

ASTROPHYSIQUE II : Bases physiques de l'astrophysique

Pierre North,
sous l'inspiration de Bernard Hauck, Georges Meynet,
André Maeder et Pierre Bouvier



31 mai 2005

Table des matières

1	Introduction	6
1.1	Généralités	6
1.2	Objectifs et philosophie du cours	7
1.3	Matière et radiation dans l'univers	8
2	Généralités sur le rayonnement	10
2.1	Intensité spécifique et flux	10
2.1.1	Définition de l'intensité spécifique	10
2.1.2	Intensité intégrée ou bolométrique	11
2.1.3	Intensité moyenne	12
2.1.4	Flux	13
2.1.5	Luminosité monochromatique L_ν d'un astre	15
2.1.6	Luminosité (bolométrique) L d'un astre	15
2.1.7	Éclairement e_ν	15
2.2	Densité d'énergie et pression de radiation	16
2.2.1	Densité d'énergie	16
2.2.2	Pression de radiation	17
2.3	Rayonnement noir et température en astrophysique	21
2.3.1	Grandeurs monochromatiques	21
2.3.2	Grandeurs intégrées sur tout le spectre	24
2.3.3	Températures	25
2.4	Coefficients d'extinction et d'émission	26
2.4.1	Coefficient d'extinction	26
2.4.2	Coefficient d'émission	29
2.4.3	Loi de Kirchhoff	29

3	Transfert radiatif et atmosphères stellaires	31
3.1	L'équation de transfert radiatif	31
3.1.1	Cas des intérieurs stellaires :	33
3.2	Intensité émergente (problème de Milne)	35
3.3	Opacité moyenne	36
3.4	Atmosphère grise et assombrissement centre-bord	37
3.4.1	Structure de l'atmosphère grise :	37
3.4.2	Assombrissement centre-bord :	38
3.5	Transfert d'énergie par convection	39
3.6	Calcul du flux sortant (radiatif)	42
3.7	Calcul d'une atmosphère stellaire	43
4	Intéactions rayonnement-matière dans les intérieurs stellaires	45
4.1	Introduction	45
4.2	Lois de Boltzmann et Saha	45
4.2.1	Généralités	45
4.2.2	Loi de Boltzmann	46
4.2.3	Ionisation : loi de Saha	47
4.3	Absorption par un oscillateur harmonique	49
4.3.1	Court rappel d'électrodynamique	49
4.3.2	Absorption par un oscillateur harmonique	51
4.4	Absorption, émission spontanée et émission induite	56
4.5	Raies spectrales	59
4.5.1	Considérations qualitatives et intuitives	59
4.5.2	Profil et largeur équivalente d'une raie	60
4.5.3	Elargissement des raies	61
4.6	Courbe de croissance	65
4.7	Diffusion Rayleigh, Thomson et propriétés de l'atmosphère terrestre	65
4.8	Absorption continue	69
4.8.1	Transitions lié-libre : ionisation	69
4.8.2	Transitions libre-libre ou hyperboliques	72
4.8.3	Absorption par le ion H^-	73
4.9	Opacité globale dans le milieu stellaire	73

5 Réactions nucléaires	76
5.1 Généralités	76
5.1.1 Rappels de cinématique	76
5.1.2 Energie d'une réaction	77
5.1.3 Taux de réactions et section efficace	78
5.1.4 Forme de la section efficace dans différentes situations	81
6 Les équations d'état	92
6.1 Poids moléculaire moyen	92
6.2 Gaz parfait et pression de radiation	95
6.3 Gaz dégénéré	96
6.3.1 Gaz complètement dégénéré	98
6.3.2 Gaz partiellement dégénéré	101
6.3.3 Conséquences importantes de la dégénérescence du gaz :103	
6.4 Effets électrostatiques	105
6.4.1 Rayon de Debye–Hückel	105
6.4.2 Effets électrostatiques sur la pression gazeuse	108
6.4.3 Dépression du continu et potentiel effectif d'ionisation	110
6.4.4 Effets électrostatiques dans les milieux dégénérés	112
6.5 Diagramme $\log T$ vs $\log \rho$	112
6.5.1 Gaz parfait – pression de radiation	113
6.5.2 Gaz parfait – gaz dégénéré	114
6.5.3 Gaz dégénéré non relativiste – relativiste	114
7 Thermodynamique et structure interne des étoiles	118
7.1 Temps caractéristiques de l'évolution stellaire ; luminosité d'Eddington	118
7.1.1 Le temps de chute libre (free-fall or dynamical time)	118
7.1.2 Le temps de Kelvin-Helmoltz	119
7.1.3 Le temps nucléaire	121
7.1.4 Période de rotation minimale d'une étoile	121
7.1.5 Luminosité d'Eddington	122
7.2 Milieu partiellement ionisé	123
7.2.1 Taux d'ionisation et pression électronique dans un mélange gazeux	123
7.2.2 Fonctions thermodynamiques	126
7.3 Chaleurs spécifiques et exposants adiabatiques dans un milieu quelconque	128

