit d'ailleurs sa nature. Je donne, à cette occasion, la solution de quelques problèmes intéressants dans l'histoire naturelle de l'homme, tels que celui du plus ou moins de facilité des naissances des garçons relativement à celles des filles dans différents climats : c'est ici surtout qu'il est nécessaire d'avoir une méthode rigoureuse pour distinguer, parmi les phénomènes observés, ceux qui peuvent dépendre du hasard, de ceux qui dépendent de causes particulières, et pour déterminer avec quelle probabilité ces derniers indiquent l'existence de ces causes. La principale difficulté que l'on rencontre dans ces recherches tient à l'intégration de certaines fonctions différentielles qui ont pour facteurs des quantités élevées à de très grandes puissances, et dont il faut avoir les intégrales approchées par des suites convergentes : j'ose me flatter que l'analyse dont je me suis servi pour cet objet pourra mériter l'attention des géomètres. Enfin je termine ce Mémoire par quelques réflexions dans lesquelles je présente ce que le Calcul des probabilités m'a paru fournir de lumières sur le milieu que l'on doit choisir entre les résultats de plusieurs observations.

II.

Dans l'analyse des hasards, on se propose de connaître les probabilités des événements composés, suivant une loi quelconque, d'événements simples dont les possibilités sont données; celles-ci peuvent être déterminées de ces trois manières : 1° *a priori*, lorsque, par la nature même des événements, on voit qu'ils sont possibles dans un rapport donné; c'est ainsi que, au jeu de *croix* et de *pile*, si la pièce que l'on jette en l'air est homogène et que ses deux faces soient entièrement semblables, on juge *croix* et *pile* également possibles; 2° *a posteriori*, en répétant un grand nombre de fois l'expérience qui peut amener l'événement dont il s'agit, et en examinant combien de fois il est arrivé; 3° enfin, par la considération des motifs qui peuvent nous déterminer à prononcer sur l'existence de cet événement; si, par exemple, les adresses respectives des deux joueurs A et B sont inconnues, comme on n'a aucune raison de supposer A plus fort que B, on en conclut que la probabilité de A pour gagner une partie est $\frac{1}{2}$. Le premier de ces moyens donne la possibilité absolue des événements; le second la fait connaître à peu près, comme nous le ferons voir dans la suite, et le troisième ne donne que leur possibilité relative à l'état de nos connaissances.

Chaque événement étant déterminé en vertu des lois générales de cet univers, il n'est probable que relativement à nous, et, par cette raison, la distinction de sa possibilité absolue et de sa possibilité relative peut paraître imaginaire; mais on doit observer que, parmi les circonstances qui concourent à la production des événements, il y en a de variables à chaque instant, telles que le mouvement que la main imprime aux dés, et c'est la réunion de ces circonstances que nous nommons *hasard* : il en est d'autres qui sont constantes, telles que l'habileté des joueurs, la pente des dés à retomber sur une de leurs faces plutôt que sur les autres, etc.; celles-ci forment la *possibilité absolue* des événements, et leur connaissance plus ou moins étendue forme leur *possibilité relative*; seules, elles ne suffisent pas pour les produire : il est de plus nécessaire qu'elles soient jointes aux circonstances variables dont j'ai parlé; elles ne font ainsi qu'augmenter la probabilité des événements, sans déterminer nécessairement leur existence.

Les recherches que l'on a faites jusqu'ici sur l'analyse des hasards supposent la connaissance de la possibilité absolue des événements, et, à l'exception de quelques remarques que j'ai données dans les Tomes VI et VII des *Mémoires des Savants étrangers*, je ne sache pas que l'on ait considéré le cas où l'on n'a que leur possibilité relative. Ce cas renferme un grand nombre de questions intéressantes, et la plupart des problèmes sur les jeux s'y rapportent; on peut donc croire que si les géomètres n'y ont pas fait une attention particulière, cela vient de ce qu'ils l'ont regardé comme susceptible des mêmes méthodes que celui où l'on connait la possibilité absolue des événements; cependant la différence essentielle de ces possibilités ne peut manquer d'influer sur les résultats du calcul, en sorte que l'on s'exposerait souvent à des erreurs considérables en les employant de la même manière : c'est ce dont il est aisé de se convaincre par l'exemple suivant.

Supposons que deux joueurs A et B, dont les adresses respectives sont inconnues, jouent à un jeu quelconque, et proposons-nous de déterminer la probabilité que A gagnera les n premières parties.

S'il ne s'agissait que d'une seule partie, il est clair que, A ou B devant nécessairement la gagner, ces deux événements sont également probables, en sorte que la probabilité du premier est $\frac{1}{2}$; d'où, en suivant la règle ordinaire de l'analyse des hasards, on conclut que la probabilité de A pour gagner les n premières parties est $\frac{1}{2^n}$. Cette conséquence serait exacte si la probabilité $\frac{1}{2}$ était fondée sur une égalité absolue entre les possibilités des deux événements dont il s'agit; mais il n'y a d'égalité que relativement à l'ignorance où nous sommes sur les adresses de deux joueurs, et cette égalité n'empêche pas que l'un ne puisse être plus fort que l'autre. Supposons conséquemment que $\frac{1+\alpha}{2}$ représente la probabilité du joueur le plus fort pour gagner une partie, et $\frac{1-\alpha}{2}$ celle du plus faible; en nommant P la probabilité que A gagnera les n premières parties, on aura

$$P = \frac{1}{2^n}(1+\alpha)^n \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{1}{2^n}(1-\alpha)^n,$$

suivant que A sera le plus fort ou le plus faible : or, comme on n'a aucune raison de le supposer plutôt l'un que l'autre, il est visible que, pour avoir la véritable valeur de P, on doit prendre la moitié de la somme des deux valeurs précédentes, ce qui donne

$$P = \frac{1}{2^{n+1}}[(1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n].$$

En développant cette expression, on a

$$P = \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\alpha^4 + \ldots\right].$$

Cette valeur de P étant plus grande que $\frac{1}{2^n}$, lorsque n est plus grand que l'unité, on voit que l'inégalité qui peut exister entre les adresses des deux joueurs favorise celui qui parie 1 contre $2^n - 1$ que A gagnera les n premières parties, pourvu que l'on ignore de quel côté se trouve la plus grande adresse. Cette remarque, que j'ai déjà faite ailleurs, est, si je ne me trompe, très utile dans l'analyse des hasards, non seulement en ce qu'elle montre la nécessité d'avoir égard à l'inégalité inconnue des adresses des joueurs, mais encore en ce que l'on peut souvent déterminer si cette inégalité est favorable ou contraire à celui qui parie d'après le Calcul ordinaire des probabilités.

III.

Considérons encore deux joueurs A et B, chacun avec un nombre donné de jetons, et jouant ensemble de manière que, à chaque coup, celui qui perd donne un jeton à son adversaire; supposons que la partie ne doive finir que lorsqu'il ne restera plus de jetons à l'un des joueurs, et déterminons, dans ce cas, leurs probabilités respectives pour gagner cette partie.

Pour cela, nommons généralement p l'adresse de A, $1-p$ celle de B et y_x la probabilité de A pour gagner la partie, lorsqu'il a x jetons; il peut arriver au coup suivant qu'il gagne un jeton à B, et dans ce cas sa probabilité se change en y_{x+1}; il peut arriver qu'il en donne un à B, ce qui réduit sa probabilité à y_{x-1} : or la probabilité du premier de ces deux événements est p, et celle du second est $1-p$; on aura donc l'équation aux différences finies

$$y_x = p y_{x+1} + (1-p) y_{x-1}.$$

Pour l'intégrer, soit $y_x = Ca^x$, on aura

$$a = pa^2 + 1 - p;$$

les deux racines de cette équation sont $a = 1$ et $a = \frac{1-p}{p}$; partant, si C et C′ représentent deux constantes arbitraires, l'expression complète de y_x sera

$$y_x = C + C'\left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

Pour déterminer ces deux constantes, on observera : 1° que, x étant nul, on a $y_x = 0$, et que, x étant égal au nombre total des jetons de A et de B, on a $y_x = 1$; soient n ce nombre, m le nombre des jetons de A au commencement de la partie, et par conséquent $n-m$ celui des jetons de B, on aura

$$0 = C + C',$$

$$1 = C + C'\left(\frac{1-p}{p}\right)^n,$$

d'où l'on tire

$$C = \frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^n},$$

$$C' = -\frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^n},$$

partant

$$y_x = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^n}.$$

On aura la probabilité y_m de A pour gagner la partie, en changeant dans cette expression x en m, ce qui donne

$$y_m = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n};$$

et, en changeant m en $n - m$, p en $1 - p$, et réciproquement, on aura la probabilité de B pour gagner la partie, et l'on trouvera $1 - y_m$ pour cette probabilité; c'est ce dont il est facile de s'assurer d'ailleurs en considérant que, A ou B devant nécessairement gagner la partie, la somme de leurs probabilités doit être égale à l'unité.

Maintenant, si l'on suppose les adresses des deux joueurs égales, et, par conséquent, $p = \frac{1}{2}$, l'expression précédente de y_m devient $\frac{0}{0}$, ce qui ne fait rien connaître; mais, en différentiant le numérateur et le dénominateur de cette expression par rapport à p, on trouve que dans ce cas $y_m = \frac{m}{n}$, en sorte que les probabilités des deux joueurs A et B sont en raison du nombre de leurs jetons : leurs mises respectives doivent donc être dans le même rapport. Examinons présentement le changement que doit occasionner dans leur sort une inégalité quelconque entre leurs adresses.

Soient $\frac{1+\alpha}{2}$ la plus grande et $\frac{1-\alpha}{2}$ la plus petite; on changera successivement, dans l'expression de y_m, p en $\frac{1+\alpha}{2}$ et $\frac{1-\alpha}{2}$; on aura ainsi deux valeurs qui auront lieu suivant que A sera le plus fort ou le plus faible : la véritable expression de y_m sera donc égale à la moitié de la somme de ces deux valeurs; d'où l'on tire

$$y_m = \frac{1}{2}\,\frac{[(1+\alpha)^{n-m} + (1-\alpha)^{n-m}][(1+\alpha)^m - (1-\alpha)^m]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n};$$

on peut mettre cette expression sous cette forme

$$y_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-\alpha^2)^m\,\frac{[(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n}.$$

Dans le cas de $\alpha = 0$, nous venons de voir que $y_m = \frac{m}{n}$; en sorte que, alors,

$$(1-\alpha^2)^m \frac{[(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n} = \frac{n-2m}{n};$$

or, si l'on suppose m moindre que $\frac{n}{2}$, il est clair que, α augmentant, la fraction $\frac{(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n}$ diminue, ainsi que le facteur $(1-\alpha^2)^m$; on aura donc, dans la supposition de α plus grand que zéro,

$$(1-\alpha^2)^m \frac{[(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n} = \frac{n-2m}{n} - 2h,$$

h étant nécessairement positif. Partant,

$$y_m = \frac{m}{n} + h;$$

d'où il suit que l'inégalité des adresses de A et de B est favorable à celui des deux joueurs qui a le plus petit nombre de jetons.

α restant le même, si m et n augmentent en conservant toujours le même rapport, il est clair que

$$(1-\alpha^2)^m \frac{[(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n}$$

deviendra plus petit, et que l'on peut tellement faire croître n et m, que cette quantité soit plus petite qu'aucune grandeur donnée; donc, si les deux joueurs conviennent de doubler, de tripler, etc. leurs jetons, leur sort, qui, dans le cas où les adresses sont égales, n'en sera point changé, deviendra très différent s'il y a une inégalité quelconque entre leurs adresses; la probabilité de celui qui a le plus petit nombre de jetons augmentera de plus en plus, jusqu'au point de différer infiniment peu de $\frac{1}{2}$, et par conséquent de la probabilité de son adversaire.

IV.

En général, si, dans un problème quelconque relatif aux deux joueurs A et B, on représente par $\frac{1+\alpha}{2}$ l'adresse du plus fort, et par $\frac{1-\alpha}{2}$ celle du plus faible, le sort P du joueur A supposé le plus fort sera exprimé par une fonction de α, qui, réduite en série, aura la forme suivante :

$$P = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots.$$

En changeant α en $-\alpha$, on aura, pour l'expression de P, dans le cas où le joueur A est le plus faible,

$$P = a - a_1\alpha + a_2\alpha^2 - a_3\alpha^3 + \ldots.$$

On aura donc la véritable valeur de P en prenant la moitié de la somme des deux séries précédentes, ce qui donne

$$P = a + a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4 + \ldots.$$

Lorsque α est très petit, on peut s'en tenir aux deux premiers termes de cette série, et l'on a sensiblement

$$P = a + a_2\alpha^2;$$

on connaîtra donc alors, par le signe de a_2, si P est plus grand ou moindre que dans le cas où les adresses sont égales; il sera plus grand si a_2 est positif, et moindre s'il est négatif.

De ce qu'il ne reste dans la valeur de P que des puissances paires de α, il résulte que le cas de $\alpha = 0$ indique toujours un maximum ou un minimum pour cette valeur; mais il est possible qu'elle soit susceptible de plusieurs maxima ou minima, et c'est ce qui aura lieu si la différentielle de P, prise par rapport à α et égalée à zéro, donne pour α une ou plusieurs valeurs positives, comprises entre les limites dans lesquelles α peut être renfermé; dans ce cas, on cherchera si la supposition de $\alpha = 0$ donne le plus grand de tous ces maxima, ou le plus petit de tous ces minima; si cela est, on pourra s'assurer que le sort P de A est ou n'est pas plus avantageux que lorsque les adresses sont égales; mais, si cela n'est pas, il sera impossible de prononcer sur cet objet, à moins que de connaître la loi de possibilité des adresses respectives.

V.

Il est facile d'étendre les remarques précédentes à un nombre quelconque de joueurs; supposons, par exemple, i joueurs A, B, C, D, ..., et que l'on propose de déterminer la probabilité P que les r joueurs A, B, C, ... gagneront les n premières parties. Il est clair que, si leurs adresses étaient égales, la probabilité de chacun des joueurs pour gagner une partie ou, ce qui revient au même, leur adresse respective serait $\frac{1}{i}$, en sorte que la probabilité cherchée P serait $\left(\frac{r}{i}\right)^n$; mais, s'il existe une inégalité quelconque entre les adresses des joueurs, en nommant $\frac{1+\alpha}{i}$ la plus grande, $\frac{1+\alpha'}{i}$ la deuxième dans l'ordre de grandeur, $\frac{1+\alpha''}{i}$ la troisième, et ainsi de suite, on aura d'abord

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots = 0,$$

puisque la somme de toutes ces adresses doit être égale à l'unité.

Si l'on nomme ensuite s, s', s'', ... les différentes sommes que l'on peut former en ajoutant un nombre r des adresses précédentes, on aura autant de valeurs correspondantes de P, qui seront $P = s^n$, $P = s'^n$, $P = s''^n$, ...; le nombre de ces valeurs est égal à celui des combinaisons de i quantités, prises r à r, et, par conséquent, égal à $\frac{i(i-1)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r}$; on aura donc la véritable valeur de P, en divisant par ce nombre la somme des valeurs précédentes, ce qui donne

$$P = \frac{1.2.3\ldots r}{i(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)}(s^n + s'^n + s''^n + \ldots).$$

Il est aisé de voir que chaque adresse se trouve répétée dans la somme

$s + s' + s'' + s''' + \ldots$ autant de fois que l'on peut combiner $i - 1$ quantités $r - 1$ à $r - 1$; d'où il suit que cette somme est indépendante de $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ et égale à

$$\frac{(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1)}.$$

Or on prouvera facilement que, dans ce cas, la somme

$$s^n + s'^n + s''^n + \ldots$$

est la plus petite possible lorsque $s = s' = s'' = \ldots$, ce qui suppose $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots = 0$; donc la valeur de P est la plus petite lorsque les adresses des joueurs sont égales, en sorte que l'inégalité de ces adresses favorise celui qui parie que les n premières parties seront gagnées par les r joueurs A, B, C, ...

Il est visible que l'on peut faire des remarques analogues sur les jeux dans lesquels on fait usage de polyèdres, tels que le jeu des dés; car, avec quelque soin qu'on ait formé ces polyèdres, il s'y rencontre nécessairement entre leurs différentes faces des inégalités qui résultent de l'hétérogénéité de la matière qu'on emploie et des défauts inévitables dans leur construction. En général, ces remarques ont lieu pour tous les événements dont la possibilité est inconnue et peut varier dans certaines limites; et, si dans la suite nous considérons particulièrement les événements du jeu entre plusieurs joueurs dont les adresses sont inconnues, ce n'est que pour nous rendre plus clair, en fixant les idées sur un objet déterminé.

VI.

Il est infiniment peu probable que les adresses de deux joueurs A et B soient parfaitement égales; mais, en même temps que l'on ignore de quel côté se trouve la plus grande ou la plus petite adresse, on ignore également la quantité de leur différence; ainsi, tout ce que l'on peut conclure de la théorie précédente, c'est que le sort de tel ou tel joueur est plus favorable que suivant le Calcul ordinaire des probabilités, sans que l'on soit en état d'assigner de combien il est augmenté.

Cependant, si l'on connaissait la limite et la loi de possibilité des valeurs de α, rien ne serait plus facile que de résoudre exactement ce problème; car, si l'on nomme q cette limite et que l'on représente par $\psi(\alpha)$ la probabilité de α, on voit d'abord que, α devant nécessairement tomber entre o et q, la fonction $\psi(\alpha)$ doit être telle que l'on ait

$$\int d\alpha\,\psi(\alpha) = 1,$$

l'intégrale étant prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = q$. On multipliera donc par $d\alpha\,\psi(\alpha)$ les probabilités déterminées par ce qui précède, et, en intégrant ces produits depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = q$, on aura les probabilités cherchées; on trouvera de cette manière, pour la valeur de P dans l'article II,

$$P = \int \frac{d\alpha\,\psi(\alpha)}{2^{n+1}}[(1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n].$$

Si, par exemple, $\psi(\alpha)$ est égal à une constante l, en sorte que toutes les valeurs de α soient également possibles, l'équation $\int d\alpha\,\psi(\alpha) = 1$ donnera $l = \frac{1}{q}$, et l'on aura

$$P = \frac{1}{(n+1)q.2^{n+1}}[(1+q)^{n+1} - (1-q)^{n+1}].$$

La quantité α est une fonction du rapport des adresses absolues des deux joueurs; au lieu donc de supposer la loi de sa possibilité immédiatement connue, il est beaucoup plus naturel de la déduire de celle qui représente la possibilité de l'adresse absolue d'un joueur quelconque. Pour cela, comparons les adresses de tous les joueurs à celle d'un joueur unique, que nous prendrons pour unité d'adresse; et, en représentant par l'abscisse x tous ces rapports, concevons, élevées sur chaque point de l'abscisse, des ordonnées y proportionnelles au nombre supposé infini de tous les joueurs dont l'adresse est x : nous aurons ainsi une courbe renfermée entre les limites h et h', h étant la plus petite adresse et h' la plus grande; et il est visible que le rapport de l'ordonnée y à la somme de toutes les ordonnées, ou, ce qui revient au même, à l'aire entière de la courbe, exprimera la probabilité que l'adresse d'un joueur quelconque est x. Cela posé, pour en conclure la loi de possibilité des valeurs de α, soit $y = \varphi(x)$, et nommons a l'intégrale $\int dx\,\varphi(x)$, prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = h'$; soient, de plus, x l'adresse de celui des deux joueurs A et B qui est le plus faible, et $x + u$ celle du joueur le plus fort; on aura

$$\frac{x}{x+u} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

ce qui donne

$$x + u = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,x.$$

Or la probabilité que l'adresse de l'un des joueurs étant x, celle de l'autre sera $x + u$, est égale au double du produit des probabilités de x et de $x + u$, et par conséquent égale à

$$\frac{2\varphi(x)\,\varphi(x+u)}{a^2} = \frac{2\varphi(x)\,\varphi\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,x\right)}{a^2};$$

on aura donc

$$2\int dx\,\frac{\varphi(x)\,\varphi\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,x\right)}{a^2}$$

pour la probabilité entière de α, l'intégrale étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}h'$. Quant à la limite q de α, on observera que, h étant la plus petite adresse et h' la plus grande, on a

$$\frac{h'}{h} = \frac{1+q}{1-q},$$

d'où l'on tire

$$q = \frac{h'-h}{h'+h}.$$

Lorsque la fonction $\varphi(x)$ est inconnue, il est impossible de connaître exactement le sort des deux joueurs A et B, et l'on est réduit à choisir les fonctions les plus vraisemblables. Nous nous occuperons de cet objet dans la suite; mais auparavant nous allons exposer une méthode générale pour déterminer le sort respectif d'un nombre quelconque de joueurs, lorsqu'on ne connait touchant leurs adresses que la loi de leur possibilité : cette matière présente quelques difficultés assez considérables d'analyse, dont la solution est renfermée dans celle du problème suivant.

VII.

Problème. — *Soient n quantités variables et positives $t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, dont la somme soit s et dont la loi de possibilité soit connue; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction donnée $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$ de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur.*

Solution. — Supposons, pour plus de généralité, que les fonctions qui expriment la possibilité des variables $t, t_1, t_2, \ldots$ soient discontinues, et représentons par q la plus petite valeur de t; par $\varphi(t)$ la possibilité de t, depuis $t = q$ jusqu'à $t = q'$; par $\varphi'(t) + \varphi(t)$ sa possibilité, depuis $t = q'$ jusqu'à $t = q''$; par $\varphi''(t) + \varphi'(t) + \varphi(t)$ cette possibilité, depuis $t = q''$ jusqu'à $t = q'''$, et ainsi de suite jusqu'à $t = \infty$. Désignons ensuite les mêmes quantités relatives aux variables $t_1, t_2, t_3, \ldots$ par les mêmes lettres, en écrivant au bas les nombres 1, 2, 3, ..., en sorte que $q_1, q_2, q_3, \ldots$ expriment les plus petites valeurs de $t_1, t_2, t_3, \ldots$, que $\varphi_1(t_1)$ exprime la possibilité de t_1, depuis $t_1 = q_1$ jusqu'à $t_1 = q'_1$, et ainsi du reste; dans cette manière de représenter les possibilités des variables, il est clair que la fonction $\varphi(t)$ a lieu depuis $t = q$ jusqu'à $t = \infty$, que la fonction $\varphi'(t)$ a lieu depuis $t = q'$ jusqu'à $t = \infty$, ainsi de suite. Pour reconnaître les valeurs de $t, t_1, t_2, \ldots$, lorsque ces fonctions commencent à avoir lieu, nous multiplierons $\varphi(t)$ par l^q; $\varphi'(t)$ par $l^{q'}$; $\varphi_1(t_1)$ par $l^{q_1}, \ldots$; les exposants des puissances de l qui multiplient chaque fonction indiqueront alors ces valeurs; il suffira ensuite de supposer $l = 1$ dans le dernier résultat du calcul : c'est à ces artifices très simples que nous devons la facilité avec laquelle nous allons résoudre le problème proposé.

La probabilité de la fonction $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$ est évidemment égale au produit des probabilités de t, t_1, t_2, ..., en sorte que, si l'on substitue pour t sa valeur $s - t_1 - t_2 - \ldots$ que donne l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \ldots = s,$$

le produit de la fonction proposée par sa probabilité sera

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(s - t_1 - t_2 - \ldots, t_1, t_2, \ldots) \\ &\quad\times \left[l^{q} \varphi(s - t_1 - t_2 - \ldots) + l^{q'} \varphi'(s - t_1 - t_2 - \ldots) + \ldots \right] \\ &\quad\times \left[l^{q_1} \varphi_1(t_1) + l^{q'_1} \varphi'_1(t_1) + \ldots \right] \\ &\quad\times \left[l^{q_2} \varphi_2(t_2) + l^{q'_2} \varphi'_2(t_2) + \ldots \right] \\ &\quad\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. .$$

On aura donc la somme de tous ces produits : 1° en multipliant la quantité précédente par dt_1 et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_1 est susceptible; 2° en multipliant cette intégrale par dt_2 et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_2 est susceptible, et ainsi de suite jusqu'à la dernière variable t_{n-1}; mais ces intégrations successives exigent quelques attentions particulières.

Considérons un terme quelconque de la quantité (A), tel que

$$l^{q^{(i)} + q_1^{(i')} + q_2^{(i'')} + \ldots} \psi(s - t_1 - t_2 - \ldots)\, \varphi^{(i)}(s - t_1 - t_2 - \ldots)\, \varphi_1^{(i')}(t_1)\, \varphi_2^{(i'')}(t_2) \ldots .$$

En le multipliant par dt_1, il faut l'intégrer pour toutes les valeurs possibles de t_1; or il est clair que la fonction $\varphi^{(i)}(s - t_1 - t_2 - \ldots)$ n'a lieu que lorsque t ou $s - t_1 - t_2 - \ldots$ est égal ou plus grand que $q^{(i)}$: la plus grande valeur que t_1 puisse recevoir est donc $s - q^{(i)} - t_2 - t_3 - \ldots$. De plus, $\varphi_1^{(i')}(t_1)$ n'ayant lieu que lorsque t_1 est égal ou plus grand que $q_1^{(i')}$, cette quantité est la plus petite valeur que t_1 puisse recevoir; il faut donc prendre l'intégrale dont il s'agit depuis $t_1 = q_1^{(i')}$ jusqu'à $t_1 = s - q^{(i)} - t_2 - t_3 - \ldots$ ou, ce qui revient au même, depuis $t_1 - q_1^{(i')} = 0$ jusqu'à $t_1 - q_1^{(i')} = s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - t_2 - \ldots$.

On trouvera de la même manière que, en multipliant cette nouvelle intégrale par dt_2, il faudra l'intégrer depuis $t_2 - q_2^{(i'')} = 0$ jusqu'à

$$t_2 - q_2^{(i'')} = s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} - t_3 - \ldots .$$

En continuant d'opérer ainsi, on arrivera à une fonction de

$$s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} - \ldots,$$

dans laquelle il ne restera aucune des variables t, t_1, t_2, ... Cette fonction doit être rejetée si $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - \ldots$ est négatif; car il est visible que, dans ce cas, le système de fonctions $\varphi^{(i)}(t)$, $\varphi_1^{(i')}(t_1)$, $\varphi_2^{(i'')}(t_2)$, ... ne peut être employé; en effet, les plus petites valeurs de t_1, t_2, ... étant, par la nature de ces fonctions, égales à $q_1^{(i')}$, $q_2^{(i'')}$, ..., la plus grande valeur que t puisse recevoir est $s - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} - \ldots$; partant, la plus grande valeur de $t - q^{(i)}$ est $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} - \ldots$. Or la fonction $\varphi^{(i)}(t)$ ne peut être employée que lorsque $t - q^{(i)}$ est positif.

Au lieu de rejeter la fonction dont il s'agit, il est égal de supposer alors dans tous les termes de cette fonction $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - \ldots$ constamment égal à zéro; car, en ne considérant, par exemple, que les trois variables t, t_1, t_2, la dernière intégrale relative à dt_2 devant être prise depuis $t_2 - q_2^{(i'')} = 0$ jusqu'à

$$t_2 - q_2^{(i'')} = s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')},$$

il est visible que cette intégrale sera nulle toutes les fois que l'on supposera

$$s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} = 0.$$

Il résulte de ce que nous venons de dire une méthode très simple pour résoudre le problème proposé.

Que l'on substitue : 1° au lieu de t, $q + u$ dans $\varphi(t)$, $q' + u$ dans $\varphi'(t)$, $q'' + u$ dans $\varphi''(t)$, ...; 2° au lieu de t_1, $q_1 + u_1$ dans $\varphi_1(t_1)$, $q'_1 + u_1$ dans $\varphi'_1(t_1)$, ...; 3° au lieu de t_2, $q_2 + u_2$ dans $\varphi_2(t_2)$, ..., et ainsi de suite, les quantités

$$l^q \varphi(t) + l^{q'} \varphi'(t) + \ldots,$$
$$l^{q_1} \varphi(t_1) + l^{q'_1} \varphi'_1(t_1) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui représentent les probabilités de t, t_1, ..., se changeront : la première, dans une fonction de u; la seconde, dans une fonction de u_1, ... Nous désignerons ces fonctions par $\Pi(u)$, $\Pi_1(u_1)$, $\Pi_2(u_2)$, ...

Que l'on change ensuite, dans $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, t en $k+u$, t_1 en k_1+u_1, ..., on aura une fonction de u, u_1, u_2, ..., que nous représenterons par $\Gamma(u, u_1, u_2, \ldots)$; cela posé, on prendra l'intégrale

$$\int dU_1 \Gamma(s-u_1-u_2-\ldots, u_1, u_2, \ldots)\Pi(s-u_1-u_2-\ldots)\Pi_1(u_1)\Pi_2(u_2)\ldots$$

depuis $u_1 = 0$ jusqu'à $u_1 = s - u_2 - u_3 - \ldots$.

On multipliera cette première intégrale par du_2, et on l'intégrera depuis $u_2 = 0$ jusqu'à $u_2 = s - u_3 - \ldots$; on multipliera cette seconde intégrale par du_3, et on l'intégrera depuis $u_3 = 0$ jusqu'à $u_3 = s - u_4 - \ldots$. En continuant ainsi, on arrivera à une fonction de s seule, que nous désignerons par $T(s)$, et cette fonction sera la somme demandée de toutes les valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, multipliées par leurs probabilités respectives; mais, pour cela, il faut avoir soin de changer, dans un terme quelconque multiplié par $l^{q^{(i)}+q_1^{(i')}+q_2^{(i'')}+\ldots}$, k en $q^{(i)}$, k_1 en $q_1^{(i')}$, k_2 en $q_2^{(i'')}$, ...; de diminuer s de l'exposant de l et, par conséquent, d'écrire, au lieu de s, $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} - \ldots$; de faire cette dernière quantité égale à zéro toutes les fois qu'elle sera négative; enfin, de supposer $l = 1$.

Si $\Gamma(u, u_1, u_2, \ldots)$, $\Pi(u)$, $\Pi_1(u_1)$, $\Pi_2(u_2)$, ... sont des fonctions rationnelles et entières des variables u, u_1, u_2, ..., d'exponentielles, de sinus et de cosinus, toutes ces intégrations successives seront possibles, parce qu'il est dans la nature de ces quantités de ne reproduire par les intégrations que des quantités du même genre; dans les autres cas, ces intégrations pourront n'être pas possibles, mais la méthode précédente réduit alors le problème aux quadratures des courbes.

VIII.

Le cas de fonctions rationnelles et entières offre quelques simplifications qu'il n'est pas inutile d'exposer. Pour cela, soit $u^{i}u_1^{i'}u_2^{i''}\ldots$ un produit quelconque des variables u, u_1, u_2, ...; si, après y avoir substitué pour u sa valeur $s - u_1 - u_2 - \ldots$, on le multiplie par du_1, il est facile de s'assurer que l'intégrale

$$\int du_1 (s - u_1 - u_2 - \ldots)^i u_1^{i'} u_2^{i''} \ldots$$

prise depuis $u_1 = 0$ jusqu'à $u_1 = s - u_2 - \ldots$ est

$$\frac{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots i'}{1.2.3.4\ldots(i+i'+1)} (s - u_2 - u_3 - \ldots)^{i+i'+1} u_2^{i''} \ldots;$$

en multipliant cette intégrale par du_2 et en l'intégrant depuis $u_2 = 0$ jusqu'à $u_2 = s - u_3 - \ldots$, on aura pareillement

$$\frac{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots i'.1.2.3\ldots i''}{1.2.3.4\ldots(i+i'+i''+2)} (s - u_3 - \ldots)^{i+i'+i''+2} \ldots$$

et ainsi de suite; donc, si l'on suppose

$$\begin{aligned}
\Pi\,(u) &= A + B\,u + C\,u^2 + \ldots,\\
\Pi_1(u_1) &= A_1 + B_1 u_1 + C_1 u_1^2 + \ldots,\\
\Pi_2(u_2) &= A_2 + B_2 u_2 + C_2 u_2^2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et que l'on désigne par $H u^i u_1^{i'} u_2^{i''}$ un terme quelconque de

$$\Gamma(u, u_1, u_2, \ldots),$$

la partie correspondante de $\daleth(s)$ sera

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned}
&1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots i'.1.2.3\ldots i''\ldots H s^{n+i+i'+i''+\ldots-1}\\
&\times [A + (i+1) B\, s + (i+1)(i+2) C\, s^2 + \ldots]\\
&\times [A_1 + (i'+1) B_1 s + (i'+1)(i'+2) C_1 s^2 + \ldots]\\
&\times [A_2 + (i''+1) B_2 s + (i''+1)(i''+2) C_2 s^2 + \ldots]\\
&\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

pourvu que, dans le développement de cette quantité, au lieu d'une puissance quelconque c de s, on écrive $\frac{s^c}{1.2.3\ldots c}$.

On aura ensuite la partie correspondante de la somme entière des valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$, multipliées par leurs probabilités respectives, en changeant un terme quelconque, tel que $H\lambda l^{\mu} s^{c}$, en $H\lambda(s-\mu)^{c}$, et en substituant dans H, au lieu de k, la partie de l'exposant μ qui est relative à t; au lieu de k_1, la partie relative à t_1 et ainsi du reste.

Si, dans la formule (B), on suppose $H=1$ et $0=i=i'=i''=\ldots$, on aura la somme des valeurs de l'unité, multipliées par leurs probabilités respectives : or il est visible que cette somme, n'étant autre chose que la somme de toutes les combinaisons dans lesquelles l'équation

$$t+t_1+t_2+\ldots=s$$

a lieu, multipliées par leurs probabilités, exprime conséquemment la possibilité de cette équation elle-même. Si, dans les hypothèses précédentes, on suppose de plus que la loi de possibilité est la même pour les r premières variables $t, t_1, \ldots, t_{r-1}$, et que pour les $n-r$ dernières elle soit encore la même, mais autre que pour les premières, on aura

$$\begin{array}{l}
A=A_1 \quad =\ldots=A_{r-1},\\
B=B_1 \quad =\ldots=B_{r-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_r=A_{r+1}=\ldots=A_{n-1},\\
B_r=B_{r+1}=\ldots=B_{n-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

et la formule (B) se changera dans celle-ci

$$(C) \qquad \left\{\begin{array}{l} s^{n-1}\times(A+B\,s+2C\,s^2+\ldots)^{n-r}\\ \qquad\times(A_r+B_r s+2C_r s^2+\ldots)^{r}; \end{array}\right.$$

cette formule servira à déterminer la probabilité que la somme des erreurs d'un nombre quelconque d'observations dont la loi de facilité est connue sera comprise dans des limites données, ce qui peut être utile dans plusieurs circonstances, et particulièrement lorsqu'il s'agit de prévoir le résultat d'un nombre quelconque d'observations. Comme ce problème est d'ailleurs le plus simple auquel on puisse appliquer la méthode précédente, il est très propre à l'éclaircir, et, dans cette vue, nous allons considérer les exemples suivants.

IX.

Supposons $n-1$ observations dont les erreurs puissent s'étendre depuis $-h$ jusqu'à $+g$ et que, en nommant z l'erreur de la première, sa facilité soit exprimée par $a+bz+cz^2$; supposons ensuite que cette facilité soit la même pour les erreurs $z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}$ des autres observations, et cherchons la probabilité que la somme des erreurs de ces observations sera comprise entre les limites p et $p+e$.

Si l'on fait

$$z=t-h, \quad z_1=t_1-h, \quad \ldots, \quad z_{n-2}=t_{n-2}-h,$$

il est clair que $t, t_1, t_2, \ldots$ seront positifs et pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $h+g$; de plus, on aura

$$z+z_1+z_2+\ldots+z_{n-2}=t+t_1+t_2+\ldots+t_{n-2}-(n-1)h.$$

Donc, la plus grande valeur de la somme $z+z_1+\ldots+z_{n-1}$ étant, par la supposition, égale à $p+e$, et la plus petite étant égale à p, la plus grande valeur de $t+t_1+\ldots+t_{n-2}$ sera $(n-1)h+p+e$, et la plus petite sera $(n-1)h+p$; en faisant ainsi

$$(n-1)h+p+e=s \quad \text{et} \quad t+t_1+\ldots+t_{n-2}=s-t_{n-1},$$

t_{n-1} sera toujours positif et pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e. Cela posé, si l'on applique à ce cas les formules des deux articles précédents, on aura

$$q=0, \quad q'=f+g;$$

d'ailleurs, la loi de facilité de l'erreur z étant $a+bz+cz^2$, on en conclura la loi de facilité de t, en changeant z en $t-h$; soit

$$a'=a-bh+ch^2, \quad b'=b-2ch,$$

on aura

$$a'+b't+ct^2$$

pour cette facilité : ce sera donc la fonction $\varphi(t)$; mais, comme, depuis $t=h+g$ jusqu'à $t=\infty$, la facilité des valeurs de t est nulle par l'hypothèse, on aura

$$\varphi'(t) + \varphi(t) = 0,$$

ce qui donne

$$\varphi'(t) = -(a' + b't + ct^2);$$

donc, si l'on fait

$$a'' = a' + b'(h+g) + c(h+g)^2,$$
$$b'' = b' + 2c(h+g),$$

la quantité que nous avons nommée $\Pi(u)$ dans l'article VII sera ici

$$a' + b'u + cu^2 - l^{h+g}(a'' + b''u + cu^2),$$

et l'on aura

$$\Pi_1(u_1), \quad \Pi_2(u_2), \quad \ldots, \quad \Pi_{n-2}(u_{n-2}),$$

en changeant, dans cette quantité, u successivement en u_1, u_2, ..., u_{n-2}.

Quant à la variable t_{n-1}, on observera que la possibilité de l'équation

$$z + z_1 + \ldots + z_{n-2} = \mu$$

étant, quel que soit μ, égale au produit des possibilités de z, z_1, ..., z_{n-2}, la possibilité de l'équation

$$t + t_1 + \ldots + t_{n-2} = s - t_{n-1}$$

sera égale au produit des possibilités de t, t_1, ..., t_{n-2}; mais cette même possibilité est évidemment égale au produit des possibilités de t, t_1, ..., t_{n-1}. La loi de possibilité de t_{n-1} est donc constante et égale à l'unité, et, comme cette variable ne doit s'étendre que depuis $t_{n-1} = 0$ jusqu'à $t_{n-1} = e$, on aura

$$q_{n-1} = 0, \qquad q'_{n-1} = e, \qquad \varphi_{n-1}(t_{n-1}) = 1, \qquad \varphi'_{n-1}(t_{n-1}) + \varphi_{n-1}(t_{n-1}) = 0,$$

partant

$$\varphi'_{n-1}(t_{n-1}) = -1,$$

d'où il est aisé de conclure

$$\Pi_{n-1}(u_{n-1}) = 1 - l^e;$$

la formule (C) de l'article précédent se changera conséquemment dans celle-ci

$$s^{n-1}[a'+b's+2cs^2-l^{h+g}(a''+b''s+2cs^2)]^{n-1}(1-l^e).$$

Soit

$$\begin{aligned}
(a'+b's+2cs^2)^{n-1} &= a^{(1)}+b^{(1)}s+c^{(1)}s^2+\ldots,\\
(a'+b's+2cs^2)^{n-2}(a''+b''s+2cs^2) &= a^{(2)}+b^{(2)}s+c^{(2)}s^2+\ldots,\\
(a'+b's+2cs^2)^{n-3}(a''+b''s+2cs^2)^2 &= a^{(3)}+b^{(3)}s+c^{(3)}s^2+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et cette dernière formule prendra la forme suivante

$$\begin{aligned}
&a^{(1)}s^{n-1}+b^{(1)}s^n+c^{(1)}s^{n+1}+\ldots\\
&-l^e(a^{(1)}s^{n-1}+b^{(1)}s^n+c^{(1)}s^{n+1}+\ldots)\\
&-(n-1)l^{h+g}\,(a^{(2)}s^{n-1}+b^{(2)}s^n+c^{(2)}s^{n+1}+\ldots)\\
&+(n-1)l^{h+g+e}(a^{(2)}s^{n-1}+b^{(2)}s^n+c^{(2)}s^{n+1}+\ldots)\\
&+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}l^{2h+2g}\,(a^{(3)}s^{n-1}+\ldots)\\
&-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}l^{2h+2g+e}(a^{(3)}s^{n-1}+\ldots)\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

on en conclura la probabilité cherchée en y changeant un terme quelconque tel que $\lambda l^\mu s^c$ en $\frac{\lambda(s-\mu)^c}{1.2.3\ldots c}$, ce qui donne, pour cette probabilité, l'expression suivante

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{\begin{aligned}
&a^{(1)}[s^{n-1}-(s-e)^{n-1}]+\frac{b^{(1)}}{n}[s^n-(s-e)^n]\\
&\quad+\frac{c^{(1)}}{n(n+1)}[s^{n+1}-(s-e)^{n+1}]+\ldots\\
&\quad-(n-1)\left\{\begin{aligned}&a^{(2)}[(s-h-g)^{n-1}-(s-h-g-e)^{n-1}]\\&\quad+\frac{b^{(2)}}{n}[(s-h-g)^n-(s-h-g-e)^n]+\ldots\end{aligned}\right\}\\
&\quad+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left\{\begin{aligned}&a^{(3)}[(s-2h-2g)^{n-1}\\&\quad-(s-2h-2g-e)^{n-1}]+\ldots\end{aligned}\right\}\\
&\quad-\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\},$$

en observant de rejeter les termes multipliés par $(s-\mu)^c$, dans lesquels μ est plus grand que s. On peut, au moyen de cette formule, résoudre un problème que je me suis proposé ailleurs, sur les inclinaisons des orbites des comètes; en supposant toutes les inclinaisons à l'écliptique également possibles, il s'agissait de déterminer la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbites de $n-1$ comètes sera comprise dans les limites θ et θ' ou, ce qui revient au même, que la somme de leurs inclinaisons sera comprise dans les limites $(n-1)\theta$ et $(n-1)\theta'$. En nommant $t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}$ ces inclinaisons, comme elles peuvent s'étendre depuis zéro jusqu'à 90°, on aura

$$f=0 \qquad \text{et} \qquad g=90^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{2},$$

π exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon; de plus, leur possibilité dans cet intervalle étant constante, la fonction $a'+b't+ct^2$ se réduit à la constante a', d'où il est aisé de conclure

$$a^{(1)}=a'^{n-1}=a^{(2)}=a^{(3)}=\ldots, \qquad 0=b^{(1)}=b^{(2)}=\ldots, \qquad 0=c^{(1)}=c^{(2)}=\ldots.$$

D'ailleurs, la valeur de t étant nécessairement comprise dans les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\int a'\,dt=1$, l'intégrale étant prise pour toute l'étendue de ces limites, d'où l'on tire $a'=\frac{2}{\pi}$, la formule précédente donnera ainsi pour la probabilité demandée

$$\frac{2^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)\pi^{n-1}}\left\{\begin{array}{l} s^{n-1}-(s-e)^{n-1}-(n-1)\left[\left(s-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}-\left(s-e-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\right] \\ \quad +\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left[(s-\pi)^{n-1}-(s-c-\pi)^{n-1}\right] \\ \quad -\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\left[(s-\frac{3}{2}\pi)^{n-1}-(s-c-\frac{3}{2}\pi)^{n-1}\right]+\ldots \end{array}\right\},$$

où l'on doit observer que $s=(n-1)\theta'$ et $c=(n-1)(\theta'-\theta)$.

X.

$z, z_1, z_2, \ldots$ représentant toujours les erreurs de $n-1$ observations, supposons que la loi de facilité, tant de l'erreur positive z que de l'erreur négative $-z$, soit $h-z$, et que h et $-h$ soient les limites de cette erreur; supposons, de plus, que cette loi soit la même pour les erreurs $z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}$ des autres observations, et que l'on cherche la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait $z=t-h$, $z_1=t_1-h$, ..., il est clair que t, t_1, ... seront toujours positifs et pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $2h$; la loi de facilité de t, depuis $t=0$ jusqu'à $t=h$, sera exprimée par t; cette même loi, depuis $t=h$ jusqu'à $t=2h$, sera $2h-t$; elle sera nulle depuis $t=2h$ jusqu'à $t=\infty$. On aura ainsi dans ce cas

$$q=0, \quad q'=h, \quad q''=2h,$$
$$\varphi(t)=t,$$
$$\varphi'(t)+\varphi(t)=2h-t,$$
$$\varphi''(t)+\varphi'(t)+\varphi(t)=0,$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(t)=2h-2t,$$
$$\varphi''(t)=t-2h.$$

La fonction que nous avons désignée par $\Pi(u)$ dans l'article VII sera donc $u(1-l^h)^2$, et l'on aura les fonctions

$$\Pi_1(u_1), \quad \ldots, \quad \Pi_{n-2}(u_{n-2}),$$

en y changeant u successivement en $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$.

Présentement, on a

$$z+z_1+\ldots+z_{n-2}=t+t_1+\ldots+t_{n-2}-(n-1)h;$$

donc la somme des erreurs z, z_1, ... devant, par l'hypothèse, être renfermée dans les limites p et $p+e$, la somme des valeurs de t, t_1, t_2, ... sera comprise dans les limites $(n-1)h+p+e$ et $(n-1)h+p$, en sorte que, si l'on fait

$$(n-1)h+p+e=s \quad \text{et} \quad t+t_1+\ldots+t_{n-2}=s-t_{n-1},$$

t_{n-1} pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e, et l'on prouvera, comme dans l'exemple précédent, que sa facilité doit être supposée constante et égale à l'unité dans cet intervalle, et qu'elle doit être supposée nulle depuis $t_{n-1} = e$ jusqu'à $t_{n-1} = \infty$; d'où l'on conclura, comme dans ce même exemple,

$$\Pi_{n-1}(u_{n-1}) = 1 - l^e.$$

La formule (C) de l'article VIII deviendra ainsi

$$s^{2n-2}(1 - l^h)^{2n-2}(1 - l^e),$$

et l'on aura la probabilité cherchée en changeant dans le développement de cette quantité un terme quelconque tel que $\lambda l^\mu s^{2n-2}$ en $\frac{\lambda(s-\mu)^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)}$, ce qui donne pour l'expression de cette probabilité

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(2n-2)}\left\{\begin{array}{l} s^{2n-2} - (s-e)^{2n-2} \\ \quad - (2n-2)[(s-h)^{2n-2} - (s-h-e)^{2n-2}] \\ \quad + \frac{(2n-2)(2n-3)}{1.2}[(s-2h)^{2n-2} - (s-2h-e)^{2n-2}] \\ \quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

en ayant soin de rejeter les termes multipliés par $(s-\mu)^{2n-2}$ lorsque $s - \mu$ est négatif.

Je dois observer ici que M. de la Grange a déjà résolu le problème où l'on se propose de trouver la probabilité que la somme des erreurs de plusieurs observations sera comprise dans des limites données, lorsque la loi de facilité de ces erreurs est exprimée par une fonction rationnelle et entière de ces erreurs, d'exponentielles, de sinus et de cosinus (*voir* le Tome V des *Mémoires de Turin*, p. 221); sa méthode est très ingénieuse et digne de son illustre auteur; mais la précédente a, si je ne me trompe, l'avantage d'être plus directe et plus générale, en ce qu'elle réduit la solution du problème aux quadratures des courbes, quelle que soit la loi de facilité des erreurs des observations.

XI.

Voyons maintenant l'usage que l'on peut faire de la théorie précédente dans la solution des problèmes relatifs à un nombre $n-1$ de joueurs dont on ne connait que la possibilité des adresses. Soient

$t, t_1, \ldots, t_{n-2}$ les adresses absolues des joueurs;
$h, h_1, h_2, \ldots$ les plus petites valeurs de $t, t_1, \ldots$;
$h', h'_1, h'_2, \ldots$ leurs plus grandes valeurs;

si l'on fait

$$h' + h'_1 + h'_2 + \ldots = s$$

et

$$t + t_1 + \ldots + t_{n-2} = s - t_{n-1},$$

la variable t_{n-1} pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à

$$h' - h + h'_1 - h_1 + \ldots;$$

la loi de sa possibilité doit être supposée constante et égale à l'unité dans cet intervalle, et nulle au delà jusqu'à $t_{n-1} = \infty$; de plus, il est clair que les adresses respectives des joueurs seront

$$\frac{t}{s - t_{n-1}}, \quad \frac{t_1}{s - t_{n-1}}, \quad \frac{t_2}{s - t_{n-1}}, \quad \ldots.$$

On cherchera donc, par les méthodes connues de l'analyse des hasards, la solution du problème proposé, en partant de ces adresses respectives, et l'on arrivera à un résultat qui sera une fonction de

$$\frac{t}{h' + h'_1 + \ldots - t_{n-1}}, \quad \frac{t_1}{h' + h'_1 + \ldots - t_{n-1}}, \quad \ldots.$$

En y substituant, au lieu de s, sa valeur, cette fonction sera celle que nous avons désignée par $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$ dans le problème de l'article VII; il ne s'agira plus ensuite que de chercher par la méthode de ce problème la somme de toutes les valeurs dont cette fonction est susceptible, multipliées par leurs probabilités, et cette somme sera le résultat demandé : il ne reste plus, comme on voit, dans ce genre de problèmes, que les difficultés inévitables de l'analyse, difficultés qui deviennent beaucoup moindres si l'on suppose que la loi de possibilité des adresses est la même pour tous les joueurs.