7.3.1	Rappels et définitions	128
7.3.2	Mélange de gaz parfait et de rayonnement	131
7.4	Pulsations stellaires	134
7.4.1	Relation période–densité	134
7.4.2	Physique des pulsations	135
7.4.3	Pulsations adiabatiques : modèle à une zone	137
7.4.4	Relation période–luminosité des céphéides	140

Bibliographie :

- B.W. Carroll, D.A. Ostlie, Introduction to modern astrophysics, Addison-Wesley, 1996
- P. Léna, Les sciences du ciel, Flammarion, 1996
- F. Shu, The physics of astrophysics, Volume I : Radiation, University Science Books, 1991
- D. F. Gray, The observation and analysis of stellar photospheres, Cambridge Astrophysics Series, 2nd edition, 1992

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités

L'astrophysique est essentiellement basée sur l'analyse du rayonnement les seules exceptions étant :

1. L'analyse en laboratoire des météorites et des micrométéorites, ainsi que l'analyse *in situ* des objets du système solaire (planètes et leurs satellites, astéroïdes et comètes) au moyen de sondes spatiales
2. La détection des particules de haute énergie constituant une partie des "rayons" cosmiques (l'autre partie étant la composante électromagnétique, c'est-à-dire les rayons γ)
3. L'étude des neutrinos solaires ou autres
4. La détection et l'étude des ondes gravitationnelles – toutes deux encore à venir.

On insistera donc tout naturellement, dans ce cours, sur le rayonnement électromagnétique et sur ses sources principales actuelles (après le rayonnement fossile cosmologique), à savoir les étoiles. Le but de ce cours est de doter l'étudiant des notions astrophysiques nécessaires à la compréhension de cours plus avancés et plus spécialisés, c'est pourquoi il peut paraître à première vue quelque peu hétérogène. En particulier, il prépare aux cours de l'école doctorale "Diagnostics spectroscopiques en astrophysique" de D. Schaerer et "Structure interne des étoiles" de A. Maeder (Université de Genève).

Le cours aborde le rayonnement en général, puis les atmosphères et les intérieurs stellaires, qui sont traités assez longuement vu l'importance des

étoiles en astrophysique. Les rayonnements non thermiques ne sont pas abordés ici, vu qu'ils sont traités dans le cours d'école doctorale "Astrophysique des hautes énergies et astronomie spatiale" de T. Courvoisier (Université de Genève).

1.2 Objectifs et philosophie du cours

Selon Gaston Bachelard, "Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question"¹ Il ne s'agit pas ici de répertorier les innombrables questions auxquelles l'astrophysique tente de répondre, mais de commencer par quelques-unes pour lesquelles il existe au moins des réponses partielles. Ces questions sont suffisamment cruciales et se rencontrent assez fréquemment pour qu'on puisse les considérer comme essentielles dans le bagage d'un étudiant qui désire approfondir sa connaissance de l'astrophysique, et ne pas se contenter d'en avoir une idée purement descriptive et qualitative.

Le cours qui précède, Astrophysique I : introduction à l'astrophysique, donne précisément cette vue très large et plutôt descriptive de l'astronomie et de l'astrophysique, bien que les aspects quantitatifs n'en soient pas absents. Les cours qui suivent sont *Astrophysique III : cosmologie observationnelle* et *Astrophysique IV : dynamique stellaire et galactique*, ne traitent guère des étoiles en tant que telles, c'est pourquoi ce cours-ci est consacré essentiellement à ces dernières. Les étoiles sont en effet à la base de l'astrophysique moderne et il est important de bien les connaître pour naviguer à l'aise dans toutes les spécialités de cette science.