XII.

Cette loi ne peut être connue que par une longue suite d'observations, et le plus souvent les circonstances ne permettent pas de les faire; on ne peut suppléer à cette ignorance que par le choix des fonctions les plus vraisemblables; l'analyse des hasards, qui n'est en elle-même que l'art d'apprécier les vraisemblances, doit donc nous guider dans ce choix : examinons ce qu'elle peut nous fournir de lumière sur cet objet.

Nous observerons d'abord que, s'il est difficile de connaître par l'observation la loi de facilité des adresses des joueurs, il est beaucoup plus aisé d'en connaître les limites; car supposons que l'on ait observé la plus grande inégalité de ces adresses, et que l'on ait trouvé que le rapport de l'adresse du joueur le plus fort au joueur le plus faible est m, en nommant h la plus petite adresse des joueurs et h' la plus grande, on aura

$$\frac{h'}{h} = m;$$

or, si l'on nomme 1 l'adresse moyenne et x l'excès de h' sur cette adresse, on aura

$$1 + x = h', \qquad 1 - x = h;$$

donc

$$\frac{1+x}{1-x} = m,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{m-1}{m+1},$$

partant

$$h = \frac{2}{m+1} \qquad \text{et} \qquad h' = \frac{2m}{m+1}.$$

Maintenant, la loi de possibilité des adresses étant nulle au delà des limites h et h', il est très vraisemblable qu'elle va en croissant depuis ces limites jusqu'au milieu de l'intervalle qui les sépare et qu'elle est la même de chaque côté de ce milieu. Voilà donc une condition à laquelle on doit assujettir la fonction dont on fera choix; mais cette fonction reste encore très indéterminée, et, comme, parmi celles qui peuvent satisfaire à la condition précédente, on n'a aucune raison d'en préférer une, il faut prendre une fonction moyenne entre toutes ces fonctions : la question est ainsi réduite à déterminer cette fonction moyenne.

Pour cela, soient $2a$ l'intervalle compris entre les deux limites et x la distance du milieu de cet intervalle à un point quelconque pris de l'un ou de l'autre côté de ce milieu; si l'on élève à ce point une ordonnée y, qui représente la probabilité de x, on aura une courbe renfermée entre les deux limites, et, la valeur de x devant nécessairement tomber dans cet intervalle, la surface de cette courbe sera égale à l'unité, en sorte que, depuis le milieu jusqu'à l'une des limites, cette surface sera $\frac{1}{2}$; on peut donc concevoir cette quantité $\frac{1}{2}$ partagée dans un nombre infini de parties égales distribuées au-dessus des différents points de l'intervalle a; par la condition du problème, cette répartition doit être telle qu'il y ait d'autant moins de ces parties au-dessus de chaque point qu'il s'éloigne davantage du milieu; toutes les combinaisons dans lesquelles cela existe sont également admissibles, et l'on aura l'ordonnée moyenne qui en résulte pour l'abscisse x, en prenant la somme de toutes les ordonnées y relatives à chaque combinaison et en la divisant par le nombre de ces combinaisons.

Supposons d'abord le nombre des points de l'intervalle a fini et égal à n, et nommons s le nombre infini de parties qu'il faut distribuer au-dessus de ces points, en observant la condition précédente; soient, de plus, z l'ordonnée relative au $n^{\text{ième}}$ point; $z+z_1$ l'ordonnée relative au $(n-1)^{\text{ième}}$ point; $z+z_1+z_2$ l'ordonnée relative au $(n-2)^{\text{ième}}$ point, et ainsi de suite, en sorte que l'ordonnée relative au premier point ou au point du milieu de l'intervalle $2a$ soit $z+z_1+\ldots+z_{n-1}$: il est visible que z, z_1, z_2, $\ldots$, z_{n-1} seront nécessairement positifs et que l'on aura

$$nz + (n-1)z_1 + (n-2)z_2 + \ldots + z_{n-1} = s.$$

Soit

$$nz = t, \quad (n-1)z_1 = t_1, \quad (n-2)z_2 = t_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = t_{n-1},$$

l'équation précédente deviendra

$$t + t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} = s;$$

les variables t, t_1, t_2, ... pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à s, et l'ordonnée relative au $r^{\text{ième}}$ point sera

$$\frac{t}{n} + \frac{t_1}{n-1} + \frac{t_2}{n-2} + \ldots + \frac{t_{n-r}}{r}.$$

Il faut conséquemment déterminer la somme de toutes les variations que peut recevoir cette quantité et la diviser par le nombre de ces variations : or il est visible que ce problème rentre dans celui de l'article VII; que la quantité que nous y avons nommée $\psi(t, t_1, t_2, \ldots)$ est ici

$$\frac{t}{n} + \frac{t_1}{n-1} + \ldots + \frac{t_{n-r}}{r};$$

que les quantités q et q' sont ici o et s, et que la loi de facilité des variations de t doit être supposée égale à une constante b et la même que pour t_1, t_2, ... On aura donc, dans le cas présent,

$$\Gamma(u, u_1, u_2, \ldots) = \frac{k}{n} + \frac{k_1}{n-1} + \ldots + \frac{k_{n-r}}{r} + \frac{u}{n} + \frac{u_1}{n-1} + \ldots + \frac{u_{n-r}}{r},$$

$$\Pi(u) = \Pi_1(u_1) = \Pi_2(u_2) = \ldots = b(1 - l^s);$$

mais, comme il faut distinguer les limites o et s, qui appartiennent aux variables t, t_1, ..., t_{n-r}, afin d'assigner à k, k_1, ..., k_{n-r} les valeurs qui leur conviennent, nous représenterons par c', s', c'', s'', c''', s''', ... ces limites. Cela posé, la formule (B) de l'article VIII donnera pour $\mathrm{I}(s)$

$$\left(\frac{\frac{k}{n} + \frac{k_1}{n-1} + \frac{k_2}{n-2} + \ldots + \frac{k_{n-r}}{r}}{1.2.3\ldots(n-1)} s^{n-1} + \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{r}}{1.2.3\ldots n} s^n \right)$$
$$\times\, b^n (1 - l^s)^r (l^{c'} - l^{s'})(l^{c''} - l^{s''}) \ldots.$$

Il faut ensuite, dans le développement de cette quantité, substituer pour k la partie de l'exposant de l qui dépend de c' et de s'; pour k_1, la partie de cet exposant qui dépend de c'' et de s'', etc.; diminuer s de l'exposant entier de l, et rejeter ce terme toutes les fois que cet exposant, ainsi diminué, sera négatif; enfin supposer

$$0 = c' = c'' = c''' = \ldots, \qquad s = s' = s'' = \ldots \qquad \text{et} \qquad l = 1.$$

La quantité précédente se réduira ainsi à cette formule très simple

$$\frac{b^n s^n}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{r}\right);$$

en divisant cette quantité par le nombre de toutes les combinaisons, qui ne peut être une fonction de n, on aura, pour l'ordonnée moyenne correspondante au $r^{\text{ième}}$ point,

$$N\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{r}\right),$$

N étant fonction de n.

Supposons maintenant que les nombres n et r deviennent infinis, que le $r^{\text{ième}}$ point réponde à l'abscisse x et le $n^{\text{ième}}$ point à l'abscisse a, on aura, comme l'on sait,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{r} = \log n - \log r = \log\frac{n}{r} = \log\frac{a}{x};$$

donc l'ordonnée moyenne y qui répond à l'abscisse x est $N\log\frac{a}{x}$; on déterminera N, en observant que l'on doit avoir $\int N\,dx\log\frac{a}{x} = \frac{1}{2}$, l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, ce qui donne

$$N = \frac{1}{2a},$$

partant

$$y = \frac{1}{2a}\log\frac{a}{x}.$$

Il faut observer que cette équation doit être supposée la même, x étant positif ou négatif, ce qui revient à supposer ici les logarithmes des quantités positives égaux aux logarithmes des quantités négatives, c'est-à-dire $\log\mu = \log(-\mu)$.

XIII.

Telle est l'équation dont il faut faire usage lorsqu'on n'a, relativement à la possibilité des valeurs de x, d'autres données, si ce n'est qu'elle est d'autant moindre que ces valeurs sont plus grandes : or c'est ce qui a lieu dans un grand nombre de circonstances. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du véritable instant d'un phénomène observé par plusieurs observateurs; chacun d'eux peut aisément fixer la plus grande erreur dont son observation est susceptible, soit en *plus*, soit en *moins*, en prenant pour cette limite la moitié du plus grand intervalle qu'il peut supposer entre deux observations semblables, sans les rejeter comme mauvaises; cet intervalle est ce que nous avons nommé $2a$; il dépend de l'adresse de l'observateur, de la bonté de ses instruments et de la précision dont l'observation dont il s'agit est susceptible, et il doit être supposé le même pour tous les observateurs, si l'on n'a aucune raison de préférer, sous ce point de vue, une observation à une autre. Maintenant, il est naturel de penser que les mêmes erreurs, en plus et en moins, sont également probables et que leur facilité est d'autant moindre qu'elles sont plus grandes; si l'on n'a aucune autre donnée, relativement à leur facilité, on retombe évidemment dans le cas du problème précédent : il faut donc supposer alors la possibilité, tant de l'erreur positive x, que de l'erreur négative $-x$, égale à $\frac{1}{2a}\log\frac{a}{x}$; et c'est cette loi de possibilité dont il faut partir, dans la recherche du milieu que l'on doit choisir entre les résultats de plusieurs observations.

Lorsqu'il s'agit des adresses des joueurs, on a (art. XII) $2a = h' - h$; l'adresse t d'un joueur quelconque est égale à $1 \pm x$: la possibilité de t, depuis $t = h$ jusqu'à $t = h'$, sera donc représentée par

$$\frac{1}{h'-h}\log\frac{h'-h}{2-2t},$$

pourvu que l'on fasse les logarithmes des quantités négatives égaux aux logarithmes des quantités positives. En appliquant à ce cas les formules de l'article VII, on aura

$$q = h, \qquad q' = h',$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{h' - h} \log \frac{h' - h}{2 - 2t},$$

$$\varphi'(t) + \varphi(t) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi'(t) = \frac{1}{h - h'} \log \frac{h' - h}{2 - 2t};$$

on doit supposer d'ailleurs cette loi de possibilité la même pour les adresses de tous les joueurs : on aura ainsi toutes les données nécessaires à la solution des problèmes que l'on peut se proposer relativement à un nombre quelconque de joueurs; et, en appliquant à ces données l'analyse de l'article VII, on parviendra au seul résultat qui convienne à l'état d'ignorance où nous nous supposons relativement à la facilité des adresses des joueurs.

XIV.

La théorie précédente suppose que l'on n'a aucune raison d'attribuer à l'un des joueurs plus d'adresse qu'aux autres, ce qui est vrai lorsque le jeu commence; mais, à mesure que les parties se succèdent et que les événements du jeu se multiplient, on acquiert de nouvelles lumières sur leurs forces respectives, en sorte qu'elles seraient exactement connues si le nombre des parties était infini, comme nous le démontrerons dans la suite : les adresses des joueurs et, plus généralement, les différentes causes des événements sont ainsi liées à leur existence par des lois qu'il est très important de bien connaître, et, sous ce point de vue, on ne peut douter que les événements passés n'influent sur la probabilité des événements futurs. Examinons cette influence et la manière dont on doit en tenir compte.

Pour cela, nommons E l'événement déjà passé; e l'événement futur dont on propose de calculer la probabilité P; $E + e$ un événement composé de l'événement E arrivant le premier et de l'événement e

arrivant ensuite. Si l'on détermine par la théorie précédente et sans avoir égard aux événements passés la probabilité de l'événement E et celle de l'événement $E + e$; que l'on nomme V la première de ces probabilités et v la seconde, il est clair que cette dernière probabilité v sera égale à la probabilité de l'événement E, multipliée par la probabilité cherchée P, que, E ayant déjà eu lieu, l'événement e lui succédera; on aura ainsi $PV = v$, ce qui donne

$$P = \frac{v}{V}.$$

La méthode précédente s'applique donc également au cas où l'on a égard aux événements passés, et il n'en résulte qu'un calcul plus composé.

Lorsque la possibilité des événements est connue *a priori* et par la nature même des causes qui les produisent, comme la possibilité d'amener une face donnée d'un dé dont la matière est homogène et dont les faces sont parfaitement égales, la probabilité v de l'événement $E + e$ se détermine en calculant séparément les probabilités de E et de e, et en les multipliant l'une par l'autre, en sorte que la valeur de P est égale à la probabilité de e. Il suit de là que les événements passés n'ont alors aucune influence sur la probabilité des événements futurs; on peut s'en assurer d'ailleurs, en observant que, quels que soient les événements déjà arrivés, leur possibilité absolue reste toujours la même, ce qui rend la considération du passé entièrement inutile lorsque cette possibilité est exactement connue; mais il n'en est pas ainsi quand elle ne l'est pas; car il est visible que les événements passés doivent rendre plus ou moins probables les différentes valeurs qu'on peut lui supposer, suivant qu'elles leur sont plus ou moins favorables. Cette remarque nous conduit naturellement à déterminer la probabilité des causes prise des événements.

XV.

Supposons qu'un événement donné ne puisse être produit que par les n causes A, A', ..., $A^{(n-1)}$; soient x la probabilité qui en résulte pour l'existence de A; x' celle de l'existence de A'; x'' celle de l'existence de A'', etc. Si l'on nomme $a, a', a'', \ldots$ les probabilités que les causes A, A', A'', ..., étant supposées exister, produiront l'événement dont il s'agit, il est clair que la probabilité d'un second événement semblable au premier sera égale au produit de a par la probabilité x de la cause A, plus au produit de a' par la probabilité x' de la cause A', plus etc.; d'où il suit que l'on aura

$$ax + a'x' + a''x'' + \ldots$$

pour cette probabilité; on trouvera, de la même manière,

$$a^2x + a'^2x' + a''^2x'' + \ldots$$

pour la probabilité de deux événements consécutifs semblables au premier;

$$a^3x + a'^3x' + a''^3x'' + \ldots$$

pour la probabilité de trois événements consécutifs semblables, et ainsi de suite. On aura, par l'article précédent, ces mêmes probabilités, en cherchant *a priori* les probabilités de deux, de trois, de quatre, etc. événements consécutifs, et en les divisant par la probabilité du premier; or la probabilité d'un premier événement est a ou a', ou a'', etc. suivant que la cause A ou la cause A', ou etc. existe; ce qui donne

$$\frac{1}{n}(a + a' + a'' + \ldots)$$

pour cette probabilité. Pareillement, les probabilités de deux, de trois, etc. événements semblables sont

$$\frac{1}{n}(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots), \quad \frac{1}{n}(a^3 + a'^3 + a''^3 + \ldots), \quad \ldots;$$

donc les probabilités qu'un premier événement ayant déjà eu lieu, il sera suivi d'un ou de deux, etc. événements semblables, sont

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}, \quad \frac{a^3 + a'^3 + a''^3 + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}, \quad \ldots.$$

En égalant ces probabilités aux précédentes, on aura

$$ax + a'x' + a''x'' + \ldots = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots},$$

$$a^2x + a'^2x' + a''^2x'' + \ldots = \frac{a^3 + a'^3 + a''^3 + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots};$$

on formera $n - 1$ équations semblables, et, en les combinant avec l'équation

$$x + x' + x'' + \ldots = 1,$$

qui résulte de la supposition que l'événement ne peut être produit que par les n causes A, A′, A″, …, on aura en tout n équations du premier degré, qui serviront à déterminer x, x', x'', …; or il est visible que l'on y satisfera en faisant

$$x = \frac{a}{a + a' + a'' + \ldots},$$

$$x' = \frac{a'}{a + a' + a'' + \ldots},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où il suit que, pour avoir la probabilité de l'existence d'une cause quelconque $A^{(r)}$ résultante d'un événement donné, il faut déterminer la probabilité $a^{(r)}$ que cette cause ayant lieu produira cet événement, et diviser cette probabilité par la somme des probabilités semblables a, a', a'', … relatives à toutes les causes qui peuvent le produire.

XVI.

Pour appliquer cette théorie et pour faire sentir par un exemple fort simple l'influence des événements passés sur la probabilité de ceux qui suivent, considérons deux joueurs A et B dont les adresses soient inconnues; il est infiniment peu vraisemblable qu'elles seront parfaitement égales. Soient donc $\frac{1+\alpha}{2}$ la plus grande et $\frac{1-\alpha}{2}$ la plus petite; si l'on cherche la probabilité P que A gagnera les deux premières parties, on aura, par l'article II,

$$P = \frac{1+\alpha^2}{4},$$

en sorte qu'il y a de l'avantage à parier 1 contre 3 que cela aura lieu; mais, si l'on cherche la probabilité que B ayant déjà gagné la première partie, A gagnera les deux suivantes, il est visible que la valeur précédente de P est trop considérable, puisqu'il y a une raison de croire que l'adresse de B est la plus grande. En effet, si l'on considère chaque adresse comme une cause particulière de l'événement, la probabilité que l'adresse de B est $\frac{1+\alpha}{2}$ sera, par l'article précédent, égale à la probabilité que B ayant cette adresse gagnera la première partie, divisée par la somme des probabilités qu'il la gagnera en ayant successivement les adresses $\frac{1+\alpha}{2}$ et $\frac{1-\alpha}{2}$; d'où l'on tire $\frac{1+\alpha}{2}$ pour cette probabilité.

Pour déterminer, dans ce cas, la valeur de P, on observera que l'événement que nous avons nommé E dans l'article XIV est ici le gain de la première partie par B, et que l'événement e est le gain des deux parties suivantes par A; la probabilité V de l'événement E est donc $\frac{1+\alpha}{2}$ ou $\frac{1-\alpha}{2}$, suivant que la plus grande ou la plus petite adresse appartient à B, ce qui donne, en prenant la moitié de la somme de ces deux valeurs, $V = \frac{1}{2}$; pareillement, la probabilité v de l'événement $E + e$ est égale à $\frac{1-\alpha}{2}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$ ou à $\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$, partant

$$v = \frac{1-\alpha^2}{8},$$

donc

$$P = \frac{v}{V} = \frac{1-\alpha^2}{4};$$

il y a donc du désavantage à parier 1 contre 3 que A gagnera les deux parties suivantes, en sorte que l'inégalité des adresses qui, dans le premier cas, favorise celui qui parie conformément au Calcul ordinaire des probabilités, lui est défavorable dans celui-ci.

On trouvera de la même manière que, B ayant déjà gagné la première partie, la probabilité P que A gagnera les n suivantes est

$$P = \frac{1-\alpha^2}{2^{n+1}}[(1+\alpha)^{n-1} + (1-\alpha)^{n-1}].$$

Si α est peu considérable, on a à très peu près

$$P = \frac{1}{2^n}\left\{1 + \alpha^2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - 1\right]\right\};$$

or, toutes les fois que n surpassera 3, cette quantité sera plus grande que la probabilité $\frac{1}{2^n}$ que donne la supposition des adresses égales; d'où il résulte que, dans ce cas, quoiqu'il soit probable que A est le joueur le plus faible, cependant la probabilité qu'il gagnera les n parties suivantes est plus grande que si l'on supposait A et B de forces égales.

XVII.

Lorsqu'on n'a aucune donnée *a priori* sur la possibilité d'un événement, il faut supposer toutes les possibilités, depuis zéro jusqu'à l'unité, également probables; ainsi, l'observation pouvant seule nous instruire sur le rapport des naissances des garçons et des filles, on doit, à ne considérer la chose qu'en elle-même et abstraction faite des événements, supposer la loi de possibilité des naissances d'un garçon ou d'une fille constante depuis zéro jusqu'à l'unité, et partir de cette hypothèse dans les différents problèmes que l'on peut se proposer sur cet objet.

Supposons, par exemple, que l'on ait observé que, sur $p+q$ enfants, il est né p garçons et q filles, et que l'on cherche la probabilité P que, sur $m+n$ enfants qui doivent naître, il y aura m garçons et n filles; si l'on nomme x la probabilité qu'un enfant qui doit naître sera un garçon, et $1-x$ celle qu'il sera fille, en désignant

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}$$

par λ, on aura

$$\lambda x^p (1-x)^q$$

pour la probabilité que, sur $p+q$ enfants, il y aura p garçons et q filles; cet événement est celui que nous avons nommé E dans l'article XIV. Pareillement, si l'on désigne par γ le produit

$$\frac{1.2.3\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n},$$

on aura

$$\gamma\lambda x^{p+m}(1-x)^{q+n}$$

pour la probabilité que, sur $p+q$ enfants qui naitront d'abord, il y aura p garçons et q filles, et que, sur $m+n$ enfants qui naitront ensuite, il y aura m garçons et n filles; cet événement est celui que nous avons nommé $E+e$ dans l'article cité. Maintenant, x étant susceptible de toutes les valeurs depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et toutes ces valeurs étant *a priori* également probables, il faut, pour avoir la véritable probabilité de E, multiplier $\lambda x^p(1-x)^q$ par $a\,dx$, a étant constant, et prendre l'intégrale $\lambda\int ax^p(1-x)^q dx$ (depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$); la valeur de a se déterminera en observant que, x devant nécessairement tomber entre 0 et 1, on a

$$\int a\,dx = 1,$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, ce qui donne $a=1$. On aura semblablement

$$\lambda\gamma\int x^{p+m}(1-x)^{q+n}\,dx$$

pour la probabilité entière de l'événement $E+e$; donc la probabilité cherchée P, que, sur $m+n$ enfants qui doivent naitre, il y aura m garçons et n filles, sera, par l'article XIV,

$$P = \frac{\gamma\int x^{p+m}(1-x)^{q+n}\,dx}{\int x^p(1-x)^q\,dx},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis

$x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Cette condition donne

$$\int x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1.2.3\ldots q}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q+1)},$$

$$\int x^{p+m}(1-x)^{q+n}\,dx = \frac{1.2.3\ldots(q+n)}{(p+m+1)(p+m+2)\ldots(p+q+m+n+1)},$$

ce qui change l'expression de P dans celle-ci

$$(\theta)\qquad \mathrm{P} = \gamma\,\frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+n)(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}{(p+q+2)(p+q+3)\ldots(p+q+m+n+1)}.$$

Or on a, comme l'on sait,

$$\log(1.2.3\ldots u) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + (u+\tfrac{1}{2})\log u - u + \frac{1}{12u} - \frac{1}{360u^3} + \ldots,$$

ce qui donne à très peu près, lorsque u est considérable,

$$1.2.3\ldots u = \sqrt{2\pi}\,u^{u+\frac{1}{2}}e^{-u},$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon et e le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; donc, si l'on suppose p et q de très grands nombres, on aura

$$(q+1)(q+2)\ldots(q+n) = \frac{1.2.3\ldots(q+n)}{1.2.3\ldots q} = \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}}e^{-n},$$

$$(p+1)(p+2)\ldots(p+m) = \frac{(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}}e^{-m},$$

$$(p+q+1)\ldots(p+q+m+n) = \frac{(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}e^{-m-n}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de P, et en observant que l'on a à très peu près

$$\frac{p+q+1}{p+q+m+n+1} = \frac{p+q}{p+q+m+n},$$

elle deviendra

$$(\varpi)\qquad \mathrm{P} = \gamma\,\frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}}}.$$

Si μ et s sont de très petits nombres par rapport à p et à q, on a

$$\log(p+\mu)^{p+s} = (p+s)\left[\log p + \log\left(1+\frac{\mu}{p}\right)\right]$$
$$= (p+s)\left(\frac{\mu}{p} + \log p\right) = \mu + (p+s)\log p;$$

donc

$$(p+\mu)^{p+s} = p^{p+s}e^{\mu};$$

partant, si m et n sont très petits relativement à p et q, on a

$$(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}} = e^{n}\, q^{q+n+\frac{1}{2}},$$
$$(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}} = e^{m} p^{p+m+\frac{1}{2}},$$
$$(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}} = e^{m+n}(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}},$$

d'où l'on tire

$$P = \gamma \frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}}.$$

XVIII.