La diversité des objets célestes impose un choix car il est impossible de les décrire tous en détail dans un cours d'un semestre. Le choix de privilégier les étoiles est ainsi fait au détriment, par exemple, des nébuleuses et de la matière interstellaire en général. De même, l'aspect "radiation" est privilégié ici, même si le cours ne couvre de loin pas tous les sujets abordés par exemple dans le livre de Frank Shu, *The physics of Astrophysics, Volume I : Radiation*. L'étudiant curieux pourra trouver d'abondants compléments dans ce dernier ouvrage, ainsi que dans *The physics of Astrophysics, Volume II : Matter* du même auteur, où la physique des ondes de chocs est abordée, pour ne citer qu'un exemple. Bien entendu, les cours du cycle master, puis de l'école doctorale permettront au candidat à la thèse de parfaire sa culture et sa formation.

¹"*La formation de l'esprit scientifique*", Paris, Librairie philosophique Vrin, 1999

En résumé, l’ambition de ce cours est de répondre à des questions telles que

- comment se forment les raies spectrales dans une atmosphère stellaire ?
- quelle est la structure d’une telle atmosphère ?
- comment calculer le transfert d’énergie, radiatif ou convectif ?
- quelles sont les différentes contributions à l’opacité du milieu stellaire ?
- comment s’écrivent les différentes équations d’état, en particulier celles des gaz dégénérés ?
- quelles sont les conditions des pulsations stellaires ?

Avec ce bagage, l’étudiant doit pouvoir aborder les cours suivants sans difficulté particulière, bien qu’il soit impossible de prévenir toutes les lacunes potentielles.

1.3 Matière et radiation dans l’univers

Nous savons que notre environnement immédiat comporte de la matière d’une part, et du rayonnement d’autre part, et nous savons aussi que l’une peut se transformer en l’autre. A l’échelle de l’univers, ces deux composantes existent aussi, mais elles ne sont apparemment pas les seules, puisque selon les derniers résultats de la cosmologie, la matière baryonique ne représenterait que les 4% environ du contenu énergétique total de l’univers. La matière dans son ensemble représenterait 30% du total, ce qui impliquerait que 26% environ de la matière ne serait pas sous la forme baryonique qui nous est familière, mais sous une forme encore totalement inconnue. Quant aux 70% restant, il s’agirait d’une “énergie noire” associée à une constante cosmologique non nulle et dont personne ne comprend la nature actuellement.

La composante radiative dont nous parlons ici est celle qui nous donne accès à l’univers par l’information qu’elle porte via les photons. Elle est donc extrêmement importante pour nous, mais très fortement minoritaire en termes de densité d’énergie. Pourtant, il n’en a pas toujours été ainsi, comme l’étudiant le verra au cours d’*Astrophysique III*. En terme de nombre de photons, c’est le rayonnement fossile cosmologique (en anglais Cosmic Microwave Background, CMB) qui en fournit l’écrasante majorité, bien avant les étoiles. Dans le contexte du “modèle standard” cosmologique, ce rayonnement isotrope, dont la distribution d’énergie suit exactement la fonction de Planck pour une température de 2.735 K, provient d’une phase précoce où l’univers se réduisait à un plasma très chaud. Sa température actuelle résulte

de l'expansion considérable de l'univers depuis l'époque dite de "découplage" entre matière et rayonnement. Il est intéressant de noter que ce rayonnement ne nous est connu que depuis quarante ans, puisqu'il a été découvert en 1965 par Penzias et Wilson. Cette découverte a d'ailleurs fortement contribué à affermir le modèle du Big Bang, au détriment du principal modèle concurrent de l'époque, le modèle d'état stationnaire de Hoyle, Bondi et Gold.

La composante matérielle de l'univers a pris corps essentiellement lors de la nucléosynthèse primordiale, quelques minutes après le Big Bang. C'est alors que l'hydrogène et l'hélium se sont formés, de même que des traces d'éléments légers comme le lithium. Ce n'est que par la suite – toujours dans le contexte du modèle standard du Big Bang – que sont apparus les éléments plus lourds, après la mort des toutes premières étoiles, puisqu'ils sont le fruit de la nucléosynthèse stellaire. L'analyse du rayonnement stellaire permet d'estimer l'abondances de ces éléments, dont la masse cumulée ne dépasse pas quelques pourcents de la masse totale des étoiles (tout le reste étant constitué d'hydrogène et d'hélium), et encore dans le cas des étoiles les plus riches en métaux. La récession des galaxies, première preuve de l'expansion de l'univers découverte par Hubble en 1929, relève évidemment de la composante matérielle, bien que l'expansion concerne toutes les composantes de l'univers.