Cette valeur de P est la même que celle à laquelle on parviendrait en supposant les possibilités des naissances des garçons et des filles dans le rapport de p à q; d'où il est naturel de conclure que ces possibilités sont à très peu près dans le même rapport, et qu'ainsi la vraie possibilité de la naissance d'un garçon est très approchante de $\frac{p}{p+q}$; ce n'est pas que, absolument parlant, elle ne puisse avoir une valeur bien différente, mais l'expression $\frac{p}{p+q}$ et celles qui en sont très voisines sont incomparablement plus probables que les autres, et l'on peut énoncer ainsi la conclusion précédente :

Si l'on désigne par θ une quantité fort petite et par P la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon est comprise dans les limites $\frac{p}{p+q} - \theta$ et $\frac{p}{p+q} + \theta$, la valeur de P différera d'autant moins de la certitude ou de l'unité que p et q seront de plus grands nombres, et l'on peut tellement faire croître p et q que la différence de P à l'unité soit moindre qu'aucune grandeur donnée, quelque petit que θ soit d'ailleurs.

On voit par là comment les événements, en se multipliant, nous indiquent d'une manière de plus en plus probable leur possibilité respective; mais, comme le théorème précédent n'est vrai que dans l'infini et que la valeur de P diffère toujours un peu de l'unité lorsque p et q sont des nombres finis, il est intéressant de connaître cette différence, et pour cela nous allons donner l'expression de P par une suite très convergente que nous verrons se réduire à l'unité, lorsque p et q sont infinis, et qui nous fournira, de cette manière, une démonstration directe et rigoureuse du théorème dont il s'agit.

Soient x la possibilité de la naissance d'un garçon et $1-x$ celle de la naissance d'une fille; la probabilité que, sur $p+q$ enfants, il y aura p garçons et q filles, sera, comme on l'a vu dans l'article précédent, égale à $\lambda x^p(1-x)^q$; or, si l'on regarde x comme une cause particulière de cet événement, $\dfrac{\int x^p(1-x)^q\,dx}{\int x^p(1-x)^q\,dx}$ sera, par l'article XV, la probabilité de cette cause, pourvu que l'intégrale du dénominateur soit prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; donc la probabilité P, que x sera contenu dans des limites données, sera $\dfrac{\int x^p(1-x)^q\,dx}{\int x^p(1-x)^q\,dx}$, pourvu que l'intégrale du numérateur ne soit prise que dans l'étendue de ces limites; la question est ainsi réduite à déterminer, dans ce dernier cas, la valeur de $\int x^p(1-x)^q\,dx$, lorsque p et q sont de très grands nombres.

Soit $y = x^p(1-x)^q$, on aura

$$y\,dx = \frac{x(1-x)}{p-(p+q)x}\,dy,$$

et si l'on fait $p=\frac{1}{\alpha}$, $q=\frac{\mu}{\alpha}$, α étant une fraction extrêmement petite, puisque p et q sont très considérables, on aura

$$y\,dx = \alpha z\,dy,$$

z étant égal à $\frac{x(1-x)}{1-(1+\mu)x}$; de là on tirera, quel que soit z,

$$(\lambda)\quad \int y\,dx = C + \alpha y z \left\{ 1 - \alpha\frac{dz}{dx} + \alpha^2\frac{d(z\,dz)}{dx^2} - \alpha^3\frac{d[z\,d(z\,dz)]}{dx^3} + \ldots \right\},$$

C étant une constante arbitraire qui dépend de la valeur de $\int y\,dx$, à l'origine de l'intégrale. Cette suite, qui est d'un grand usage dans ces recherches, se démontre facilement en observant :

1° Que

$$\int y\,dx = \int \alpha z\,dy = \alpha y z - \alpha \int y\,dz;$$

2° Que l'équation

$$y\,dx = \alpha z\,dy \qquad \text{donne} \qquad y = \alpha z\frac{dy}{dx},$$

et qu'ainsi

$$\int y\,dz = \alpha \int \frac{z\,dz}{dx}dy = \alpha y\frac{z\,dz}{dx} - \alpha \int y\frac{d(z\,dz)}{dx};$$

3° Que

$$\int y\frac{d(z\,dz)}{dx} = \alpha \int z\frac{d(z\,dz)}{dx}dy = \alpha y z\frac{d(z\,dz)}{dx^2} - \alpha\int y\frac{d[z\,d(z\,dz)]}{dx^2},$$

et ainsi de suite.

La série précédente cesse d'être convergente lorsque le dénominateur de z est très petit de l'ordre de α, et c'est ce qui a lieu lorsque x ne diffère de $\frac{1}{1+\mu}$ que d'une quantité de cet ordre; il faut donc n'employer cette série que dans le cas où cette différence est très grande par rapport à α. Mais cela ne suffit pas encore : chaque différentiation augmentant d'une unité les puissances des dénominateurs de z et de ses différentielles, il est visible que le terme de la série multiplié par α^i a pour dénominateur celui de z, élevé à la puissance $2i-1$; donc, pour la convergence de cette suite, il est nécessaire que α soit beaucoup moindre, non seulement que le dénominateur de z, mais encore que le carré de ce dénominateur.

Il suit de là que la suite (λ) donnera, par une approximation rapide, l'intégrale $\int y\,dx$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{1+\mu} - \theta$, pourvu que α soit beaucoup plus petit que θ^2; et si l'on observe que l'on a $y = 0$ et $z = 0$ lorsque $x = 0$, on trouvera, pour la valeur de $\int y\,dx$, dans ce cas,

$$\int y\,dx = \frac{\alpha\mu^{q+1}[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1}}{(1+\mu)^{p+q+3}\theta}\left\{1-\frac{\alpha[\mu+(1+\mu)^2\theta]}{(1+\mu)^3\theta^2}+\dots\right\}.$$

Cette suite a l'avantage de donner les limites entre lesquelles la valeur de $\int y\,dx$ est resserrée; en effet, cette valeur est moindre que le premier terme et plus grande que la somme des deux premiers termes. Pour le démontrer, nous donnerons à z cette forme

$$z = -\frac{\mu}{(1+\mu)^2} - \frac{x}{1+\mu} + \frac{\mu}{(1+\mu)^2[1-(1+\mu)x]},$$

et nous aurons

$$dz = -\frac{dx}{1+\mu} + \frac{\mu\,dx}{(1+\mu)[1-(1+\mu)x]^2}.$$

On voit ainsi que z et dz augmentent à mesure que x augmente depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{1+\mu}$; les quantités z, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{d(z\,dz)}{dx^2}$ sont donc toujours positives dans cet intervalle, ainsi que les intégrales $\int y\,dz$ et $\int y\frac{d(z\,dz)}{dx}$; or on a, par ce qui précède,

$$\int y\,dx = \alpha yz - \alpha\int y\,dz.$$

Partant $\int y\,dx$ est moindre que αyz; pareillement

$$\int y\,dz = \alpha yz\frac{dz}{dx} - \alpha\int y\frac{d(z\,dz)}{dx},$$

et, par conséquent, $\int y\,dz$ est moindre que $\alpha yz\frac{dz}{dx}$; donc $\int y\,dx$ est moindre que αyz et plus grand que $\alpha yz\left(1-\alpha\frac{dz}{dx}\right)$. Cette remarque peut servir lorsque, sans chercher la valeur exacte de $\int y\,dx$, on veut s'assurer si elle est plus grande ou plus petite qu'une quantité donnée.

La suite (λ) donnera encore l'intégrale $\int y\,dx$, depuis $x = \frac{1}{1+\mu} + \theta$ jusqu'à $x = 1$, et si l'on considère que, x étant 1, on a $y = 0$ et $z = 0$, on verra facilement que la valeur de $\int y\,dx$, dans ce dernier cas, est la valeur même de $\int y\,dx$ dans le premier cas, prise en moins, et dans laquelle on change θ en $-\theta$; donc, si l'on nomme k l'intégrale entière $\int y\,dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, on aura, aux quantités près de l'ordre α^3, pour cette même intégrale, prise depuis $x = \frac{1}{1+\mu} - \theta$ jusqu'à $x = \frac{1}{1+\mu} + \theta$, ou, ce qui revient au même, depuis $x = \frac{p}{p+q} - \theta$ jusqu'à $x = \frac{p}{p+q} + \theta$,

$$k - \frac{\alpha\mu^{q+1}\left\{1 - \frac{\alpha[\mu + (1+\mu)^2\theta^2]}{(1+\mu)^3\theta^2}\right\}}{(1+\mu)^{p+q+3}\theta} \times \left\{ \begin{array}{l} [1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \\ + [1+(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1 - \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \end{array} \right\},$$

ce qui donne

$$P = 1 - \frac{\alpha\mu^{q+1}\left\{1 - \frac{\alpha[\mu + (1+\mu)^2\theta^2]}{(1+\mu)^3\theta^2}\right\}}{(1+\mu)^{p+q+3}\theta k} \times \left\{ \begin{array}{l} [1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \\ + [1+(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1 - \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \end{array} \right\}.$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'avoir la valeur de k; or on a, par l'article précédent,

$$k = \frac{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}{1.2.3\ldots(p+q+1)}$$

et, quel que soit u,

$$1.2.3\ldots u = \sqrt{2\pi}\,u^{u+\frac{1}{2}}e^{-u}\left(1 + \frac{1}{12u} + \ldots\right),$$

d'où il est aisé de conclure, en faisant $p = \frac{1}{\alpha}$ et $q = \frac{\mu}{\alpha}$,

$$k = \frac{\sqrt{2\pi\alpha}\,\mu^{q+\frac{1}{2}}}{(1+\mu)^{p+q+\frac{3}{2}}}\left\{1 + \alpha\frac{[(1+\mu)^2 - 13\mu]}{12\mu(1+\mu)} + \ldots\right\}.$$

On aura donc, en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^{\frac{5}{2}}$,

$$\begin{aligned} P = 1 - \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}(1+\mu)^{\frac{3}{2}}\theta}&\left\{1 - \alpha\frac{[12\mu^2 + (1+\mu)^2(1+\mu+\mu^2)\theta^2]}{12\mu(1+\mu)^3\theta^2}\right\} \\ &\times\left\{\begin{array}{l}[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1+\dfrac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \\ +[1+(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1-\dfrac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1}\end{array}\right\}, \end{aligned}$$

sur quoi l'on doit observer que la quantité

$$[1-(1+\mu)\theta]^p\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^q$$

est à son maximum lorsque $\theta = 0$; d'où il suit que la plus grande valeur du facteur

$$\begin{array}{l}[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1+\dfrac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1} \\ +[1+(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1-\dfrac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1}\end{array}$$

est très près de 2, et qu'il est beaucoup moindre pour peu que θ soit plus grand que zéro.

Dans la question présente, ce facteur est toujours extrêmement petit; pour le faire voir, nous mettrons la quantité

$$[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1}$$

sous cette forme

$$\left[1+\frac{1-\mu^2}{\mu}\theta - \frac{(1+\mu)^2}{\mu}\theta^2\right][1-(1+\mu)\theta]^p\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^q,$$

et nous observerons que, θ étant fort petit, on a, par des suites convergentes,

$$\log[1-(1+\mu)\theta] = -(1+\mu)\theta - \frac{1}{2}(1+\mu)^2\theta^2 - \frac{1}{3}(1+\mu)^3\theta^3 - \ldots,$$

$$\log\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right) = \frac{1+\mu}{\mu}\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{1+\mu}{\mu}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1+\mu}{\mu}\right)^3\theta^3 - \ldots,$$

d'où, en substituant au lieu de p, $\frac{1}{\alpha}$, et au lieu de q, $\frac{\mu}{\alpha}$, on tire

$$\begin{aligned}\log[1-(1+\mu)\theta]^p\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^q \\ = -\frac{(1+\mu)^3}{2\mu}\frac{\theta^2}{\alpha} - \frac{(\mu-1)(1+\mu)^4}{3\mu^2}\frac{\theta^3}{\alpha} - \ldots,\end{aligned}$$

partant

$$[1-(1+\mu)\theta]^p\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^q = e^{-\frac{(1+\mu)^3}{2\mu}\frac{\theta^2}{\alpha} - \frac{(\mu-1)(1+\mu)^4}{3\mu^2}\frac{\theta^3}{\alpha} - \ldots},$$

θ^2 étant, comme nous l'avons supposé, beaucoup plus grand que α, et e, logarithme hyperbolique de l'unité, étant plus grand que 2, il est clair que le second membre de cette équation est très petit et décroît très rapidement lorsque α diminue; d'où il suit que la quantité

$$[1-(1+\mu)\theta]^{p-1}\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q-1}$$

est elle-même très petite, ce qui est également vrai de la quantité

$$[1+(1+\mu)\theta]^{p-1}\left(1-\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q-1},$$

dans laquelle se change la précédente en faisant θ négatif.

On voit ainsi que, θ restant le même, quelque petit qu'il soit d'ailleurs, la différence de P à l'unité devient d'autant moindre que α diminue, non seulement parce que le facteur $\alpha^{\frac{1}{2}}$ qui multiplie cette différence diminue, mais encore parce que le facteur

$$\begin{aligned}[1-(1+\mu)\theta]^{p-1}\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q-1} \\ -[1+(1+\mu)\theta]^{p-1}\left(1-\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q-1}\end{aligned}$$

est très petit et diminue avec une grande rapidité; et il est visible que l'on peut tellement augmenter p et q, et, par conséquent, diminuer α, que cette différence de P à l'unité soit moindre qu'aucune grandeur donnée, ce qui est le théorème dont nous avons parlé au commencement de cet article.

XIX.

Un des principaux avantages de la théorie précédente est de fournir une solution directe et générale d'un problème intéressant, dont l'objet est le plus ou moins de facilité des naissances des garçons et des filles dans les différents climats. On a observé qu'à Paris et à Londres il naît constamment chaque année plus de garçons que de filles, et, quoique la différence soit peu considérable, il serait assez extraordinaire que cela fût l'effet du hasard, et il est bien plus naturel de penser que, en France et en Angleterre, la nature favorise plus la naissance des garçons que celle des filles. A la vérité, les naissances observées pendant quatre ou cinq ans dans quelques petites villes de France semblent y indiquer une moindre facilité pour la naissance des garçons que pour celle des filles; mais il est très possible que, sur un petit nombre de naissances, tel que quatre ou cinq cents, il y ait plus de filles que de garçons, quoique la facilité de la naissance de ceux-ci soit plus grande; il faut employer à cette recherche délicate de beaucoup plus grands nombres, vu surtout le peu de différence qui existe entre les facilités des naissances des garçons et des filles, et ce n'est que lorsqu'on sera bien assuré que le nombre observé des naissances dans un lieu quelconque indique, avec une très grande probabilité, que les naissances des garçons y sont moins possibles que celles des filles, qu'il sera permis de rechercher la cause de ce phénomène. La méthode de l'article précédent donne un moyen fort simple pour obtenir cette probabilité lorsqu'on a un nombre suffisant de naissances; nous allons l'appliquer à celles qui ont été observées à Paris, et déterminer combien il est probable que les naissances des garçons dans cette grande ville sont plus possibles que celles des filles.

Pour cela, nous ferons usage des naissances qui ont eu lieu depuis 1745 jusqu'en 1770, et dont on peut voir la liste dans nos *Mémoires* pour l'année 1771, page 857. En rassemblant toutes ces naissances, on trouve que, dans l'espace de ces vingt-six années, il est né à Paris 251527 garçons et 241945 filles, ce qui donne à très peu près $\frac{105}{101}$ pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles. Cela posé, la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon est égale ou moindre que $\frac{1}{2}$ est, par l'article précédent, égale à $\frac{\int y\,dx}{k}$, l'intégrale $\int y\,dx$ étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$; d'ailleurs cette intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{1+\mu}-\theta$ et divisée par k, est, par le même article, égale à

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}(1+\mu)^{\frac{3}{2}}\theta}[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\left(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)^{q+1}$$
$$\times\left[1-\alpha\frac{12\mu^2+(1+\mu)^2(1+\mu+\mu^2)\theta^2}{12\mu(1+\mu)^2\theta^2}+\alpha^2\ldots\right].$$

En supposant donc $\frac{1}{1+\mu}-\theta=\frac{1}{2}$ et, par conséquent, $\theta=\frac{1-\mu}{2(1+\mu)}$, on a, pour l'expression de la probabilité que x est égal ou moindre que $\frac{1}{2}$,

$$\frac{\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{(1+\mu)\pi}}}{1-\mu}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^{q+1}$$
$$\times\left[1-\alpha\frac{48\mu^2+3\mu(1-\mu)^2+(1-\mu)^4}{12\mu(1+\mu)(1-\mu)^2}+\alpha^2\ldots\right].$$

Dans le cas présent,

$$p=251527,$$
$$q=241945,$$
$$\mu=\frac{q}{p}=0{,}9619047,$$
$$\alpha=\frac{1}{p}=\frac{1}{251527},$$

ce qui donne à peu près $\theta^2 = 24$, en sorte que la série

$$1 - \alpha\frac{[48\mu^2 + 3\mu(1-\mu)^2 + (1-\mu)^4]}{12\mu(1+\mu)(1-\mu)^2} + \alpha^2\ldots$$

est très convergente, et l'on trouve, par le calcul, que le second terme est environ $\frac{1}{300}$; on peut ainsi s'en tenir au premier terme : or on a, en logarithmes des Tables,

$$\log\frac{\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{(1+\mu)\pi}}}{1-\mu} = \bar{2},4660039,$$

le nombre $\bar{2}$ indiquant une caractéristique négative; on a ensuite, en portant la précision jusqu'à douze décimales,

$$\begin{aligned}\log p &= 5,400584610947,\\ \log q &= 5,383716651469,\\ \log(p+q) &= 5,693262515480,\\ \log 2 &= 0,301029995664,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{p+q}{p}\right)^{p+1} &= 73616,6879714,\\ \log\left(\frac{p+q}{q}\right)^{q+1} &= 74893,3836139,\\ \log 2^{p+q+2} &= 148550,4760803;\end{aligned}$$

partant

$$\log\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^{q+1}\frac{\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{(1+\mu)\pi}}}{1-\mu} = \overline{42},0615089.$$

En repassant des logarithmes aux nombres, on aura, pour la probabilité que x est égal ou moindre que $\frac{1}{2}$, une fraction dont le numérateur est peu différent de l'unité et égal à 1,1521, et dont le dénominateur est la septième puissance d'un million; cette fraction est même un peu trop grande, et, comme elle est d'une petitesse excessive, on peut regarder comme aussi certain qu'aucune autre vérité morale, que la différence observée à Paris entre les naissances des garçons et celles des filles est due à une plus grande possibilité dans la naissance des garçons. On voit, au reste, que la petitesse de la fraction précédente vient principalement du facteur

$$\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^{q+1},$$

ce qui confirme ce que nous avons dit dans l'article précédent sur la convergence de la valeur de P vers l'unité.

On a observé que, dans l'intervalle des quatre-vingt-quinze années écoulées depuis 1664 jusqu'en 1757, il est né, à Londres, 737 629 garçons et 698 958 filles, ce qui donne environ $\frac{19}{18}$ pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles; ce rapport étant plus grand que celui de 105 à 101 qui a lieu à Paris, et le nombre des naissances observées à Londres étant plus considérable, on trouverait pour cette ville une plus grande probabilité que les naissances des garçons sont plus possibles que celles des filles; mais, lorsque les probabilités diffèrent aussi peu de l'unité, elles peuvent être censées égales et se confondre avec la certitude.

XX.

La constance avec laquelle les naissances des garçons à Paris l'ont emporté chaque année sur celles des filles, depuis 1745 jusqu'en 1770, est encore un de ces phénomènes que l'on ne peut attribuer au hasard. Déterminons sa probabilité en partant des données précédentes; pour cela, soit $2a$ le nombre moyen des naissances des garçons et des filles dans l'espace d'une année; supposons, de plus, que sur ce nombre il y ait m garçons et, par conséquent, $2a-m$ filles : la formule (0) de l'article XVII donnera, pour la probabilité P de cet événement,

$$\begin{aligned}P = {} & \frac{1.2.3\ldots 2a}{1.2.3\ldots(p+q+2a+1)}\,\frac{1.2.3\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}\\ & \times\frac{1.2.3\ldots(q+2a-m)}{1.2.3\ldots(2a-m)}\,\frac{1.2.3\ldots(p+m)}{1.2.3\ldots m};\end{aligned}$$

on aura donc la probabilité que les naissances des garçons ne l'emporteront point sur celles des filles, en prenant la somme de toutes les valeurs de P, depuis $m=0$ jusqu'à $m=a$. Soit

$$\frac{1.2.3\ldots(q+2a-m).1.2.3\ldots(p+m)}{1.2.3\ldots(2a-m).1.2.3\ldots m}=y_m,$$

et cherchons l'intégrale finie Σy_m, depuis $m=0$ jusqu'à $m=a$, la caractéristique Σ servant à désigner les intégrales finies; on a visiblement

$$y_m=\frac{(m+1)(q+2a-m)}{(2a-m)(p+m+1)}y_{m+1};$$

donc

$$y_m\left[1-\frac{(m+1)(q+2a-m)}{(2a-m)(p+m+1)}\right]=\frac{(m+1)(q+2a-m)}{(2a-m)(p+m+1)}\Delta y_m$$

ou

$$y_m=\frac{(m+1)(q+2a-m)}{2ap-p-m(p+q)}\Delta y_m,$$

la caractéristique Δ étant celle des différences finies. Supposons généralement

$$y_m=z_m\,\Delta y_m,$$

nous aurons, en intégrant,

$$\Sigma y_m=y_m z_{m-1}-\Sigma(y_m\,\Delta z_{m-1});$$

or, si l'on substitue pour y_m sa valeur $z_m\Delta y_m$, on a

$$\begin{aligned}\Sigma(y_m\,\Delta z_{m-1})&=\Sigma(z_m\,\Delta z_{m-1}\,\Delta y_m)\\&=y_m z_{m-1}\,\Delta z_{m-2}-\Sigma[y_m\,\Delta(z_{m-1}\,\Delta z_{m-2})].\end{aligned}$$

Pareillement,

$$\begin{aligned}&\Sigma[y_m\,\Delta(z_{m-1}\,\Delta z_{m-2})]\\&\quad=y_m z_{m-1}\,\Delta(z_{m-2}\,\Delta z_{m-3})-\Sigma\{y_m\,\Delta[z_{m-1}\,\Delta(z_{m-2}\,\Delta z_{m-3})]\},\end{aligned}$$

et ainsi de suite; on aura donc

$$(\gamma)\qquad \Sigma y_m=C+y_m z_{m-1}\left\{\begin{array}{l}1-\Delta z_{m-2}+\Delta(z_{m-2}\,\Delta z_{m-3})\\ \quad-\Delta[z_{m-2}\,\Delta(z_{m-3}\,\Delta z_{m-4})]+\ldots\end{array}\right\},$$

C étant une constante arbitraire. Cette suite est, dans les différences finies, ce qu'est la suite (λ) de l'article XVIII, dans les différences infiniment petites : pour déterminer dans quel cas elle est convergente, nous observerons que, si la dimension de z_{m-1}, en p, q, a et m, est r, celle de Δz_{m-2} sera $r-1$, celle de $\Delta(z_{m-2}\Delta z_{m-3})$ sera $2r-2$, et ainsi du reste; or la convergence de la série exige que ces dimensions aillent en diminuant, ce qui suppose que r est moindre que l'unité. Dans la question présente, où

$$z_{m-1}=\frac{m(q+2a+1-m)}{2ap+q-m(p+q)},$$

les dimensions du numérateur et du dénominateur sont égales à 2, et par conséquent $r=0$; la suite sera donc convergente, pourvu que le dénominateur ne soit pas extrêmement petit, c'est-à-dire que $\frac{m-1}{2a-m}$ diffère sensiblement de $\frac{p}{q}$: or c'est ce qui a lieu, lorsque m est égal ou moindre que a, p étant supposé plus grand que q.