Les interactions entre matière et rayonnement sont omniprésentes dans l'univers, mais revêtent une importance particulière, soit pour l'astrophysique en elle-même, soit pour l'information que nous pouvons extraire du rayonnement que nous recevons des astres, dans les sites suivants :

- l'univers primordial (création de particules, nucléosynthèse primordiale, fluctuations primordiales à l'époque du découplage)
- les intérieurs stellaires (opacités, structure interne des étoiles)
- les atmosphères stellaires (formation des raies, diagnostics observationnels)
- le voisinage des étoiles (enveloppes stellaires ou nébuleuses)
- la matière interstellaire (émission millimétrique des nuages moléculaires, forêt Lyman- α)
- les noyaux de galaxie (noyaux actifs, quasars, émission radio du centre galactique)
- les détecteurs des instruments astronomiques placés au foyer des télescopes !

De ces interactions dépendent presque toutes les informations que nous recevons de l'univers, et que l'astrophysique est précisément l'art d'interpréter.

Chapitre 2

Généralités sur le rayonnement

Il s'agit ici d'introduire un certain nombre de notions qui permettent de caractériser un champ de rayonnement. De plus, la matière émet et absorbe du rayonnement, et il s'agit de définir les coefficients d'émission et d'absorption sans entrer encore dans des considérations microscopiques.

2.1 Intensité spécifique et flux

2.1.1 Définition de l'intensité spécifique

On considère un champ de rayonnement, et dans celui-ci un faisceau dont l'axe est défini par le vecteur \vec{k} . Ce faisceau occupe l'angle solide $d\omega$, traverse un élément dA d'une surface S , dont la normale est définie par le vecteur \vec{n} , sous l'angle θ par rapport à la normale (voir Fig. 2.1). L'intensité spécifique $I_\nu(\theta, \phi)$ est alors définie, dans la bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$, par l'expression de l'énergie élémentaire véhiculée par ce faisceau durant le temps dt :

$$dE_\nu = I_\nu(\theta, \phi) \vec{n} \cdot \vec{k} dA d\omega dt d\nu = I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta dA d\omega dt d\nu \quad (2.1)$$

où ϕ est l'azimut de la direction du faisceau.

En coordonnées sphériques, on voit facilement que

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

(voir Fig. 2.2).

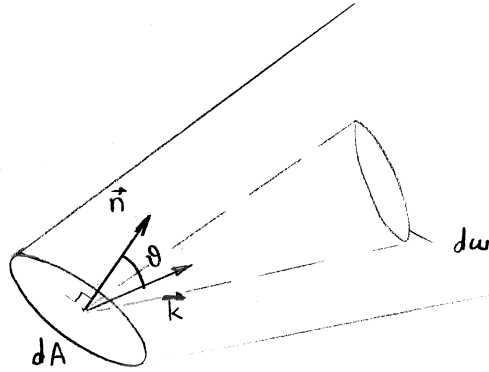


FIG. 2.1 – Définition de l'intensité spécifique.

L'intensité spécifique est donc la puissance rayonnée dans la bande passante $d\nu$ par unite de surface et d'angle solide :

$$[I_\nu d\nu] = \frac{W}{m^2 st}$$

Notons que c'est l'invariance de l'intensité spécifique (démontrée en exercice) qui conduit au fameux paradoxe de Cheseau-Olbers. Ce paradoxe, d'une grande importance historique, a également une portée cosmologique fondamentale et sera décrit au cours Astrophysique III : cosmologie observationnelle.

2.1.2 Intensité intégrée ou bolométrique

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \quad (2.2)$$

Bien entendu, on peut aussi travailler dans l'espace des longueurs d'onde plutôt que des fréquences, en se rappelant que $I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu$.

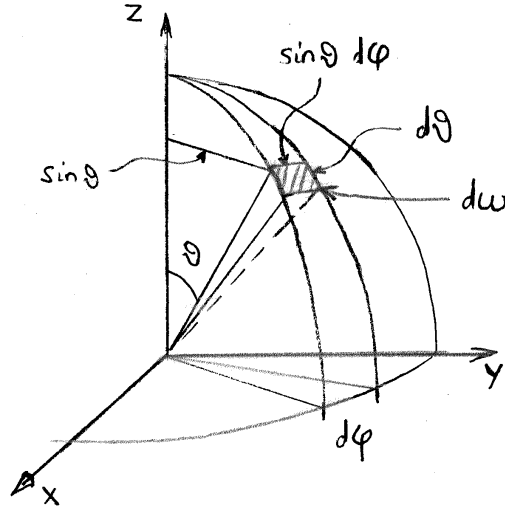


FIG. 2.2 – Angle solide en coordonnées sphériques.

2.1.3 Intensité moyenne

On définit l'intensité moyenne sur toutes les directions par :

$$J_\nu = \frac{\int I_\nu d\omega}{\int d\omega} = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega \quad (2.3)$$

soit explicitement, dans le cas des coordonnées sphériques :

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

ou encore, dans le cas fréquent de la symétrie cylindrique ($I_\nu(\theta, \phi) = I_\nu(\theta)$) :

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu \quad (2.4)$$

avec $\mu = \cos \theta$, $d\mu = -\sin \theta d\theta$.

Si I_ν est isotrope, alors $J_\nu = I_\nu$, puisque $\int_{-1}^1 d\mu = 2$.

2.1.4 Flux

Le flux est la puissance rayonnée dans toutes les directions par une unité de surface :

$$dF_\nu = \frac{dE_\nu}{dA dt d\nu} = I_\nu \cos \theta d\omega \quad (2.5)$$

donc

$$F_\nu = \int_\omega I_\nu \cos \theta d\omega \quad (2.6)$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.7)$$

Dans le cas d'une symétrie cylindrique, alors

$$F_\nu = 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (2.8)$$

On peut séparer le flux en **deux contributions** :

$$F_\nu = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta - 2\pi \int_{\pi}^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (2.9)$$

$$= F_\nu^+ - F_\nu^- \quad (2.10)$$

Avec F_ν^+ le flux sortant et F_ν^- le flux entrant.

Dans le **cas isotrope** $I_\nu(\theta, \phi) = I_\nu = \text{constante}$, on a (avec $\mu = \cos \theta$, $d\mu = -\sin \theta d\theta$) :

$$F_\nu^+ = 2\pi I_\nu \int_0^1 \mu d\mu = \pi I_\nu \quad (2.11)$$

$$F_\nu^- = 2\pi I_\nu \int_0^{-1} \mu d\mu = \pi I_\nu \quad (2.12)$$

$$F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^- = 0 \quad (2.13)$$

Le flux total est nul, à moins d'écart à l'isotropie.

On peut considérer le flux sortant comme (voir Fig. 2.3) :

- La puissance émise dans toutes les directions d'un hémisphère par une surface unité
- La puissance émise dans une direction unique par tout l'hémisphère visible d'une étoile sphérique (cela, à R^2 près)

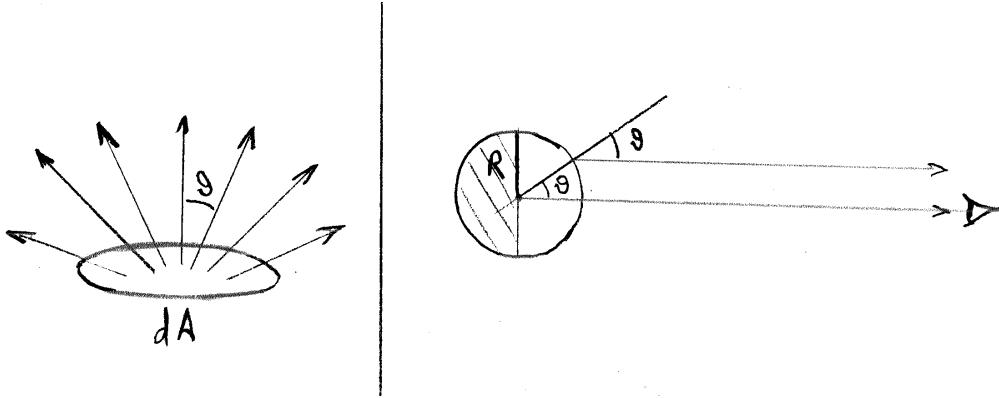


FIG. 2.3 – Définition du flux sortant (à gauche) et illustration du flux émis par une étoile sphérique en direction d’un observateur (à droite).