On peut mettre la quantité $\frac{m(q+2a+1-m)}{2ap+q-m(p+q)}$ sous cette forme

$$E+Fm+\frac{G}{2ap+q-m(p+q)},$$

en faisant

$$E=\frac{-q(p+q)-2aq-p}{(p+q)^2},$$

$$F=\frac{1}{p+q},$$

$$G=\frac{(2ap+q)[q(p+q)+2aq+p]}{(p+q)^2};$$

on aura ainsi

$$\Delta z_{m-1}=F+\frac{G(p+q)}{[2ap+q-m(p+q)][2ap+p+2q-m(p+q)]}.$$

Or, F et G étant positifs, il est clair que Δz_{m-2} est toujours positif tant que $\frac{m-1}{2a-m}$ est moindre que $\frac{p}{q}$; on voit de plus que, dans ce cas, $z_{m-1}\Delta z_{m-2}$ va toujours en augmentant, en sorte que $\Delta(z_{m-1}\Delta z_{m-2})$ est encore une quantité positive; donc Σy_m, étant égal à

$$y_m z_{m-1}-\Sigma(y_m\Delta z_{m-1}),$$

est moindre que $H + y_m z_{m-1}$, H étant une arbitraire. Pareillement, $\Sigma(y_m \Delta z_{m-1})$ étant égal à

$$y_m z_{m-1} \Delta(z_{m-2}) - \Sigma[y_m \Delta[(z_{m-1} \Delta z_{m-2})]$$

est moindre que $H' + y_m z_{m-1} \Delta z_{m-2}$, H′ étant une nouvelle arbitraire; donc l'intégrale Σy_m est moindre que $C + y_m z_{m-1}$ et plus grande que

$$C + y_m z_{m-1}(1 - \Delta z_{m-1}).$$

Si l'on détermine, au moyen de la formule (γ), l'intégrale Σy_m depuis $m = 0$ jusqu'à $m = a$, la constante C sera nulle; si l'on suppose ensuite qu'il nait 20000 enfants chaque année, ce qui donne $a = 10000$, on trouvera, en employant pour p et q les valeurs de l'article précédent relatives à Paris,

$$z_{a-1} = 26,22,$$
$$z_{a-2} = 26,09.$$

Partant,

$$\Delta z_{a-1} = 0,13;$$

on aura ainsi

$$\Sigma y_m < 26,22 y_a$$

et

$$\Sigma y_m > 26,22 y_a(1 - 0,13).$$

En faisant donc

$$\Sigma y_m = 26,22 y_a,$$

cette valeur de Σy_m ne surpassera que de $\frac{1}{10}$ environ la véritable valeur; il suit de là que, si l'on nomme P la probabilité que sur 20000 enfants il y aura autant de garçons que de filles, la probabilité que le nombre des garçons ne l'emportera pas sur celui des filles sera un peu plus petite que 26,22 P.

On déterminera la valeur de P par la formule (ϖ) de l'article XVII; pour cela, on y supposera $m = n = a$, et on la mettra sous cette forme

$$P = \frac{\gamma p^a q^a}{(p+q)^{2a}} \frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(p+a)(q+a)}}{\sqrt{pq}\,(p+q+2a)^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{a(p-q)}{q(p+q+2a)}\right]^{q+a}\left[1 - \frac{a(p-q)}{p(p+q+2a)}\right]^{p-a}$$

On observera ensuite que

$$\gamma = \frac{1.2.3\ldots 2a}{(1.2.3\ldots a)^2},$$

d'où l'on tire, par l'article XVII,

$$\gamma = \frac{2^{2a}}{\sqrt{a\pi}};$$

on a d'ailleurs

$$\log\left[1 + \frac{a(p-q)}{q(p+q+2a)}\right]^{q+a} = (q+a)\left[\frac{a(p-q)}{q(p+q+2a)} - \frac{1}{2}\frac{a^2(p-q)^2}{q^2(p+q+2a)^2} + \ldots\right],$$

$$\log\left[1 - \frac{a(p-q)}{p(p+q+2a)}\right]^{p+a} = (p+a)\left[\frac{-a(p-q)}{p(p+q+2a)} - \frac{1}{2}\frac{a^2(p-q)^2}{p^2(p+q+2a)^2} - \ldots\right].$$

a étant peu considérable par rapport à p et p différant peu de q, ces suites sont très convergentes, et l'on peut s'en tenir aux deux premiers termes; en ajoutant donc ces logarithmes, on aura

$$\log\left[1 + \frac{a(p-q)}{q(p+q+2a)}\right]^{q+a}\left[1 - \frac{a(p-q)}{p(p+q+2a)}\right]^{p+a}$$
$$= a^2(p-q)^2\left[\frac{1}{pq(p+q+2a)} - \frac{1}{2}\frac{p^2q + q^2p + a(p^2+q^2)}{p^2q^2(p+q+2a)^2}\right].$$

On peut supposer à très peu près $a(p^2+q^2) = 2apq$, ce qui réduit le second membre de l'équation précédente à $\frac{a^2(p-q)^2}{2pq(p+q+2a)}$; ce logarithme est hyperbolique, et, pour le convertir en logarithme des Tables, il faut, comme l'on sait, le multiplier par 0,43429448. En appliquant des nombres à ces formules, on trouvera que le logarithme tabulaire de

$$\left[1 + \frac{a(p-q)}{p(p+q+2a)}\right]^{q+a}\left[1 - \frac{a(p-q)}{p(p+q+2a)}\right]^{p+a}$$

est 0,0638041; on a ensuite, en portant la précision jusqu'à dix décimales,

$$\log 2 = 0,3010299957,$$
$$\log p = 5,4005846109,$$
$$\log q = 5,3837166515,$$
$$\log(p+q) = 5,6932625156,$$

ce qui donne

$$\log \frac{p^a q^a}{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{2a}} = \bar{2},3622260;$$

de plus,

$$\log \sqrt{a\pi} = 2,2485750,$$

$$\log \frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(p+a)(q+a)}}{\sqrt{pq}\,(p+q+2a)^{\frac{3}{2}}} = \bar{1},9913791:$$

on aura donc

$$\log P = \bar{4},1688342,$$

d'où l'on tire

$$26,22\,P = 0,0038678 = \frac{1}{259}.$$

La probabilité que, dans une année, les naissances des garçons ne seront pas en plus grand nombre à Paris que celles des filles, est donc moindre que $\frac{1}{259}$; or, en la supposant égale à cette fraction, on aura, à très peu près, le nombre d'années dans lesquelles on peut parier un contre un que cela n'arrivera pas, en multipliant son dénominateur 259 par le logarithme hyperbolique de 2, c'est-à-dire par 0,6931472, ce qui donne pour produit 179 : on peut donc parier avec avantage un contre un que cela n'arrivera pas dans l'intervalle de cent soixante-dix-neuf années.

Relativement à Londres,

$$p = 737629$$

et

$$q = 698958,$$

ce qui donne

$$z_{a-1} = 18,3000$$

et

$$\Delta z_{a-1} = 0,0694;$$

en sorte que, si l'on suppose la probabilité que les naissances des garçons ne l'emporteront pas sur celles des filles égale à 18,3P, cette probabilité ne surpassera que d'un quinzième environ la véritable. On trouve ensuite

$$\log\left[1+\frac{a(p-q)}{q(p+q+2a)}\right]^{q+a}\left[1-\frac{a(p-q)}{p(p+q+2a)}\right]^{p+a}=0,0432414,$$

$$\log\frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(p+a)(q+a)}}{\sqrt{pq}\,(p+q+2a)^{\frac{3}{2}}}=\bar{1},9970020.$$

On a de plus, en portant la précision jusqu'à dix décimales,

$$\log p=5,8678379827,$$
$$\log q=5,8445510800,$$
$$\log(p+q)=6,1573319321,$$

d'où l'on tire

$$\log\frac{p^a q^a}{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{2a}}=\bar{4},8518990;$$

on aura donc

$$\log P=\bar{6},6435674,$$

partant

$$18,3\,P=0,0000805 41=\frac{1}{12416}.$$

La probabilité que les naissances des garçons, à Londres, ne l'emporteront pas sur celles des filles, dans une année déterminée, est donc un peu moindre que $\frac{1}{12416}$, en sorte que l'on peut parier avec avantage 1 contre 1 que cela n'arrivera pas dans l'intervalle de huit mille six cent cinq années; ce phénomène est, comme l'on voit, beaucoup moins probable à Londres qu'à Paris, ce qui vient de ce que, dans la première de ces villes, le rapport des naissances des garçons à celles des filles est plus considérable.

XXI.

La théorie précédente suppose que l'on connait le nombre de fois que chaque événement simple est arrivé; mais, quoique cette supposition s'étende à un grand nombre de problèmes intéressants, cependant elle n'est encore qu'un cas particulier de cette partie de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événements aux causes. Nous allons exposer, dans les articles suivants, une méthode générale pour déterminer les possibilités des événements simples, quel que soit l'événement composé dont on a observé l'existence.

Considérons d'abord deux joueurs A et B, jouant aux mêmes conditions que dans l'article III, c'est-à-dire que, A ayant m jetons au commencement de chaque partie, B en ait $n - m$; qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne doive finir que lorsque l'un d'eux aura gagné tous les jetons de l'autre. Supposons ensuite qu'ils aient joué de cette manière un très grand nombre de parties, dont p aient été gagnées par A et q par B, et que l'on veuille déterminer leurs adresses respectives, ou, ce qui revient au même, leurs probabilités de gagner un seul coup. Il est clair que le nombre des coups gagnés ou perdus par chaque joueur est inconnu, puisque chaque partie peut être composée d'un nombre plus grand ou moindre de coups : on ignore donc ici le nombre de fois que chaque événement simple est arrivé; mais il est facile d'étendre à ce cas et à tous les autres semblables la théorie des articles précédents, en observant que, si p et q sont de très grands nombres, les probabilités des deux joueurs A et B pour gagner une partie seront à très peu près dans le rapport de ces nombres : or, ces probabilités étant connues, on aura facilement leurs adresses respectives ou leurs probabilités de gagner un seul coup; car, en nommant X la probabilité du joueur A pour gagner une partie, et x son adresse, on a, par l'article III,

$$X = \frac{1 - \left(\frac{1-x}{x}\right)^m}{1 - \left(\frac{1-x}{x}\right)^n}.$$

La seule racine utile de cette équation est celle qui est positive et moindre que l'unité; or il est aisé de voir *a priori* qu'il ne peut y en avoir qu'une qui satisfasse à ces conditions, puisque l'adresse x ne peut augmenter ou diminuer sans que la probabilité X augmente ou diminue; la valeur de x que l'on tirera de cette équation jouira donc du même degré de probabilité que X; or, si l'on suppose p et q très considérables, il sera extrêmement probable, par l'article XVIII, que X diffère très peu de $\frac{p}{p+q}$; donc, si l'on nomme a la racine positive et moindre que l'unité de l'équation

$$(a) \qquad 0 = qx^n + p(1-x)^n - (p+q)x^{n-m}(1-x)^m,$$

il sera très probable que l'adresse x est très approchante de a, en sorte que, si p et q étaient infinis, il serait infiniment probable que la différence de x et de a est moindre qu'aucune grandeur donnée. Cette valeur de x a d'ailleurs l'avantage de nous faire connaître le rapport des coups gagnés aux coups perdus par le joueur A; car, si l'on nomme r le nombre des premiers et s celui des seconds, l'adresse x doit être très peu différente de $\frac{r}{r+s}$, en sorte que l'on a, à très peu près,

$$\frac{r}{r+s} = a,$$

d'où l'on tire

$$\frac{r}{s} = \frac{a}{1-a}.$$

Supposons encore que A et B ont joué p parties avec la condition précédente, et q parties dans lesquelles A avait m' jetons et B $n'-m'$ au commencement de chaque partie. Supposons ensuite que, sur ces $p+q$ parties, A en ait gagné r; cela posé, pour déterminer les adresses de ces joueurs, nous nommerons x celle de A, et υ le nombre inconnu de parties qu'il a gagnées sur les p premières: l'équation (a) donnera dans ce cas

$$0 = (p-\upsilon)x^n + \upsilon(1-x)^n - px^{n-m}(1-x)^m.$$

Le nombre des parties que ce joueur a gagnées sur les q dernières est $r-\upsilon$; on aura donc encore, en vertu de l'équation (a),

$$0 = (q-r+\upsilon)x^{n'} + (r-\upsilon)(1-x)^{n'} - qx^{n'-m'}(1-x)^{m'}.$$

En éliminant υ de ces deux équations, on aura une équation en x, dont la racine positive et moindre que l'unité est celle qu'il faut choisir; or on prouvera, comme ci-dessus, qu'il ne peut y en avoir qu'une de cette nature. Si l'on nomme a cette racine, $\frac{a}{1-a}$ sera à très peu près le rapport du nombre des coups gagnés au nombre des coups perdus par le joueur A. On aura ensuite

$$\frac{\upsilon}{p} = a^{n-m}\,\frac{a^m-(1-a)^m}{a^n-(1-a)^n},$$

et ce sera le rapport du nombre des prémières parties gagnées par le joueur A au nombre total p de ces parties.

XXII.

Voici maintenant une méthode directe et générale pour déterminer les possibilités des événements simples, quel que soit l'événement observé.

Si l'on désigne par x et $1-x$ les possibilités des deux événements simples, et que l'on cherche, par les règles ordinaires de l'analyse des hasards, la probabilité de l'événement composé dont il s'agit, on aura pour son expression une fonction de x, multipliée par un coefficient constant quelconque; si l'on nomme y cette fonction et a la valeur de x, positive et moindre que l'unité qui la rend un maximum, non seulement cette valeur sera la plus probable, mais elle sera encore très approchante de la véritable possibilité x : par exemple, si l'événement observé est la naissance de p garçons et de q filles sur $p+q$ enfants, en nommant x la possibilité de la naissance d'un garçon et, par conséquent, $1-x$ celle de la naissance d'une fille, on aura

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}\,x^p(1-x)^q$$

pour la probabilité de cet événement; dans ce cas $y = x^p(1-x)^q$, et son maximum a lieu lorsque $x = \frac{p}{p+q}$; cette valeur de x est donc, à très peu près, la véritable possibilité de la naissance d'un garçon, lorsque p et q sont de très grands nombres.

Supposons encore que l'on tire trois boules d'une urne qui renferme une infinité de boules blanches et noires dans une proportion inconnue, et que A et B jouent à cette condition que A gagnera la partie si sur ces trois boules il y a plus de blanches que de noires, et qu'il la perdra s'il y a plus de noires que de blanches. Supposons ensuite que, sur $p+q$ parties, A en ait gagné p et perdu q; cela posé, si l'on nomme x la probabilité d'amener une boule blanche, on aura $x^2(3-2x)$ pour l'expression de la probabilité que A gagnera une partie, et $(1-x)^2(1+2x)$ pour la probabilité qu'il la perdra; la probabilité de l'événement observé sera donc

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}x^{2p}(3-2x)^p(1-x)^{2q}(1+2x)^q;$$

dans ce cas,

$$y=x^{2p}(3-2x)^p(1-x)^{2q}(1+2x)^q,$$

et son maximum donne

$$0=p(1-x)^2(1+2x)-qx^2(3-2x);$$

d'où il suit que, si l'on nomme a la racine positive et moindre que l'unité de cette équation, le rapport des boules blanches aux boules noires de l'urne sera à très peu près égal à $\frac{a}{1-a}$.

Le maximum de y n'indique d'une manière approchée la véritable valeur de x qu'autant que les valeurs de y voisines de ce maximum sont incomparablement plus grandes que les autres; car il est visible que l'intégrale $\int y\,dx$, prise dans un très petit intervalle de part et d'autre de ce maximum, est alors très approchante de cette même intégrale prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$: or le rapport de la première de ces intégrales à la seconde exprime la probabilité que la valeur de x est comprise dans cet intervalle. Les valeurs de y voisines du maximum surpasseront considérablement les autres, lorsque y aura des facteurs élevés à de grandes puissances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, α étant un coefficient très petit et d'autant moindre que l'événement observé est plus composé; si l'on prend, dans ce cas, le rapport de dy à $y\,dx$, on sera conduit à une équation de cette forme

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{1}{\alpha z},$$

z étant une fonction de x, qui ne renferme plus de puissances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$. Ainsi, toutes les fois que l'on parviendra à une équation semblable, les valeurs de x décroîtront avec une grande rapidité en s'éloignant du maximum, et la valeur de x correspondante à ce maximum sera très approchante de la véritable.

On voit par là que les événements composés ne sont pas tous propres à faire connaître les possibilités des événements simples : par exemple, A et B jouant aux mêmes conditions que dans l'article III, si A gagne la partie, en nommant x son adresse, on aura $\dfrac{1-\left(\frac{1-x}{x}\right)^m}{1-\left(\frac{1-x}{x}\right)^n}$ pour la probabilité de cet événement. Or, si l'on suppose m et n de très grands nombres, l'événement observé sera composé d'un grand nombre de coups; mais, comme les valeurs de y correspondantes à x plus grand que $\frac{1}{2}$ sont très peu différentes de l'unité, cet événement ne peut faire connaître d'une manière approchée la valeur de x : tout ce que l'on en peut conclure, c'est qu'il est extrêmement probable que A est plus fort que B, parce que les valeurs de y correspondantes à x plus petit que $\frac{1}{2}$ sont incomparablement moindres que les autres.

XXIII.

La connaissance des valeurs approchées des possibilités des événements simples qui résultent d'un événement composé serait très imparfaite si l'on n'était pas en état d'apprécier combien il est probable que, en prenant pour ces valeurs celles qui répondent au maximum de y, on ne se trompera pas, soit en *plus*, soit en *moins*, d'une quantité donnée; pour cela, il est nécessaire, comme on l'a vu dans l'article XVIII, de déterminer le rapport de l'intégrale $\int y\,dx$, prise dans un petit intervalle de part et d'autre de ce maximum, à cette même intégrale prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et c'est ce que nous avons fait, dans l'article cité, pour le cas où $y=x^p(1-x)^q$, p et q étant de très grands nombres. Nous allons présentement généraliser ces recherches et les étendre à toutes les valeurs de y qui conduisent à une équation de cette forme

$$y\,dx=\alpha z\,dy,$$

z étant une fonction de x qui ne renferme point de puissances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$.

Reprenons l'équation (λ) de l'article XVIII,

$$(\lambda)\quad \int y\,dx=C+\alpha yz\left\{1-\alpha\frac{dz}{dx}+\alpha^2\frac{d(z\,dz)}{dx^2}-\alpha^3\frac{d[z\,d(z\,dz)]}{dx^3}+\ldots\right\};$$

si l'on nomme

a la valeur de x correspondante au maximum de y;
Y et Z les valeurs de x et de z correspondantes à $x=a-\theta$;
Y' et $-$Z' les valeurs de ces mêmes quantités correspondantes à $x=a+\theta$;

si l'on observe d'ailleurs que, les deux événements simples étant supposés avoir eu lieu, on a $y=0$ lorsque $x=0$ et lorsque $x=1$, l'intégrale $\int y\,dx$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a-\theta$ sera

$$\alpha YZ\left[1+\alpha\frac{dZ}{d\theta}+\alpha^2\frac{d(Z\,dZ)}{d\theta^2}+\ldots\right];$$

cette même intégrale, prise depuis $x=a+\theta$ jusqu'à $x=1$, sera

$$\alpha Y'Z'\left[1-\alpha\frac{dZ'}{d\theta}+\alpha^2\frac{d(Z'\,dZ')}{d\theta^2}-\ldots\right].$$

En nommant donc k l'intégrale $\int y\,dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on aura cette même intégrale, prise depuis $x=a-\theta$ jusqu'à $x=a+\theta$, en retranchant de k les deux intégrales précédentes; en divisant ensuite ce reste par k, on aura la probabilité que x sera compris dans cet intervalle. Cette probabilité sera, par conséquent, égale à

$$1 - \frac{\alpha YZ}{k}\left\{1 + \alpha\frac{dZ}{d\theta} + \alpha^2\frac{d(Z\,dZ)}{d\theta^2} + \alpha^3\frac{d[Z\,d(Z\,dZ)]}{d\theta^3} + \ldots\right\}$$
$$- \frac{\alpha Y'Z'}{k}\left\{1 - \alpha\frac{dZ'}{d\theta} + \alpha^2\frac{d(Z'dZ')}{d\theta^2} - \alpha^3\frac{d[Z'd(Z'dZ')]}{d\theta^3} + \ldots\right\};$$

la question se réduit ainsi à déterminer k. Nous y sommes parvenu dans l'article XVIII où, $y = x^p(1-x)^q$, au moyen du beau théorème de M. Stirling sur la valeur du produit $1.2.3\ldots u$, lorsque u est un très grand nombre; mais ce procédé est indirect, et il est naturel de penser qu'il existe une méthode pour déterminer directement k, quel que soit y, et dont ce théorème est un corollaire : celle que je vais exposer m'a paru remplir cet objet de la manière la plus générale.

Puisque la valeur de y conduit, par la supposition, à une équation de cette forme $y\,dx = \alpha z\,dy$, on a

$$\log y = \frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{z},$$

en sorte que $\log y$ est très grand et de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$; d'ailleurs, a étant la valeur de x correspondante au maximum de y, si l'on fait $x = a + \theta$, et que l'on nomme A la plus grande valeur de y ou sa valeur lorsque $\theta = 0$, on aura, en réduisant en série,

$$\alpha\log y = \alpha\log A - \theta^2(f + f'\theta + f''\theta^2 + \ldots),$$

le terme multiplié par θ disparaissant, parce que l'équation $x = a$ ou $\theta = 0$ rend y un maximum. On aura ainsi

$$y = A\,e^{-\frac{\theta^2}{\alpha}(f + f'\theta + f''\theta^2 + \ldots)}$$

et

$$\int y\,dx = A\int e^{-\frac{\theta^2}{\alpha}(f + f'\theta + \ldots)}\,d\theta,$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Soit

$$\theta^2(f + f'\theta + f''\theta^2 + \ldots) = \alpha t^2$$

ou, ce qui revient au même,

$$\log A - \log y = t^2,$$

on aura par la méthode du retour des suites

$$\theta = \alpha^{\frac{1}{2}} t\left(h + h^{(1)}\alpha^{\frac{1}{2}} t + h^{(2)}\alpha t^2 + h^{(3)}\alpha^{\frac{3}{2}} t^3 + \ldots\right),$$

partant

$$d\theta = \alpha^{\frac{1}{2}} dt\left(h + 2h^{(1)}\alpha^{\frac{1}{2}} t + 3h^{(2)}\alpha t^2 + \ldots\right),$$

ce qui donne

$$\int y\,dx = \alpha^{\frac{1}{2}} A \int e^{-t^2} dt\left(h + 2h^{(1)}\alpha^{\frac{1}{2}} t + 3h^{(2)}\alpha t^2 + \ldots\right) = k.$$

L'intégrale $\int y\,dx$ doit être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; or, x étant nul, on a $y = 0$ et $\log y = -\infty$: donc $t^2 = \infty$. Lorsque $x = a$, on a $\theta = 0$, partant $t = 0$; d'ailleurs, lorsque θ change de signe, t en change pareillement, en sorte que les valeurs de t, correspondantes à celles de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, ont un signe différent de celles qui correspondent aux valeurs de x, depuis $x = a$ jusqu'à $x = 1$; or, x étant 1, on a $y = 0$, ce qui donne $t^2 = \infty$; les valeurs de t s'étendent conséquemment depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Dans ce cas, on a

$$\int t^{2n-1} e^{-t^2} dt = 0,$$

parce que, $t^{2n-1} e^{-t^2}$ se changeant en $-t^{2n-1} e^{-t^2}$ lorsque t est négatif, la somme de ces deux quantités est nulle; on a, par une raison semblable,

$$\int t^{2n} e^{-t^2} dt = 2\int t^{2n} e^{-t^2} dt$$

(la seconde intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$); or cette supposition donne

$$\int t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{2n-1}{2}\int t^{2n-2} e^{-t^2} dt;$$

pareillement

$$\int t^{2n-2} e^{-t^2} dt = \frac{2n-3}{2}\int t^{2n-4} e^{-t^2} dt,$$

et ainsi de suite; donc

$$\int t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n} \int e^{-t^2} dt.$$

On aura ainsi

$$k = 2\alpha^{\frac{1}{2}} A \left(h + 1.3\alpha \frac{h^{(2)}}{2} + 1.3.5\alpha^2 \frac{h^{(4)}}{2^2} + 1.3.5.7\alpha^3 \frac{h^{(6)}}{2^3} + \ldots \right) \int e^{-t^2} dt.$$

Il ne s'agit donc plus que d'avoir l'intégrale $\int e^{-t^2} dt$ depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$. Pour cela, considérons la double intégrale

$$\iint e^{-s(1+u^2)} ds\, du,$$

et prenons-la depuis $s = 0$ jusqu'à $s = \infty$ et depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$; en l'intégrant d'abord par rapport à s, on aura

$$\iint e^{-s(1+u^2)} ds\, du = \int \frac{du}{1+u^2}.$$

Or on a, comme on sait,

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2},$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon; donc

$$\iint e^{-s(1+u^2)} ds\, du = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on prend cette double intégrale d'abord par rapport à u, en faisant $u\sqrt{s} = t$, elle deviendra $\int e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} \int e^{-t^2} dt$; soit $\int e^{-t^2} dt = B$ (l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$), on aura

$$\iint e^{-s(1+u^2)} ds\, du = B \int e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Or, en faisant $s = s'^2$, on a

$$\int e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2 \int e^{-s'^2} ds' = 2B$$

(l'intégrale étant prise depuis $s'=0$ jusqu'à $s'=\infty$); donc

$$\int\int e^{-s(1+u^2)}\,ds\,du = 2B^2 = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire $B = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, partant

$$(s)\qquad k = A\sqrt{2\pi}\left(h + 1.3\frac{\alpha h^{(2)}}{2} + 1.3.5\frac{\alpha^2 h^{(4)}}{2^2} + 1.3.5.7\frac{\alpha^3 h^{(6)}}{2^3} + \ldots\right).$$

Si l'on met l'équation

$$\log A - \log y = t^2$$

sous cette forme

$$\theta = t\sqrt{\frac{\theta^2}{\log A - \log y}},$$

on aura, pour déterminer les coefficients h, $h^{(2)}$, $h^{(4)}$, ... de la série

$$\theta = \alpha^{\frac{1}{2}} t\left(h + h^{(1)}\alpha^{\frac{1}{2}} t + h^{(2)}\alpha t^2 + \ldots\right),$$

l'expression générale

$$(z)\qquad \alpha^{n+\frac{1}{2}} h^{(2n)} = \frac{d^{2n}\left[\theta^{2n+1}(\log A - \log y)^{-n-\frac{1}{2}}\right]}{1.2.3\ldots(2n+1)\,d\theta^{2n}},$$

pourvu que l'on suppose $d\theta$ constant et $\theta = 0$ après les différentiations. [*Voir* sur cela les *Mémoires de l'Académie* pour l'année 1777, p. 115 (¹).]