Ecrivons la puissance émise dans la direction de l’observateur par chaque élément de surface de l’étoile :

$$\int_A I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta \, dA$$

Or, $dA = R \sin \theta \, d\phi R \, d\theta = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$, donc

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu(\theta) R^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} I_\nu(\theta) \cos \theta \sin \theta \, d\theta = R^2 F_\nu^+$$

On reconnaît là l’expression du flux émergent :

$$R^2 F_\nu^+ = R^2 \cdot 2\pi \int_0^1 I_\nu \mu \, d\mu = R^2 \cdot \pi \bar{I}_\nu$$

Donc

$$F_\nu^+ = \pi \bar{I}_\nu \quad (2.14)$$

où \bar{I}_ν est l’intensité spécifique moyenne du disque apparent stellaire :

$$\bar{I}_\nu = \frac{\int I_\nu \cos \theta \, d\omega}{\int \cos \theta \, d\omega} = \frac{\int I_\nu \mu \, d\mu}{\int \mu \, d\mu} = 2 \int_0^1 I_\nu \mu \, d\mu \quad (2.15)$$

Notons que I_ν varie sur le disque stellaire, et cette variation n’est observable facilement que sur le soleil (seule l’interférométrie permet d’accéder à d’autres étoiles!). On l’appelle parfois aussi “brillance de surface”.

2.1.5 Luminosité monochromatique L_ν d'un astre

Energie émise dans toutes les directions par unité de temps et de fréquence :

$$dL_\nu = \frac{dE_\nu}{dt d\nu} = I_\nu \cos \theta \, dA \, d\omega \quad (2.16)$$

$$L_\nu = \int_A \int_\omega I_\nu \cos \theta \, d\omega \, dA = \int F_\nu^+ \, dA = 4\pi R^2 F_\nu^+ \quad (2.17)$$

où R est le rayon stellaire

2.1.6 Luminosité (bolométrique) L d'un astre

$$L = 4\pi R^2 F_+ = \int_0^\infty L_\nu \, d\nu \quad (2.18)$$

N.B. Relation entre luminosité et magnitude absolue bolométrique :

$$M_{bol} = -2.5 \log \frac{L}{L_\odot} + 4.75$$

2.1.7 Éclairement e_ν

Flux reçu par un récepteur à la distance r de la source :

$$de_\nu = \frac{dE_\nu}{dA' \, dt \, d\nu} = \frac{dL_\nu}{dA'} \quad (2.19)$$

où dA' est la surface du récepteur.

Dans le cas d'une étoile de rayon R et située à distance r ,

$$e_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 F_\nu^+ \quad (2.20)$$

(puisque $L_\nu = 4\pi R^2 F_\nu^+$).

Pour un diamètre apparent $\phi = 2R/r$, on a alors :

$$e_\nu = \frac{\phi^2}{4} F_\nu^+ = \frac{\pi}{4} \phi^2 \bar{I}_\nu \quad (2.21)$$

Cas du soleil :

$$\begin{aligned} R_\odot &= 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}, \quad r = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ F^+ &= 6.29 \cdot 10^7 \text{ W m}^{-2}, \quad L_\odot = 3.83 \cdot 10^{26} \text{ W} \\ \implies \text{constante solaire } e_\odot &\simeq 1362 \text{ W m}^{-2} \end{aligned}$$

2.2 Densité d'énergie et pression de radiation

2.2.1 Densité d'énergie

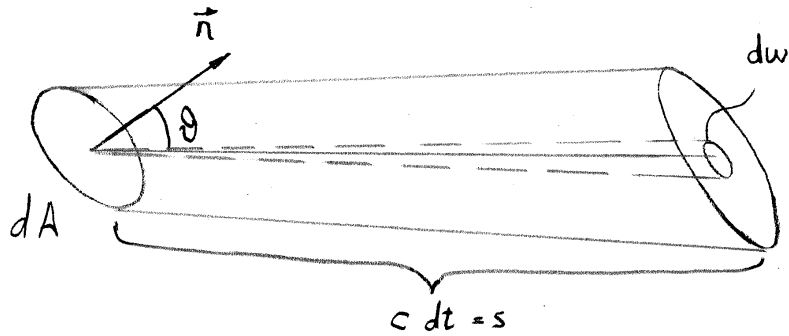


FIG. 2.4 – Calcul de la densité d'énergie

On a (voir Fig. 2.4) un volume $dV = dA \cos \theta \cdot c dt^1$ et $dt = s/c$.
Energie traversant le volume dV dans le temps dt :

$$dE_\nu = I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta dA d\omega d\nu dt$$

Si $dU_\nu \equiv$ densité d'énergie dans un angle solide $d\omega = \frac{dE_\nu}{dV d\nu}$

alors on voit que $dU_\nu = \frac{1}{c} I_\nu d\omega$

En intégrant sur les angles solides,

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (2.22)$$

puisque $J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega$

Cas d'un rayonnement homogène et isotrope :

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu \quad (2.23)$$

Densité d'énergie du rayonnement globale ou bolométrique :

$$U = \int_0^\infty U_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_\omega I_\nu d\omega d\nu = \frac{1}{c} \int I d\omega \quad (2.24)$$

¹En réalité, $dV = dA \cos \theta \cdot c dt + \frac{1}{3}\pi c dt (\frac{d\omega}{\pi} (c dt)^2)$ avec $d\omega = dA' / (c dt)^2$ mais le second terme est négligeable

2.2.2 Pression de radiation

Elle est due à la variation d'impulsion des photons qui frappent la paroi d'un récipient imaginaire.

En général, l'impulsion d'une particule de masse m_0 et douée d'une vitesse relativiste v s'écrit :

$$p = m_0 v (1 - \beta^2)^{-1/2} \text{ avec } \beta = v/c. \text{ L'énergie de la particule s'écrit}$$

$$E = m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{-1/2} \Rightarrow p = \frac{v}{c^2} E$$

Dans le cas d'un photon, $v \rightarrow c$ et $m_0 \rightarrow 0$

$$\Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

On présente ici deux manières d'obtenir l'expression de la pression de radiation, la première étant plus simple mais la seconde plus générale :

Démonstration simple :

(Carroll & Ostlie, "An introduction to Modern Astrophysics") Considérons

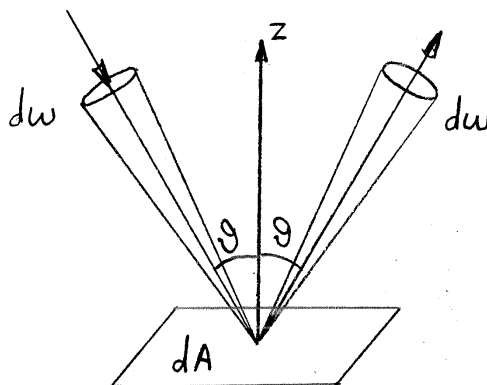


FIG. 2.5 –

la Fig. 2.5 : un faisceau d'ouverture $d\omega$ tombe sous un angle d'incidence θ sur une surface élémentaire dA .

La variation d'impulsion pendant le temps dt sur la surface dA et dans l'angle solide $d\omega$, entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, pour tous les photons

collectivement, et selon la composante z s'écrit :

$$\begin{aligned}
 dp_\nu \, d\nu &= (p_\nu^{final} - p_\nu^{initial}) \, d\nu \\
 &= \left[\frac{E_\nu \cos \theta}{c} - \left(-\frac{E_\nu \cos \theta}{c} \right) \right] d\nu \\
 &= \frac{2}{c} E_\nu \cos \theta \, d\nu \\
 &= \frac{2}{c} I_\nu \cos^2 \theta \, dA \, dt \, d\omega \, d\nu
 \end{aligned}$$

car $dE_\nu = E_\nu \, d\nu = I_\nu \cos \theta \, d\nu \, dA \, dt \, d\omega$.