Lorsque $n = 0$, on a

$$\alpha^{\frac{1}{2}} h = \theta(\log A - \log y)^{-\frac{1}{2}};$$

or

$$\log y = \log A + \theta\frac{dy}{y\,d\theta} + \frac{\theta^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{y\,d\theta^2} - \frac{dy^2}{y^2\,d\theta^2}\right) + \ldots,$$

y, dy, d^2y, ..., dans le second membre de cette équation, étant ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y suppose $\theta = 0$; cette supposition donne

$$y = A \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{d\theta} = 0;$$

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. IX, p. 329.

on aura donc

$$\alpha^{\frac{1}{2}} h = \sqrt{\frac{2A}{-\frac{d^2 y}{d\theta^2}}}.$$

Partant on aura à très peu près, lorsque α est très petit,

$$k = \frac{A^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{-\frac{d^2 y}{d\theta^2}}{}}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\mu) \qquad \left(\int y\,dx\right)^2 = \frac{2\pi y^3}{-\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

l'intégrale $\int y\,dx$ étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et les quantités y et $\frac{d^2 y}{dx^2}$ du second membre de cette équation étant ce qu'elles deviennent lorsqu'on y suppose $x = a$.

XXIV.

En substituant $a + \theta$ au lieu de x dans $\log y$ et en réduisant en série, la condition du maximum de y fait disparaître la première puissance de θ dans cette série; mais cette condition peut, comme l'on sait, faire disparaître la première, la deuxième et la troisième puissance de θ ou la première, la deuxième, la troisième, la quatrième et la cinquième puissance, et ainsi de suite, pourvu que le nombre des puissances qui disparaissent soit impair. Voyons ce que devient alors l'intégrale $\int y\,dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Supposons que la première, la deuxième et la troisième puissance de θ disparaissent, on aura pour $\alpha \log y$ une suite de cette forme

$$\alpha \log y = \alpha \log A - \theta^4 (f + f'\theta + f''\theta^2 + \ldots);$$

donc, si l'on fait

$$\theta^4 (f + f'\theta + f''\theta^2 + \ldots) = \alpha t^4,$$

on aura

$$\log A - \log y = t^4$$

et

$$\theta = \alpha^{\frac{1}{4}} t\left(h + h^{(1)} \alpha^{\frac{1}{4}} t + h^{(2)} \alpha^{\frac{1}{2}} t^2 + h^{(3)} \alpha^{\frac{3}{4}} t^3 + \alpha h^{(4)} t^4 + \ldots\right),$$

d'où l'on tire

$$\int y\,dx = \alpha^{\frac{1}{4}} A \int e^{-t^4} dt\left(h + 2 h^{(1)} \alpha^{\frac{1}{4}} t + 3 h^{(2)} \alpha^{\frac{1}{2}} t^2 + \ldots\right).$$

On prouvera, comme dans l'article précédent, que l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; or on a dans ce cas

$$\int t^{2n-1} e^{-t^4} dt = 0$$

et

$$\int t^{2n} e^{-t^4} dt = 2 \int t^{2n} e^{-t^4} dt,$$

l'intégrale du second membre étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$. Si l'on y suppose ensuite $n = 2i$, on aura

$$\int t^{2n} e^{-t^4} dt = \frac{1.5.9\ldots(4i-3)}{4^i} \int e^{-t^4} dt,$$

et, si $n = 2i + 1$, on aura

$$\int t^{2n} e^{-t^4} dt = \frac{3.7.11\ldots(4i-1)}{4^i} \int t^2 e^{-t^4} dt;$$

en supposant donc

$$\int e^{-t^4} dt = C,$$
$$\int t^2 e^{-t^4} dt = C',$$

on aura

$$\begin{aligned}\int y\,dx = {} & 2\alpha^{\frac{1}{4}} AC\left(h + \frac{1.5}{4} \alpha h^{(4)} + \frac{1.5.9}{4^2} \alpha^2 h^{(8)} + \frac{1.5.9.13}{4^3} \alpha^3 h^{(12)} + \ldots\right) \\ & + 2\alpha^{\frac{1}{4}} AC'\left(3 h^{(2)} + \frac{3.7}{4} \alpha h^{(6)} + \frac{3.7.11}{4^2} \alpha^2 h^{(10)} + \frac{3.7.11.15}{4^3} \alpha^3 h^{(14)} + \ldots\right),\end{aligned}$$

et il est aisé d'en conclure, par analogie, les valeurs de $\int y\,dx$ dans le cas où la condition du maximum de y ferait disparaître un plus grand nombre de puissances de θ.

Tout se réduit donc à déterminer les valeurs de C et de C' : nous observerons d'abord que, C étant connu, C' le sera pareillement, car, si l'on prend la double intégrale $\int\int e^{-s(1+u^4)}ds\,du$, depuis $s=0$ jusqu'à $s=\infty$ et depuis $u=0$ jusqu'à $u=\infty$, on aura, en intégrant d'abord par rapport à s,

$$\int\int e^{-s(1+u^4)}du\,ds = \int\frac{du}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Si l'on fait ensuite $u\sqrt[4]{s}=t$, on aura

$$\int\int e^{-s(1+u^4)}ds\,du = \int e^{-s}\frac{ds}{\sqrt[4]{s}}\int e^{-t^4}dt = C\int e^{-s}\frac{ds}{\sqrt[4]{s}}.$$

Soit $s=s'^4$, et l'on aura

$$\int e^{-s}\frac{ds}{\sqrt[4]{s}} = 4\int s'^2e^{-s'^4}ds' = 4C';$$

donc

$$\int\int e^{-s(1+u^4)}ds\,du = 4CC' = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

ce qui donne

$$C' = \frac{\pi}{8C\sqrt{2}}.$$

Quant à la valeur de C, il ne m'a pas encore été possible, malgré plusieurs tentatives, de la ramener aux arcs de cercle ou aux logarithmes; mais j'ai trouvé qu'elle dépendait de la rectification de la courbe élastique rectangle ou, ce qui revient au même, de l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; si l'on désigne par π' la valeur de cette intégrale, on a trouvé

$$\pi' = 1,31102877714605987 \quad (^1).$$

Cela posé, considérons la double intégrale $\int\int e^{-s^2(1+u^4)}ds\,du$, prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=\infty$ et depuis $u=0$ jusqu'à $u=\infty$; en faisant $u\sqrt{s}=t$, elle deviendra

$$\int e^{-s^2}\frac{ds}{\sqrt{s}}\int e^{-t^4}dt \quad \text{ou} \quad C\int e^{-s^2}\frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

(1) *Voir* le Traité de M. Stirling, *De summatione et interpolatione serierum*, p. 58.

Soit $s = s'^2$, et l'on aura

$$\int e^{-s^2}\frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\int e^{-s'^4}ds' = 2\,\mathrm{C},$$

partant

$$\int\int e^{-s'^4(1+u^4)}ds\,du = 2\,\mathrm{C}^2.$$

Supposons maintenant $s\sqrt{1+u^4} = s''$, et nous aurons

$$\int\int e^{-s^2(1+u^4)}ds\,du = \int\frac{du}{\sqrt{1+u^4}}\int e^{-s''^2}ds'' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int\frac{du}{\sqrt{1+u^4}};$$

en nommant donc E l'intégrale $\int\frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$, prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$, on aura

$$2\,\mathrm{C}^2 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\sqrt{\pi},$$

ce qui donne

$$\mathrm{C} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{E}\sqrt{\pi}}.$$

Si l'on fait $\frac{1}{1+u^4} = s^4$, on aura

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = -\int\frac{ds}{(1-s^4)^{\frac{3}{4}}},$$

l'intégrale relative à s étant prise depuis $s = 1$ jusqu'à $s = 0$, en sorte que

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = \mathrm{E} = \int^1\frac{ds}{(1-s^4)^{\frac{3}{4}}},$$

l'intégrale relative à s étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$.

Considérons présentement la double intégrale $\int\int\frac{dx\,dz}{(1-z^2-x^4)^{\frac{1}{2}}}$, prise (1) depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ et depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$;

(1) Il faut sans doute comprendre que cette intégrale doit être étendue à toutes les valeurs positives de x et de z vérifiant l'inégalité

$$1 - z^2 - x^4 > 0,$$

de sorte que, pour une valeur donnée de z, x varie de 0 à $(1-z^2)^{\frac{1}{4}}$; x augmentant encore jusqu'à 1, l'élément différentiel deviendrait imaginaire.

(*Note de l'éditeur.*)

en faisant $\frac{x}{(1-z^2)^{\frac{1}{4}}} = x'$, elle se changera dans celle-ci

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \int \frac{dx'}{(1-x'^4)^{\frac{3}{4}}},$$

ces intégrales étant prises depuis $x' = 0$ et $z = 0$ jusqu'à $x' = 1$ et $z = 1$, ce qui donne

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{dx}{(1-x'^4)^{\frac{3}{4}}} = \mathrm{E};$$

on aura donc

$$\int\int \frac{dx\,dz}{(1-z^2-x^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi \mathrm{E}}{2}.$$

Si l'on fait ensuite $\frac{z}{\sqrt{1-x^4}} = z'$, on aura

$$\int\int \frac{dx\,dz}{(1-z^2-x^4)^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} \int \frac{dz'}{(1-z'^2)^{\frac{3}{4}}};$$

or on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

D'ailleurs, si l'on suppose $1 - z'^2 = t^4$, on aura

$$\int \frac{dz'}{(1-z'^2)^{\frac{3}{4}}} = -2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis $t = 1$ jusqu'à $t = 0$; cette intégrale est évidemment égale à $-\varpi'$: donc

$$\int \frac{dz'}{(1-z'^2)^{\frac{3}{4}}} = 2\varpi',$$

ce qui donne

$$\int\int \frac{dx\,dz}{(1-z^2-x^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi\varpi'}{\sqrt{2}} = \frac{\pi \mathrm{E}}{2},$$

partant

$$\mathrm{E} = \varpi'\sqrt{2},$$

d'où l'on tire

$$C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi'}\sqrt{2\pi} \qquad \text{et} \qquad C' = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{\pi'}\sqrt{2}}.$$

XXV.

Pour appliquer la théorie précédente à quelques exemples, soit

$$y = x^p(1-x)^q;$$

en faisant $p = \frac{1}{\alpha}$ et $q = \frac{\mu}{\alpha}$, on aura, dans le cas du maximum de y,

$$x = \frac{1}{1+\mu},$$

partant (art. XXIII)

$$A = \frac{\mu^q}{(1+\mu)^{p+q}}$$

et

$$\alpha \log A = \mu \log\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) + \log\left(\frac{1}{1+\mu}\right);$$

on a d'ailleurs

$$\alpha \log y = \log x + \mu \log(1-x),$$

et, si l'on fait

$$x = \frac{1}{1+\mu} + \theta,$$

on aura

$$\alpha \log y = \mu \log\left(\frac{\mu}{1+\mu} - \theta\right) + \log\left(\frac{1}{1+\mu} + \theta\right);$$

donc

$$\log A - \log y = -\frac{1}{\alpha}\log[1+(1+\mu)\theta] - \frac{\mu}{\alpha}\log\left(1 - \frac{1+\mu}{\mu}\theta\right)$$
$$= \frac{(1+\mu)^2(1+\mu)}{2\alpha\mu}\theta^2 + \frac{(1+\mu)^3(1-\mu^2)}{3\alpha\mu^2}\theta^3 + \frac{(1+\mu)^4(1+\mu^3)}{4\alpha\mu^3}\theta^4 + \ldots,$$

d'où l'on tirera, en vertu de la formule (z) de l'article XXIII,

$$\alpha^{\frac{1}{2}} h = \frac{\sqrt{2\mu\pi}}{(1+\mu)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\alpha^{\frac{3}{2}} h^{(2)} = \frac{\alpha\sqrt{2\mu\pi}}{(1+\mu)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{[(1+\mu)^2 - 13\mu]}{18\mu(1+\mu)},$$

. . . .

La formule (s) de l'article XXIII donnera donc

$$k = \frac{\sqrt{2\alpha\pi}\,\mu^{q+\frac{1}{2}}}{(1+\mu)^{p+q+\frac{3}{2}}}\left\{1 + \frac{\alpha[(1+\mu)^2 - 13\mu]}{12\mu(1+\mu)} + \ldots\right\},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans l'article XVIII.

Si $\mu = 1$, ou, ce qui revient au même, si $p = q$, on déterminera plus simplement de la manière suivante les coefficients de la série en t, qui exprime la valeur de θ; pour cela, on observera que, dans ce cas,

$$\log A - \log y = -\frac{1}{\alpha}\log(1 - 4\theta^2) = t^2,$$

ce qui donne

$$1 - 4\theta^2 = e^{-\alpha t^2}$$

et

$$2\theta = (1 - e^{-\alpha t^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$(1 - e^{-\alpha t^2})^{\frac{1}{2}} = 2\alpha^{\frac{1}{2}} t(l + l'\alpha t^2 + l''\alpha^2 t^4 + l'''\alpha^3 t^6 + \ldots);$$

en prenant les différentielles logarithmiques des deux membres de cette équation et multipliant en croix, on aura

$$\alpha t^2 e^{-\alpha t^2}(l + l'\alpha t^2 + l''\alpha^2 t^4 + \ldots) = (l + 3l'\alpha t^2 + 5l''\alpha^2 t^4 + \ldots)(1 - e^{-\alpha t^2});$$

or on a

$$e^{-\alpha t^2} = 1 - \alpha t^2 + \frac{\alpha^2 t^4}{1.2} - \frac{\alpha^3 t^6}{1.2.3} + \ldots.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation précédente, on aura entre les coefficients l, l', l'', l''', ... les équations suivantes

$$2l' + \frac{l}{1.2} = 0,$$

$$4l'' - \frac{l'}{1.2} - \frac{2l}{1.2.3} = 0,$$

....

et généralement

$$0 = 2il^{(i)} - (2i-3)\frac{l^{(i-1)}}{1.2} + (2i-6)\frac{l^{(i-2)}}{1.2.3}$$
$$- (2i-9)\frac{l^{(i-3)}}{1.2.3.4} + (2i-12)\frac{l^{(i-4)}}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

en continuant cette suite jusqu'à ce qu'on arrive au coefficient l. On déterminera donc facilement l', l'', l''', ... lorsque ce coefficient sera connu; or, si l'on néglige les puissances de t supérieures à l'unité, on a

$$(1 - e^{-\alpha t^2})^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} t;$$

donc $l = \frac{1}{2}$; la formule (s) donnera ensuite, en observant que dans ce cas $A = \frac{1}{2^p}$,

$$k = \frac{\sqrt{\alpha\pi}}{2^p}\left(l + 1.3.\alpha\frac{l'}{2} + 1.3.5\frac{\alpha^2 l''}{2^2} + \ldots\right).$$

On a généralement

$$k = \int x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}{1.2.3\ldots(p+q+1)};$$

la supposition de $p = q$ donne

$$\frac{1.2.3\ldots 2p}{(1.2.3\ldots p)^2} = \frac{1}{(2p+1)k};$$

or le premier membre de cette équation est le terme moyen du binôme $(1+1)^{2p}$; on aura donc la valeur de ce terme par une suite très convergente, lorsque p est un très grand nombre. Si l'on compare la manière dont nous y sommes parvenu avec celles qu'ont employées MM. Stirling et Euler, le premier dans son Ouvrage *De transformatione et interpolatione serierum*, et le second dans ses *Institutions de Calcul différentiel*, on trouvera, si je ne me trompe, que, indépendamment de sa généralité, elle a l'avantage d'être plus directe, en ce que les procédés de ces deux illustres auteurs supposent que l'on connaît d'avance l'expression, en facteurs, du rapport de la demi-circonférence au rayon, expression que Wallis a donnée; celui de M. Euler est, de plus, fondé sur la valeur en série du produit $1.2.3\ldots p$, lorsque p est un grand nombre; cette valeur est encore très facile à déterminer par notre méthode. Pour cela, soit

$$y = x^p e^{-x},$$

on aura, en intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int x^p e^{-x}\,dx = p\int x^{p-1}e^{-x}\,dx,$$

d'où il est aisé de conclure

$$\int x^p e^{-x}\,dx = 1.2.3\ldots p.$$

Le maximum de y a lieu lorsque $x=p$, ce qui donne $p^p e^{-p}$ pour ce maximum; soient donc $p=\frac{1}{\alpha}$ et $x=\frac{1}{\alpha}+\theta$, on aura

$$\log y - \log p^p e^{-p} = \frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha\theta)-\theta;$$

donc

$$\int y\,dx = p^p e^{-p}\int e^{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha\theta)-\theta}\,d\theta.$$

Si l'on fait

$$\log(1+\alpha\theta)-\alpha\theta = -\alpha t^2,$$

on aura

$$\frac{\alpha\theta^2}{2}-\frac{\alpha^2\theta^3}{3}+\frac{\alpha^3\theta^4}{4}-\ldots = t^2;$$

soit

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(h + h'\alpha^{\frac{1}{2}}t + h''\alpha t^2 + h'''\alpha^{\frac{3}{2}}t^3+\ldots\right),$$

on trouvera

$$h=\sqrt{2},\qquad h'=\frac{2}{3},\qquad h''=\frac{\sqrt{2}}{18},\qquad \ldots,$$

et l'on aura

$$d\theta = \frac{dt}{\sqrt{\alpha}}\left(h + 2h'\alpha^{\frac{1}{2}}t + 3h''\alpha t^2+\ldots\right);$$

donc

$$\int y\,dx = p^{p+\frac{1}{2}}e^{-p}\int dt\left(h+2h'\alpha^{\frac{1}{2}}t+3h''\alpha t^2+\ldots\right)e^{-t^2}.$$

L'intégrale en x doit être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$; or, x étant nul, on a $\theta=-\frac{1}{\alpha}$, et par conséquent $t^2=\infty$; x étant égal à ∞, on a $\theta=\infty$, partant $t^2=\infty$; on doit donc prendre l'intégrale relative à dt depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, d'où l'on tire, par l'article XXIII,

$$\int y\,dx = p^{p+\frac{1}{2}}e^{-p}\sqrt{\pi}\left(h+1.3\frac{\alpha h''}{2}+1.3.5\frac{\alpha^2 h^{\text{IV}}}{2^2}+\ldots\right),$$

partant

$$1.2.3\ldots p = p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12}\alpha + \ldots\right).$$

Nous pourrions appliquer cette méthode à beaucoup d'autres exemples, et par là étendre et perfectionner la théorie des suites; mais cette digression nous écarterait trop de notre objet principal.

XXVI.

La méthode précédente donne une solution fort simple d'un problème intéressant, qu'il serait peut-être très difficile de résoudre par d'autres méthodes : on a vu (art. XIX) que le rapport des naissances des garçons à celles des filles est sensiblement plus grand à Londres qu'à Paris; cette différence semble indiquer à Londres une plus grande facilité pour la naissance des garçons : il s'agit de déterminer combien cela est probable.

Pour cela, soient

u la probabilité de la naissance d'un garçon à Paris;
p le nombre des naissances des garçons observées dans cette ville;
q celui des filles;
$u - x$ la possibilité de la naissance d'un garçon à Londres;
p' le nombre de naissances des garçons qu'on y a observées;
q' celui des filles.

On aura, pour la probabilité de ce double événement,

$$\mathrm{H} u^p (1-u)^q (u-x)^{p'} (1-u+x)^{q'},$$

H étant un coefficient constant; donc, si l'on nomme P la probabilité que la naissance d'un garçon est moins possible à Londres qu'à Paris, on aura

$$\mathrm{P} = \frac{\iint u^p (1-u)^q (u-x)^{p'} (1-u+x)^{q'}\, dx\, du}{\iint u^p (1-u)^q (u-x)^{p'} (1-u+x)^{q'}\, dx\, du},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = x$ et depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Celle du dénominateur doit être prise pour toutes les valeurs possibles de x et de u; or, si l'on fait $u-x=s$, ce dénominateur deviendra

$$\iint u^p(1-u)^q s^{p'}(1-s)^{q'}\,du\,ds,$$

la double intégrale étant prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$ et depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$: on aura ainsi

$$P=\frac{\iint u^p(1-u)^q(u-x)^{p'}(1-u+x)^{q'}\,dx\,du}{\iint u^p(1-u)^q s^{p'}(1-s)^{q'}\,ds\,du}.$$

Déterminons d'abord l'intégrale du numérateur.

En nommant y la quantité

$$u^p(1-u)^q(u-x)^{p'}(1-u+x)^{q'},$$

on aura à très peu près, par la formule (μ) de l'article XXIII,

$$\int y\,du=\frac{\sqrt{2\pi}\,y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}}},$$

en substituant pour u, dans le second membre de cette équation, sa valeur en x, qui rend y un maximum; soit X cette valeur, on a

$$\frac{\partial y}{\partial u}=y\left(\frac{p}{u}-\frac{q}{1-u}+\frac{p'}{u-x}-\frac{q'}{1-u+x}\right)$$

et

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=y\left[\frac{p}{u^2}+\frac{q}{(1-u)^2}+\frac{p'}{(u-x)^2}+\frac{q'}{(1-u+x)^2}\right]$$
$$-\frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{p}{u}-\frac{q}{1-u}+\frac{p'}{u-x}-\frac{q'}{1-u+x}\right).$$

Si l'on substitue X au lieu de u, on a, par la condition du maximum $\frac{\partial y}{\partial u}=0$, partant

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=y\left[\frac{p}{X^2}+\frac{q}{(1-X)^2}+\frac{p'}{(X-x)^2}+\frac{q'}{(1-X+x)^2}\right],$$

d'où l'on tire

$$\int y\,du = \frac{\sqrt{2\pi}\,y}{\sqrt{\frac{p}{X^2} + \frac{q}{(1-X)^2} + \frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}}},$$

X étant déterminé par l'équation

$$(t) \qquad o = \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} + \frac{p'}{X-x} - \frac{q'}{1-X+x}$$

ou

$$(t') \qquad \left\{ \begin{aligned} o = {} & X(1-X)[(p+p')(1-X) - (q+q')X] \\ & + x\{(p'+q')X(1-X) + (1-2X)[qX - p(1-X)]\} \\ & + x^2[qX - p(1-X)]. \end{aligned} \right.$$

Soit, pour abréger,

$$R = \sqrt{\frac{p}{X^2} + \frac{q}{(1-X)^2} + \frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}};$$

la question est réduite à déterminer l'intégrale $\sqrt{2\pi}\int\frac{y\,dx}{R}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Au lieu de cette intégrale, on peut considérer celle-ci $\sqrt{2\pi}\int\frac{y}{R}\frac{dx}{dX}dX$, x étant regardé comme fonction de X; mais il faut prendre cette dernière intégrale depuis la valeur de X qui a lieu lorsque $x = 0$ jusqu'à celle qui a lieu lorsque $x = 1$; or, en faisant $x = 0$, l'équation (t') devient

$$o = (p+p')(1-X) - (q+q')X,$$

partant

$$X = \frac{p+p'}{p+p'+q+q'}.$$

En faisant $x = 1$, cette équation donne $X = 1$; on doit donc prendre l'intégrale $\int\frac{y}{R}\frac{dx}{dX}dX$, depuis $X = \frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$ jusqu'à $X = 1$.

Supposons $\frac{y}{R}\frac{dx}{dX} = y'$: la condition du maximum de y' donne l'équation

$$o = \frac{dy}{y} + \frac{d\left(\frac{1}{R}\frac{dx}{dX}\right)}{\frac{1}{R}\frac{dx}{dX}};$$

or, y étant égal à $X^p(1-X)^q(X-x)^{p'}(1-X+x)^{q'}$, on a

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} + \frac{p'}{X-x} - \frac{q'}{1-X+x}\right)dX + \left(\frac{q'}{1-X+x} - \frac{p'}{X-x}\right)dx;$$

cette équation se réduit, en vertu de l'équation (t), à celle-ci

$$\frac{dy}{y} = \frac{q'\,dx}{1-X+x} - \frac{p'\,dx}{X-x} = \left(\frac{p}{X} - \frac{q}{1-X}\right)dx.$$

Maintenant, p et q étant de très grands nombres, il est visible que $\frac{dy}{y}$ est incomparablement plus grand que $\frac{d\left(\frac{1}{R}\frac{dx}{dX}\right)}{\frac{1}{R}\frac{dx}{dX}}$, et qu'ainsi on peut négliger la seconde de ces deux différentielles par rapport à la première; on aura donc, à très peu près, dans le cas du maximum de y',

$$o = \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X},$$

partant

$$X = \frac{p}{p+q}.$$

Cette valeur de X est moindre que $\frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$ lorsque $\frac{p'}{p'+q'}$ est, comme nous le supposons ici, plus grand que $\frac{p}{p+q}$; les deux limites dans lesquelles il faut prendre l'intégrale $\int y'\,dx$ sont, par conséquent, au delà de la valeur de X qui rend y' un maximum; ainsi l'on doit, pour déterminer cette intégrale, faire usage de la suite (λ) de l'article XVIII.

On a, à très peu près,

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{dy}{y} = \left(\frac{p}{X} - \frac{q}{1-X}\right)dx;$$

d'ailleurs, en différentiant l'équation

$$o = \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} + \frac{p'}{X-x} - \frac{q'}{1-X+x},$$

on trouve

$$\frac{dx}{dX} = \frac{R^2}{\frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}};$$

donc

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{R^2}{\frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}} \; \frac{p-(p+q)X}{X(1-X)} dX.$$

Soient

$$p = \frac{1}{\alpha}, \qquad q = \frac{\mu}{\alpha}, \qquad p' = \frac{\nu}{\alpha}, \qquad q' = \frac{\nu'}{\alpha};$$

la quantité que nous avons nommée z dans l'article XVIII sera ici

$$\frac{X(1-X)\left[\frac{\nu}{(X-x)^2} + \frac{\nu'}{(1-X+x)^2}\right]}{\left[\frac{1}{X^2} + \frac{\mu}{(1-X)^2} + \frac{\nu}{(X-x)^2} + \frac{\nu'}{(1-X+x)^2}\right][1-(1+\mu)X]},$$

X étant la variable principale dont x est fonction; si l'on observe ensuite que, X étant égal à l'unité, on a $y' = o$, la suite (γ) de l'article cité donnera

$$\int y'\,dx = -\alpha y' z \left\{ 1 - \alpha\frac{dz}{dX} + \alpha^2\frac{d(z\,dz)}{dX^2} - \alpha^3\frac{d[z\,d(z\,dz)]}{dX^3} + \ldots \right\},$$

en substituant, après les différentiations dans le second membre de cette équation, $\frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$ pour X et en y faisant $x = o$.

Si l'on suppose $X = \frac{p}{p+q} + \theta$, θ sera égal à $\frac{p+p'}{p+p'+q+q'} - \frac{p}{p+q}$, et l'on aura

$$z = -\frac{X(1-X)\left[\frac{\nu}{(X-x)^2} + \frac{\nu'}{(1-X+x)^2}\right]}{(1+\mu)\theta\left[\frac{1}{X^2} + \frac{\mu}{(1-X)^2} + \frac{\nu}{(X-x)^2} + \frac{\nu'}{(1-X+x)^2}\right]};$$

or, θ étant très petit, les différences successives de z croissent principalement par la différentiation du facteur θ qui se trouve au dénominateur, en sorte que, si l'on suppose

$$F = \frac{X(1-X)\left[\frac{\nu}{(X-x)^2} + \frac{\nu'}{(1-X+x)^2}\right]}{(1+\mu)\left[\frac{1}{X^2} + \frac{\mu}{(1-X)^2} + \frac{\nu}{(X-x)^2} + \frac{\nu'}{(1-X+x)^2}\right]},$$

on aura, à très peu près,

$$\frac{dz}{dX} = \frac{F}{g^2},$$

$$\frac{d(z\,dz)}{dX^2} = \frac{3F^2}{g^4},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

partant

$$\int y'\,dx = \frac{\alpha y' F}{g}\left(1 - \frac{\alpha F}{g^2} + \frac{3\alpha^2 F^2}{g^4} - \dots\right),$$

y' et F étant ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y suppose $x = 0$ et $X = \frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$, ce qui donne

$$y' F = \frac{(p+p')^{p+p'+\frac{3}{2}}(q+q')^{q+q'+\frac{3}{2}}}{(1+\mu)(p+p'+q+q')^{p+p'+q+q'+\frac{5}{2}}}.$$

Il est aisé de voir par l'analyse de l'article XVIII que $\int y'\,dx$ est moindre que $\frac{\alpha y' F}{g}$, plus grand que $\frac{\alpha y' F}{g}\left(1 - \frac{\alpha F}{g^2}\right)$ et moindre que $\frac{\alpha y' F}{g}\left(1 - \frac{\alpha F}{g^2} + \frac{3\alpha^2 F^2}{g^4}\right)$, en sorte que l'on a par ce moyen les limites dans lesquelles la valeur de $\int y'\,dx$ est resserrée.

Cherchons présentement la valeur de la double intégrale

$$\iint u^p(1-u)^q s^{p'}(1-s)^{q'}\,ds\,du.$$

La formule (μ) de l'article XXIII donne, à très peu près,

$$\int u^p(1-u)^q\,du = \sqrt{2\pi}\,\frac{u^{p+1}(1-u)^{q+1}}{\sqrt{[p(1-u)^2+qu^2)]^2}},$$

en substituant pour u la valeur qui rend $u^p(1-u)^q$ un maximum; or cette valeur est $\frac{p}{p+q}$; on a donc

$$\int u^p(1-u)^q du = \sqrt{2\pi}\,\frac{p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}.$$

En changeant p en p' et q en q', on aura

$$\int s^{p'}(1-s)^{q'} ds = \sqrt{2\pi}\,\frac{p'^{p'+\frac{1}{2}}q'^{q'+\frac{1}{2}}}{(p'+q')^{p'+q'+\frac{3}{2}}},$$

partant

$$\int\int u^p(1-u)^q s^{p'}(1-s)^{q'} ds\,du = 2\pi\,\frac{p^{p+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}p'^{p'+\frac{1}{2}}q'^{q'+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}(p'+q')^{p'+q'+\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on suppose cette quantité égale à k, on aura pour la probabilité cherchée P

$$\mathrm{P} = \frac{\alpha y'\mathrm{F}\sqrt{2\pi}}{\theta k}\left(1 - \frac{\alpha\mathrm{F}}{\theta^2} + \frac{3\alpha^2\mathrm{F}^2}{\theta^4} - \ldots\right);$$

il ne s'agit plus maintenant que de déterminer les valeurs numériques des différents termes de cette expression, en partant des données précédentes. Ces données sont

$$p = 251527, \qquad p' = 737629,$$
$$q = 241945, \qquad q' = 698958;$$

d'où il est facile de conclure

$$\log\mathrm{F} = \bar{2},9767121,$$
$$\log\theta = \bar{3},4457598,$$
$$\log\alpha = \bar{6},5994154$$

et, par conséquent,

$$\frac{\alpha\mathrm{F}}{\theta^2} = 0,048374,$$

$$\frac{3\alpha^2\mathrm{F}^2}{\theta^4} = 0,007020.$$

On a ensuite, en portant la précision jusqu'à douze décimales,

$$\log p = 5,400584610947,$$
$$\log q = 5,383716651469,$$
$$\log(p+q) = 5,693262515480,$$

d'où l'on tire

$$\log\left(\frac{p}{p+q}\right)^p = \overline{73617},6047065,$$
$$\log\left(\frac{q}{p+q}\right)^q = \overline{74894},9259319.$$

On a pareillement

$$\log p' = 5,867837982735,$$
$$\log q' = 5,844451080009,$$
$$\log(p'+q') = 6,157331932083,$$

d'où l'on tire

$$\log\left(\frac{p'}{p'+q'}\right)^{p'} = \overline{213540},8676364,$$
$$\log\left(\frac{q'}{p'+q'}\right)^{q'} = \overline{218691},4253961.$$

On trouve encore

$$\log(p+p') = 5,995264741371,$$
$$\log(q+q') = 5,973544853243,$$
$$\log(p+p'+q+q') = 6,285570585161,$$

d'où l'on tire

$$\log\left(\frac{p+p'}{p+p'+q+q'}\right)^{p+p'} = \overline{287158},2327801,$$
$$\log\left(\frac{q+q'}{p+p'+q+q'}\right)^{q+q'} = \overline{293586},0527612.$$

On a enfin

$$\log(1+\mu) = 0,2926769,$$
$$\log 2\pi = 0,7981799,$$

partant

$$\log\frac{\alpha y' \mathrm{F}\sqrt{2\pi}}{9} = \overline{580751},4993272,$$
$$\log k = \overline{580745},0942543,$$

ce qui donne

$$\frac{\alpha y' \mathrm{F}\sqrt{2\pi}}{9k} = 0,0000025414\,;$$

donc

$$P = 0,0000025414\,(1 - 0,048374 + 0,007020 - \ldots).$$

Si l'on prend les trois premiers termes de la série, on aura

$$P = \frac{1}{410458};$$

cette valeur de P est un peu trop grande; mais, comme en ne prenant que les deux premiers termes de la série on aurait une valeur trop petite, il est aisé d'en conclure que la précédente ne peut différer de la véritable de la $\frac{1}{143}$ partie de sa valeur, en sorte qu'elle est fort approchée : il y a donc plus de quatre cent mille à parier contre un que les naissances des garçons sont plus faciles à Londres qu'à Paris. Ainsi l'on peut regarder comme une chose très probable qu'il existe, dans la première de ces deux villes, une cause de plus que dans la seconde, qui y facilite les naissances des garçons, et qui dépend soit du climat, soit de la nourriture et des mœurs.

XXVII.

Il est facile d'étendre la théorie des articles précédents au cas de trois ou d'un plus grand nombre d'événements simples.

Si l'on nomme, en effet, x la possibilité du premier événement simple, x' celle du deuxième et, par conséquent, $1 - x - x'$ celle du troisième; en cherchant, par les méthodes ordinaires, la probabilité de l'événement observé, on aura pour sa valeur une fonction de x, x' et $1 - x - x'$, multipliée par une constante quelconque. Soit y cette fonction, pour que l'événement observé puisse indiquer d'une manière approchée les possibilités des événements simples, il faut, comme on l'a observé dans l'art. XXII, que $\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{y}$ et $\frac{\frac{\partial y}{\partial x'}}{y}$ soient des fonctions de x très grandes de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, α étant un coefficient d'autant moindre que l'événement observé est plus composé; cela posé, si l'on intègre

$\int y\,dx'$, depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1-x$, on aura pour résultat une fonction de x, que la méthode de l'art. XXIII donnera par une suite très convergente. Soit u la valeur de x' en x qui rend y un maximum, x étant supposé constant, et que l'on représente par Y ce maximum, on aura, par l'article cité, pour $\int y\,dx'$, une expression de cette forme

$$\int y\,dx' = \mathrm{Y}\sqrt{\alpha\pi}\left(h + 1.3\frac{\alpha h''}{2} + 1.3.5\frac{\alpha^2 h^{\text{IV}}}{2^2} + \ldots\right),$$

Y, h, h'', h^{IV}, ... étant des fonctions de x. La valeur de x qui rend le second membre de cette équation un maximum sera très approchante de la véritable possibilité du premier événement; soit a cette valeur, on aura pour l'expression de la probabilité P que x sera compris dans les limites $a-\theta$ et $a+\theta$

$$\mathrm{P} = \frac{\int \mathrm{Y}\,dx\left(h + 1.3\frac{\alpha h''}{2} + 1.3.5\frac{\alpha^2 h^{\text{IV}}}{2^2} + \ldots\right)}{\int \mathrm{Y}\,dx\left(h + 1.3\frac{\alpha h''}{2} + 1.3.5\frac{\alpha^2 h^{\text{IV}}}{2^2} + \ldots\right)},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x=a-\theta$ jusqu'à $x=a+\theta$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; or on déterminera facilement ces intégrales par la méthode de l'art. XXIII.

La valeur a se détermine en égalant à zéro la différence de $\mathrm{Y}\left(h + 1.3\frac{\alpha h''}{2} + \ldots\right)$, ce qui donne

$$0 = \frac{d\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}} + \frac{dh + 1.3\frac{\alpha\,dh''}{2} + \ldots}{h + 1.3\frac{\alpha h''}{2} + \ldots};$$

$\frac{d\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}}$ est, par la supposition, une quantité très grande de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$; en négligeant donc, vis-à-vis d'elle, la quantité

$$\frac{dh + 1.3\frac{\alpha\,dh''}{2} + \ldots}{h + 1.3\frac{\alpha h''}{2} + \ldots},$$

on aura, pour déterminer a, l'équation

$$o = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Or on a

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x},$$

en substituant dans le second membre de cette équation, au lieu de x', sa valeur u en x; mais cette valeur rend nulle la quantité $\frac{\partial y}{\partial x'}$: on aura donc les deux équations

$$\frac{\partial y}{\partial x} = o \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = o.$$

Il suit de là que a est, aux quantités près de l'ordre α, la valeur de x qui rend y un maximum, en faisant varier à la fois x et x'; on peut donc prendre, sans erreur sensible, la valeur de x correspondante à ce maximum, pour la possibilité du premier événement simple, et il est clair que l'on peut faire des remarques analogues sur les possibilités des deux autres événements simples.

Supposons, par exemple, qu'il y ait dans une urne une infinité de boules blanches, rouges et noires, dans une proportion inconnue, et que sur le nombre $p+q+r$ de tirages on ait amené p boules blanches, q boules rouges et r boules noires; en nommant x la facilité d'amener une boule blanche, x' celle d'amener une boule rouge et, par conséquent, $1-x-x'$ celle d'amener une boule noire, on aura, pour la probabilité de l'événement observé,

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q+r)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r}x^p x'^q(1-x-x')^r.$$

Dans ce cas particulier,

$$y = x^p x'^q(1-x-x')^r,$$

$$\int y\,dx' = \frac{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r}{1.2.3\ldots(q+r+1)}x^p(1-x)^{q+r+1};$$

la valeur de x qui rend $\int y\,dx$ un maximum est $\frac{p}{p+q+r+1}$; cette fraction est conséquemment la valeur la plus probable de x. Lorsque p, q et r sont de grands nombres, elle se réduit à très peu près à celle-ci $\frac{p}{p+q+r}$, qui correspond au maximum de y.

XXVIII.

Jusqu'ici nous avons supposé la loi de possibilité des événements simples constante depuis zéro jusqu'à l'unité, et cette supposition est, comme nous l'avons observé dans l'article XVII, la seule que l'on doive adopter, lorsqu'on n'a aucune donnée relativement à ces possibilités; mais, si leur loi était exactement connue, on pourrait encore y appliquer les recherches précédentes. Pour cela, ne considérons que deux événements simples, et nommons x la possibilité du premier et $1 - x$ celle du second; on calculera la probabilité de l'événement observé, en partant de ces possibilités, et l'on aura pour son expression une fonction de x, que nous désignerons par y; si l'on représente ensuite par u la facilité de la possibilité x du premier événement, u étant fonction de x, et par s la facilité de la possibilité $1 - x$ du second événement, on aura, par l'article XV, $\frac{usy\,dx}{\int usy\,dx}$ pour la probabilité que l'événement observé est dû aux possibilités x et $1 - x$, l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; donc, si l'on nomme P la probabilité que la valeur de x est comprise dans des limites données, on aura

$$P = \frac{\int usy\,dx}{\int usy\,dx},$$

pourvu que l'intégrale du numérateur ne soit prise que dans l'étendue de ces limites. On voit ainsi que ce cas rentre dans ceux que nous avons considérés dans les articles précédents, et que la valeur de P se déterminera facilement par la méthode de ces articles.

La valeur de x qui rend usy un maximum sera très approchante de la véritable, si l'événement observé est très composé et si l'on a

$y\,dx = \alpha z\,dy$, α étant un coefficient très petit; or on a, en égalant à zéro la différentielle de usy,

$$0 = \frac{d(us)}{us} + \frac{dy}{y},$$

partant

$$0 = \frac{\alpha\, d(us)}{us} + \frac{1}{z}.$$

On aura donc, en négligeant les quantités de l'ordre α, $0 = \frac{1}{z}$, d'où il suit que la valeur de x qui rend y un maximum est à très peu près la véritable, quelle que soit d'ailleurs la loi de facilité des possibilités des deux événements simples.

XXIX.

Après avoir déterminé les possibilités des événements simples qui résultent d'un événement composé propre à les faire connaître, il nous reste à considérer l'influence de cet événement sur la probabilité d'un événement futur quelconque, et la manière dont on doit calculer cette probabilité. Si l'on nomme x et $1 - x$ les possibilités de deux événements simples, s la facilité de x, et s' celle de $1 - x$, on calculera les probabilités, tant de l'événement observé que de l'événement futur, en partant de ces possibilités, et l'on aura pour résultat deux fonctions de x, dont nous représenterons la première par y et la seconde par u; cela posé, si l'on nomme P la probabilité cherchée de l'événement futur, on aura, par les articles XIV et XV,

$$P = \frac{\int ss'uy\,dx}{\int ss'y\,dx},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Lorsque l'événement observé sera très composé, la méthode de l'article XXIII donnera ces intégrales par une approximation très rapide, ce qui montre l'étendue de cette méthode et son utilité dans ces matières.

Si l'on n'a aucune donnée sur la loi de possibilité des deux événements simples, ce qui est le cas le plus ordinaire, on doit supposer (art. XVII) s et s' égaux à l'unité, ce qui donne

$$\mathrm{P} = \frac{\int u y\, dx}{\int y\, dx};$$

or on a, à très peu près, par l'article XXIII,

$$\left(\int y\, dx\right)^2 = \frac{2\pi y^3}{-\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

$$\left(\int u y\, dx\right)^2 = \frac{2\pi u'^3 y'^3}{-\frac{d^2(u'y')}{dx^2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

y et $\frac{d^2 y}{dx^2}$ étant ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y substitue pour x la valeur qui rend y un maximum, et u', y' et $\frac{d^2 y'}{dx^2}$ étant ce que deviennent u, y et $\frac{d^2 y}{dx^2}$ lorsqu'on y substitue pour x la valeur qui rend uy un maximum; on aura donc

$$(\alpha) \qquad \mathrm{P}^2 = \frac{u'^3 y'^3}{y^3} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\frac{d^2(u'y')}{dx^2}}.$$

Supposons que l'événement futur dont on calcule la probabilité soit très peu composé, en égalant à zéro la différentielle de uy, on aura

$$0 = \frac{dy}{y\, dx} + \frac{du}{u\, dx};$$

mais on a, par la supposition,

$$\frac{dy}{y\, dx} = \frac{1}{\alpha z} = \frac{1}{\alpha} z',$$

en faisant $\frac{1}{z} = z'$; l'équation précédente deviendra ainsi

$$0 = \alpha \frac{du}{u\, dx} + z'.$$

Soit a la valeur de x qui rend y un maximum, et par conséquent z' nul; la valeur de x qui rend uy un maximum pourra donc être représentée par $a + \alpha h$, h étant un coefficient quelconque, et l'on aura

$$y' = y + \alpha h \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2 h^2}{1.2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha^3 h^3}{1.2.3} \frac{d^3 y}{dx^3} + \ldots,$$

$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots$ étant ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y fait $x = a$; on a ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\alpha} y z', \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= y\left(\frac{1}{\alpha^2} z'^2 + \frac{1}{\alpha} \frac{dz'}{dx}\right), \\
\frac{d^3 y}{dx^3} &= y\left(\frac{1}{\alpha^3} z'^3 + \frac{3}{\alpha^2} z' \frac{dz'}{dx} + \frac{1}{\alpha} \frac{d^2 z'}{dx^2}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La supposition de $x = a$ donne $z' = 0$, et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\alpha h \frac{dy}{dx} &= 0, \\
\frac{\alpha^2 h^2}{1.2} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\alpha h^2}{1.2} y \frac{dz'}{dx}, \\
\frac{\alpha^3 h^3}{1.2.3} \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{\alpha^2 h^3}{1.2.3} y \frac{d^2 z'}{dx^2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

on aura donc, en négligeant les termes multipliés par α,

$$y = y'.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d^2(u'y')}{dx^2} = u' \frac{d^2 y'}{dx^2} + \frac{2\,du'\,dy'}{dx\,dx} + y' \frac{d^2 u'}{dx^2};$$

or il est visible, par ce qui précède, que $\frac{d^2 y'}{dx^2}$ est beaucoup plus grand que $\frac{dy'}{dx}$ et que y', en sorte que l'on peut supposer, à très peu près,

$$\frac{d^2(u'y')}{dx^2} = u' \frac{d^2 y'}{dx^2},$$

et l'on prouvera, comme nous venons de le faire pour y', que $\frac{d^2y'}{dx^2}$ peut être supposé égal à $\frac{d^2y}{dx^2}$, partant

$$\frac{d^2(u'y')}{dx^2} = u'\frac{d^2y}{dx^2}.$$

La formule (α) deviendra donc

$$P^2 = u'^2;$$

mais, si l'on nomme v ce que devient u lorsqu'on y fait $x = a$, on aura, en négligeant les quantités de l'ordre α, $u' = v$; donc

$$P = v;$$

d'où il suit que l'on peut calculer la probabilité P de l'événement futur en employant pour x la valeur qui rend y un maximum.

Ce théorème cesserait d'être exact si l'événement futur dont il s'agit était lui-même très composé, car alors $\frac{du}{u\,dx}$ serait très grand, et la valeur de x, que donne l'équation

$$0 = \alpha\frac{du}{u\,dx} + z',$$

ne pourrait plus être représentée par $a + \alpha h$; on ne pourrait plus d'ailleurs supposer $\frac{d^2(u'y')}{dx^2}$ égal à $u'\frac{d^2y}{dx^2}$. Si l'on représente, en général, par $a + \alpha^n h$ la racine de l'équation

$$0 = \alpha\frac{du}{u\,dx} + z,$$

n étant un exposant moindre que l'unité, on aura

$$y' = y + \alpha^n h\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^{2n}h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots,$$

et l'on trouvera

$$\alpha^n h\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{\alpha^{2n}h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha^{2n-1}h^2}{1.2}y\frac{dz'}{dx},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

partant

$$y' = y + \frac{\alpha^{2n-1}h^2}{1.2}\,y\,\frac{dz'}{dx} + \ldots.$$

Cette valeur de y' ne se réduit à y, dans le cas de α infiniment petit, que lorsque $2n - 1$ est positif, ce qui suppose $n > \frac{1}{2}$, et il est aisé de voir pareillement que ce n'est que dans cette supposition que $\frac{d^2(u'y')}{dx^2}$ se réduit à $\frac{u'd^2y}{dx^2}$; le théorème précédent ne peut donc avoir lieu que dans le cas où $2n$ est plus grand que l'unité.

Soit $\frac{du}{u\,dx} = \frac{\lambda}{\alpha^{1-n'}}$, λ étant fonction de x, l'équation

$$0 = \frac{\alpha\,du}{u\,dx} + z'$$

deviendra

$$0 = \alpha^{n'-1}\lambda + z',$$

ce qui donne pour x une expression de cette forme

$$x = a + \alpha^{n'-1}h;$$

or la vérité du théorème précédent exige que l'on ait $n' - 1 > \frac{1}{2}$, et, par conséquent, $1 - n' < -\frac{1}{2}$; donc, afin que ce théorème subsiste, il est nécessaire que l'événement futur soit assez peu composé relativement à l'événement observé, pour que $\left(\frac{du}{u\,dx}\right)^2$ soit une fonction de x, très petite relativement à $\frac{dy}{y\,dx}$.

Si l'événement futur est exactement le même que l'événement observé, en sorte que $u = y$, la valeur a de x, qui rend y un maximum, rendra pareillement uy un maximum, en sorte que l'on aura $y' = y$ et $u' = v$. On aura ensuite

$$\frac{d^2(u'y')}{dx^2} = 2y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2\,dy^2}{dx^2};$$

mais la substitution de a pour x donne $\frac{dy}{dx} = 0$, partant

$$\frac{d^2(u'y')}{dx^2} = 2y\frac{d^2y}{dx^2}.$$

La formule (α) deviendra donc

$$P^2 = \frac{v^2}{2},$$

v étant ce que devient u ou y lorsqu'on y fait $x = a$; de là résulte ce théorème assez remarquable :

La probabilité d'un événement futur, pareil à celui que l'on a observé, est à cette même probabilité, déterminée en employant pour les possibilités des événements simples celles qui résultent de l'événement observé, comme 1 *est à* $\sqrt{2}$.

Si l'on a observé, par exemple, que sur $p+q$ enfants il est né p garçons et q filles, et que l'on cherche la probabilité P, que sur $p+q$ enfants qui doivent naître il y aura p garçons et q filles, on aura

$$P = \frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q} \cdot \frac{p^p q^q}{\sqrt{2}\,(p+q)^{p+q}};$$

c'est ce qui résulte pareillement de la formule (ϖ) de l'article XVII.

En général, si l'on cherche la probabilité P que l'événement observé sera suivi d'un nombre n d'événements pareils, on aura $u = y^n$, et l'on trouvera

$$P = \frac{v^n}{\sqrt{n+1}},$$

v étant ce que devient y, lorsqu'on y substitue pour x la valeur a qui rend y un maximum, et cette équation a également lieu, n étant fractionnaire. On s'exposerait donc alors à des erreurs considérables, en employant, dans le calcul de la probabilité des événements futurs, les possibilités des événements simples qui résultent de l'événement observé : en effet, il est visible que la petite erreur que l'on peut commettre, en faisant usage de ces possibilités, s'accumule en raison du nombre des événements simples qui entrent dans l'événement futur, et doit occasionner une erreur sensible lorsqu'ils y sont en très grand nombre. Au reste, quel que soit cet événement, on peut en déterminer la probabilité au moyen de la formule (α), qui est toujours vraie, à très peu près, lorsque l'événement observé est très composé.

XXX.

Un des problèmes les plus utiles de cette partie de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événements aux causes qui les ont produits, est celui de la détermination du milieu qu'il faut choisir entre les résultats de plusieurs observations. J'ai donné, dans le Tome VI des *Mémoires des Savants étrangers* (¹), les principes sur lesquels il me semble que la solution de ce problème doit être fondée; trois illustres géomètres, MM. de la Grange, Daniel Bernoulli et Euler, se sont depuis exercés sur cet objet : le premier dans le Tome V des *Mémoires de la Société royale de Turin*, et les deux autres dans la Iʳᵉ Partie des *Mémoires de Pétersbourg* pour l'année 1777; mais leurs principes étant différents de ceux dont je me suis servi, cette considération m'engage à reprendre ici cette matière et à présenter mes résultats de manière à ne laisser aucun doute sur leur exactitude.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un phénomène qui a été aperçu par plusieurs observateurs à des instants différents; chaque observation a pu s'écarter en plus et en moins de la vérité et fixer ainsi l'instant du phénomène plus tôt ou plus tard qu'il n'est arrivé. Nous supposerons, ce qui est très naturel, que les facilités des mêmes erreurs, soit en plus, soit en moins, sont égales entre elles, et nous désignerons par $\varphi(x)$ la facilité tant de l'erreur positive x que de l'erreur négative $-x$, relativement au premier observateur; par $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ... ces mêmes facilités pour les deuxième, troisième, ... observateurs. En nommant ensuite première observation celle qui fixe le plus tôt le phénomène, deuxième, troisième observations, etc. les différentes observations dans l'ordre de leurs distances à celles-ci, nous nommerons p, p', p'', ... ces distances; en supposant donc x l'erreur de la première observation, les erreurs des observations suivantes seront $p-x$, $p'-x$, $p''-x$, ..., et la pro-

(¹) *Œuvres de Laplace*, T. VIII, p. 27.

babilité que toutes ces observations auront entre elles les distances respectives p, p', p'', ... sera

$$\varphi(x)\,\varphi'(p-x)\,\varphi''(p'-x),\quad \ldots;$$

or les probabilités des différentes valeurs de x sont entre elles, par l'article XV, comme les probabilités que, ces valeurs ayant lieu, les observations s'écarteront entre elles des quantités observées p, p, p'', ... Donc, si l'on construit une courbe dont l'équation soit

$$y=\varphi(x)\,\varphi'(p-x)\,\varphi''(p'-x),\quad \ldots,$$

les ordonnées y de cette courbe seront proportionnelles aux probabilités des abscisses correspondantes x, et par cette raison nous la nommerons *courbe des probabilités*.

Maintenant, on peut entendre une infinité de choses différentes par le *milieu* ou le *résultat moyen* d'un nombre quelconque d'observations, suivant que l'on assujettit ce résultat à telle ou telle condition. Par exemple, on peut exiger que ce milieu soit tel que la somme des erreurs à craindre en *plus* soit égale à la somme des erreurs à craindre en *moins*; on peut exiger que la somme des erreurs à craindre en plus, multipliées par leurs probabilités respectives, soit égale à la somme des erreurs à craindre en moins, multipliées par leurs probabilités respectives. On peut encore assujettir ce milieu à être le point où il est le plus probable que doit tomber le véritable instant du phénomène, comme M. Daniel Bernoulli l'a fait dans les Mémoires cités : en général, on peut imposer une infinité d'autres conditions semblables qui donneront chacune un milieu différent; mais elles ne sont pas toutes arbitraires. Il en est une qui tient à la nature du problème et qui doit servir à fixer le milieu qu'il faut choisir entre plusieurs observations : cette condition est que, en fixant à ce point l'instant du phénomène, l'erreur qui en résulte soit un minimum; or comme, dans la théorie ordinaire des hasards, on évalue l'avantage en faisant une somme des produits de chaque avantage à espérer, multiplié par la probabilité de l'obtenir, de même ici l'erreur doit s'estimer par la somme des produits de chaque erreur à craindre, multipliée par sa probabilité; le milieu qu'il faut choisir doit donc être tel que la somme de ces produits soit moindre que pour tout autre instant.

Supposons présentement que, dans la courbe des probabilités dont l'équation est

$$y = \varphi(x)\,\varphi'(p-x)\ldots,$$

la valeur de x puisse s'étendre depuis $-f$ jusqu'à $c-f$, en sorte que l'intervalle dans lequel x peut varier soit c; si l'on fait $x = z - f$, il est visible que z pourra varier depuis $z = 0$ jusqu'à $z = c$, et que les probabilités des différentes valeurs de z seront proportionnelles à y ou à $\varphi(z-f)\,\varphi'(p-z+f)\ldots$, en sorte qu'on pourra les représenter par ky, k étant un coefficient constant. Soit h la valeur de z que l'on doit prendre pour le véritable instant du phénomène, on aura $k\int(h-z)y\,dz$ pour la somme des erreurs à craindre depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, multipliées par leurs probabilités respectives, l'intégrale précédente étant prise pour toute l'étendue de ces limites; on aura ensuite $k\int'(z-h)y\,dz$ pour la somme des erreurs à craindre depuis $z = h$ jusqu'à $z = c$, multipliées par leurs probabilités, le signe $\int'$ servant à indiquer que l'intégrale doit être prise pour toute l'étendue de ces dernières limites. On aura donc

$$k\int(h-z)y\,dz + k\int'(z-h)y\,dz$$

pour la somme entière des erreurs à craindre, multipliées par leurs probabilités, et h doit être tel que cette somme soit un minimum. Or, si l'on fait varier h de la quantité infiniment petite δh, il est clair que la variation de $\int(h-z)y\,dz$ sera $\delta h\int y\,dz$ et que celle de $\int'(z-h)y\,dz$ sera $-\delta h\int' y\,dz$; la variation de la quantité précédente sera donc

$$k\,\delta h\left(\int y\,dz - \int' y\,dz\right).$$

En égalant cette quantité à zéro par la propriété du minimum, on aura

$$\int y\,dz = \int' y\,dz.$$

L'ordonnée correspondante à l'abscisse h, qui détermine le milieu qu'il faut choisir, doit donc diviser en deux parties égales l'aire de la courbe des probabilités, comprise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = c$, ce qui donne un moyen très simple de déterminer ce milieu, et l'on voit qu'il a encore la propriété d'être tel, qu'il est également probable que le véritable instant du phénomène tombe au-dessus ou au-dessous, en sorte qu'on pourrait le nommer *milieu de probabilité*.

XXXI.

Toutes les fois que les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ... qui expriment les lois de facilité des erreurs des observations seront connues, la détermination du milieu qu'il faut choisir entre plusieurs observations sera réduite, par l'article précédent, à partager une surface donnée en deux parties égales, ce qui est un problème de pure Analyse. Mais, ces fonctions étant le plus souvent inconnues, c'est au Calcul des probabilités à fournir les moyens de suppléer à cette ignorance; or on a vu, dans l'article XIII, que si, dans ce cas, $\pm a$, $\pm a'$, $\pm a''$, ... sont les limites des erreurs de la première, de la deuxième, ... observation, on doit supposer

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a}\log\frac{a}{x}, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{2a'}\log\frac{a'}{x}, \qquad \cdots.$$

Il ne reste plus ainsi, dans la recherche du résultat moyen de plusieurs observations, que les difficultés inévitables de l'Analyse; mais il faut convenir qu'elles rendent la méthode précédente d'un très difficile usage : aussi mon objet, en l'exposant, a été plutôt de faire connaître tout ce que l'analyse des hasards peut donner de lumières sur cette matière, que de présenter aux observateurs une méthode pratique et d'un usage commode; on pourra, cependant, l'employer dans des occasions très délicates, telles que celles du passage de Vénus sur le disque du Soleil, dans lesquelles il est nécessaire d'obtenir la plus grande précision. Le moyen le plus simple pour cet objet est de carrer par parties la courbe des probabilités et de déterminer ainsi l'ordonnée qui divise sa surface en deux parties égales.

XXXII.

La règle ordinaire des milieux arithmétiques se déduit de cette méthode, en supposant $a = a' = a'' = \ldots = \infty$, comme il est facile de s'en assurer; mais nous allons démontrer un théorème beaucoup plus général en faisant voir que cette règle a lieu toutes les fois : 1° que la loi de facilité des erreurs est la même pour toutes les observations; 2° que les mêmes erreurs, soit en *plus*, soit en *moins*, sont également possibles; 3° qu'elles peuvent être infinies et que la fonction qui exprime leurs facilités ne décroît d'une quantité finie que lorsque x est infini, mais qu'alors elle va toujours en diminuant jusqu'au point de devenir nulle.

Pour cela, soit $\varphi(\alpha x)$ la loi de facilité des erreurs des observations, α étant une quantité infiniment petite; soit de plus q la valeur de $\varphi(\alpha x)$, lorsque $\alpha x = 0$ et, par conséquent, lorsque x est une quantité finie. Il est évident que l'ordonnée de la courbe des probabilités, depuis $-x = 0$ jusqu'à $-x = \infty$, sera

$$y = \varphi(\alpha x)\,\varphi(\alpha p + \alpha x)\,\varphi(\alpha p' + \alpha x)\ldots.$$

En supposant le nombre des observations égal à n et en négligeant les quantités de l'ordre α^2, on aura

$$y = \varphi(\alpha x)^n + \alpha(p + p' + p'' + \ldots + p^{(n-1)})\,\varphi(\alpha x)^{n-1}\frac{d\varphi(\alpha x)}{d(\alpha x)};$$

or, si l'on prend l'intégrale $\int \alpha\,\varphi(\alpha x)^{n-1}\frac{d\varphi(\alpha x)}{d(\alpha x)}dx$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, et que l'on se rappelle que $\varphi(\alpha x) = q$ lorsque $x = 0$ et que $\varphi(\alpha x) = 0$ lorsque $x = \infty$, on aura

$$\int \alpha\,\varphi(\alpha x)^{n-1}\frac{d\varphi(\alpha x)}{d(\alpha x)}dx = -\frac{1}{n}q^n;$$

soit donc A l'intégrale $\int \varphi(\alpha x)^n dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, et l'on aura

$$A - \frac{1}{n}(p + p' + p'' + \ldots + p^{(n-1)})q^n$$

pour l'intégrale $\int y\,dx$ correspondante aux valeurs négatives de x.

Cette même intégrale, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = p^{(n-1)}$, est $p^{(n-1)}q^n$, parce que l'on peut, dans cet intervalle, supposer

$$\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha p - \alpha x) = \ldots = q,$$

par conséquent l'ordonnée $y = q^n$.

Depuis $x = p^{(n-1)}$ jusqu'à $x = \infty$, on a

$$y = \varphi(\alpha x)\varphi(\alpha x - \alpha p)\varphi(\alpha x - \alpha p')\ldots$$

ou

$$y = \varphi(\alpha x)^n - \alpha(p + p' + p'' + \ldots + p^{(n-1)})\varphi(\alpha x)^{n-1}\frac{d\varphi(\alpha x)}{d(\alpha x)};$$

or l'intégrale $\int \alpha\varphi(\alpha x)^{n-1}\frac{d\varphi(\alpha x)}{d(\alpha x)}dx$, prise depuis $x = p^{(n-1)}$ jusqu'à $x = \infty$, est $-\frac{1}{n}q^n$. De plus, l'intégrale $\int \varphi(\alpha x)^n dx$, prise dans le même intervalle, est évidemment égale à $A - p^{(n-1)}q^n$; on aura donc

$$A - p^{(n-1)}q^n + \frac{1}{n}(p + p' + \ldots + p^{(n-1)})$$

pour la valeur de $\int y\,dx$, prise dans cet intervalle. Partant, l'aire entière de la courbe des probabilités est égale à $2A$. Or, en nommant h l'abscisse dont l'ordonnée divise cette aire en deux parties égales, la partie de l'aire qui est à gauche de cette ordonnée sera visiblement égale à

$$A - \frac{1}{n}(p + p' + p'' + \ldots + p^{(n-1)})q^n + hq^n;$$

en l'égalant à A, on aura

$$h = \frac{1}{n}(p + p' + p'' + \ldots + p^{(n-1)}),$$

ce qui donne pour h la même valeur que la règle des milieux arithmétiques. Les suppositions qui nous ont conduit à ce résultat étant hors de toute vraisemblance, on voit combien il est nécessaire, dans les occasions délicates, de faire usage de la méthode que nous avons proposée.

XXXIII.

Il est facile d'appliquer la théorie précédente à la correction des instruments; pour cela, supposons que, en vérifiant un instrument et en répétant un grand nombre de fois la même vérification, on ait trouvé n différentes erreurs p, p', p'', ... Soient i, i', i'', ... les nombres de fois que chacune d'elles a été répétée; en représentant par x, x', x'', ... leurs facilités respectives, on aura $k x^i x'^{i'} x''^{i''} \ldots$, ... pour la probabilité de l'événement observé, k étant un coefficient constant; la probabilité de ce système de facilités sera donc

$$\frac{x^i x'^{i'} x''^{i''} \ldots dx\, dx'\, dx'' \ldots}{\int^n x^i x'^{i'} x''^{i''} \ldots dx\, dx'\, dx'' \ldots},$$

les intégrales du dénominateur étant prises pour toutes les valeurs possibles de x, x', x'', ... Pour en conclure la probabilité de x, on intégrera la fonction $x^i x'^{i'} x''^{i''} \ldots dx\, dx'\, dx'' \ldots$ d'abord par rapport à x', depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1 - x - x'' - \ldots$, ensuite par rapport à x'', depuis $x'' = 0$ jusqu'à $x'' = 1 - x - x''' - \ldots$, et ainsi de suite, ce qui donne pour dernière integrale

$$\frac{1.2.3 \ldots i' . 1.2.3 \ldots i'' . 1.2.3 \ldots i''' \ldots}{1.2.3.4 \ldots (i' + i'' + i''' + \ldots)} x^i (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \ldots + n - 1} dx.$$

On aura donc, pour la probabilité que la facilité x sera comprise dans des limites données,

$$\frac{\int x^i (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \ldots + n - 1} dx}{\int x^i (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \ldots + n - 1} dx},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans l'étendue de ces limites et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; or cette probabilité se déterminera par la formule de l'article XVIII en y changeant p en i et q en $i' + i'' + \ldots + n - 1$.

Examinons présentement la correction qu'il faut faire à une nouvelle observation faite avec cet instrument : supposons qu'il soit un quart de cercle et que, en prenant un grand nombre de fois une même hauteur apparente a, on ait trouvé entre cette hauteur et la hauteur réelle n différences qui s'étendent depuis $a - \alpha$ jusqu'à $a + \alpha'$. Supposons de plus que, en partageant l'intervalle $\alpha + \alpha'$ en $n - 1$ parties très petites, on ait trouvé que l'erreur $-\alpha$ a été répétée i fois; que l'erreur $-\alpha + \frac{\alpha + \alpha'}{n-1}$ a été répétée i' fois; que l'erreur $-\alpha + \frac{2(\alpha + \alpha')}{n-1}$ a été répétée i'' fois et ainsi de suite; soient enfin $x, x', x'', \ldots$ les facilités de ces erreurs. On aura, par l'article XIV,

$$\frac{\int^n x^{i+1} x'^{i'} x''^{i''} \ldots dx\, dx'\, dx'' \ldots}{\int^n x^{i} x'^{i'} x''^{i''} \ldots dx\, dx'\, dx'' \ldots}$$

pour la probabilité que l'erreur d'une nouvelle hauteur a, observée avec ce quart de cercle, sera $-\alpha$, les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises pour toutes les valeurs possibles de x, x', x'', ..., ce qui revient à intégrer l'un et l'autre, d'abord par rapport à x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1 - x' - x'' - \ldots$, ensuite par rapport à x', depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1 - x'' - \ldots$, et ainsi du reste. On trouvera de cette manière que la fraction précédente se réduit à $\frac{i+1}{i + i' + i'' + \ldots + n + 1}$; cette quantité exprime donc la probabilité que l'erreur de l'observation sera $-\alpha$; en y changeant i successivement en i', i'', ..., et réciproquement, on aura les probabilités que l'erreur de l'observation sera $-\alpha + \frac{\alpha + \alpha'}{n-1}$ ou $-\alpha + \frac{2(\alpha + \alpha')}{n-1}$, ... On concevra donc élevées sur les extrémités et sur chacune des divisions de l'intervalle $\alpha + \alpha'$ des ordonnées égales ou proportionnelles à ces probabilités et dont les extrémités, à cause de la petitesse des divisions, formeront sensiblement une ligne courbe; cela posé, l'abscisse dont l'ordonnée partagera l'aire de cette courbe en deux parties égales sera, par l'article XXIX, celle dont il faut faire usage, en sorte que, si l'on nomme h cette abscisse comptée depuis l'origine de l'intervalle

$\alpha + \alpha'$ qui répond à l'erreur $-\alpha$, la correction qu'il faudra faire à la hauteur observée a sera $h - \alpha$ et, par conséquent, il faudra supposer la hauteur réelle égale à $a + h - \alpha$.

De là résulte cette règle fort simple pour corriger l'instrument : *Ajoutez continuellement les quantités* $i + i' + 2, i' + i'' + 2, i'' + i''' + 2, \ldots$ *jusqu'à ce que vous soyez parvenu à une somme égale ou immédiatement plus petite d'une quantité quelconque* μ *que la moitié de la somme*

$$i + 2i' + 2i'' + \ldots + 2i^{(n-2)} + i^{(n-1)} + 2n - 2.$$

Soient r *le nombre des quantités* $i + i' + 2, i' + i'' + 2, \ldots$ *que vous aurez ainsi ajoutées;* l *le nombre des parties* $\frac{\alpha + \alpha'}{n-1}$ *contenues dans* α; *la correction qu'il faut faire à la hauteur* a *ou, ce qui revient au même, la quantité qu'il faut lui ajouter sera, à très peu près,*

$$\left(r - l + \frac{\mu}{i^{(r)} + i^{(r+1)} + 2}\right) \frac{\alpha + \alpha'}{n-1}.$$

Si, au lieu de fixer la véritable hauteur au point de l'abscisse dont l'ordonnée divise l'aire de la courbe en deux parties égales, on la fixait au point dont l'ordonnée passe par le centre de gravité de cette aire, on aurait la même correction que donne la méthode des milieux arithmétiques : cette méthode revient donc, dans ce cas, à prendre pour *milieu* le point où la somme des erreurs en *moins*, multipliées par leurs probabilités, est égale à la somme des erreurs en *plus*, multipliées par leurs probabilités.

Lorsqu'une fois on connaît la loi de facilité des erreurs d'un instrument, on peut en conclure celle des erreurs d'un résultat quelconque déduit d'observations faites avec cet instrument, tel que le midi conclu par deux hauteurs correspondantes. En effet, si l'on nomme $z, z', z'', \ldots$ les erreurs des observations que nous supposerons ici très petites, la correction qu'il faudra faire au résultat sera $Az + A'z' + A''z'' + \ldots$, $A, A', A'', \ldots$ étant des coefficients constants dépendant de la nature du résultat que l'on déduit des observations.

Si l'on suppose cette correction égale à x, on aura

$$Az + A'z' + A''z'' + \ldots = x.$$

Il ne s'agira plus ensuite que de déterminer, par la méthode de l'article VII, la probabilité de cette équation au moyen de la loi de facilité des erreurs z, z', z''; on aura ainsi pour cette probabilité une fonction de x, que nous désignerons par $\varphi(x)$, en sorte que l'équation de la courbe des probabilités des valeurs de x sera $y = \varphi(x)$. Maintenant, si l'on prend l'intégrale $\int y\,dx$ pour toute l'étendue des limites dans lesquelles x peut varier, l'abscisse h qui divisera en deux parties égales la surface que représente cette intégrale sera la correction qu'il faudra faire au résultat proposé.

FIN DU TOME NEUVIÈME.

16563 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.