Or, $\frac{dp_\nu}{dt}$ est une force, et $\frac{dp_\nu}{dt dA}$ est donc la **pression** exercée sur dA par les photons dont la trajectoire est orientée dans l'angle solide $d\omega$. En intégrant sur les angles solides d'un hémisphère, on obtient la pression due aux photons de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$:

$$\begin{aligned}
 P_\nu^{rad} \, d\nu &= \frac{2}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta \, d\omega \, d\nu = \frac{2}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_\nu \, d\nu \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\
 &= \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu \, d\nu \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Pour la pression totale, c'est-à-dire intégrée sur les fréquences, on a évidemment :

$$P^{rad} = \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

et si règne l'isotropie, alors on vérifie que :

$$P^{rad} = \frac{4\pi}{c} I$$

Démonstration plus générale :

Considérons la Fig. 2.6, un peu mieux adaptée ici que la précédente. On considère cette fois non seulement des photons, mais n'importe quelles particules (toutes identiques toutefois) de vitesse \vec{v} et d'impulsion \vec{p} , qui sont en nombre $n(p)dp$ par unité de volume et dans le domaine d'impulsions $[p, p + dp]$.

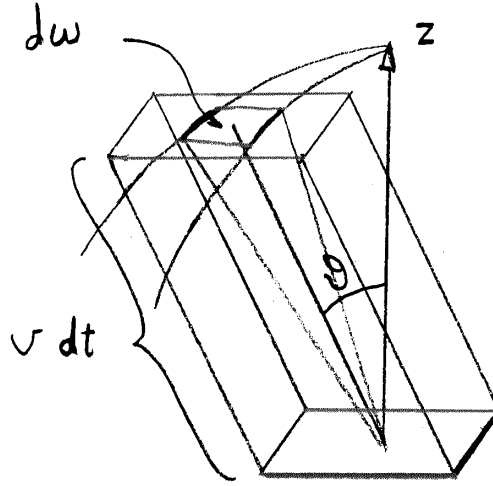


FIG. 2.6 -

Pour **une particule** qui rebondit de manière élastique sur l'élément de surface dA , la variation d'impulsion est $\Delta p = 2p \cos \theta$ où θ est l'angle d'incidence par rapport à la normale à l'élément de surface.

Pendant le temps dt , le nombre de particules frappant dA est (sous l'hypothèse d'isotropie)

$$n(p) dp \cdot dA \cos \theta v dt \frac{d\omega}{4\pi}$$

Or, $dP = \frac{dp}{dt dA} \times$ nb. de particules dans l'angle solide $d\omega$. Donc,

$$dP = \frac{1}{2\pi} p v n(p) \cos^2 \theta dp d\omega$$

En intégrant sur les angles solides et sur les impulsions, il vient :

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{p=0}^{\infty} p v n(p) \cos^2 \theta dp \sin \theta d\theta d\phi$$

Toujours à cause de l'isotropie, on a :

$$P = \int_0^{\infty} p v n(p) dp \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

et comme la dernière intégrale vaut $1/3$, on a finalement

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v n(p) dp \quad (2.26)$$

expression très générale qui permet de traiter les cas relativistes aussi bien que non relativistes. Ecrivons encore la densité d'énergie cinétique u :

$$u = \int_0^\infty n(p) E_{cin}(p) dp \quad (2.27)$$

Cas non relativiste : $p = mv$, $E_{cin} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow v = \frac{p}{m}$. On a donc

$$u = \int_0^\infty n(p) \frac{p^2}{2m} dp$$

et

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{p^2}{m} n(p) dp = \frac{2}{3} u \quad (2.28)$$

Cas relativiste extrême : $v \rightarrow c$, $E_{cin} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 \rightarrow pc$

$$u = \int_0^\infty n(p) p c dp$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n(p) p \cdot c dp = \frac{1}{3} u \quad (2.29)$$

Cas général :

$$\frac{1}{3} \leq P \leq \frac{2}{3}$$

Pression de radiation : $p = h\nu/c$, $v = c$

Partons de

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_\omega \int_0^\infty p v \cos^2 \theta n(p) dp d\omega$$

Or, $dE_\nu/h\nu = nb$. de particules d'énergie $h\nu$ dans le faisceau, et l'élément de volume vaut $dV = dA \cos \theta \cdot c \cdot dt$, donc on a :

$$n(p) dp \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{dE_\nu}{dV \cdot h\nu}$$

$$\begin{aligned}
n(p) dp \frac{d\omega}{4\pi} &= \frac{I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta dA d\omega dt d\nu}{dA \cos \theta c dt h \nu} \\
&= \frac{1}{c h \nu} I_\nu d\nu d\omega
\end{aligned}$$

Finalemment, comme $p = h\nu/c$ et $v = c$,

$$\begin{aligned}
P_\nu^{rad} &= 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{h\nu}{c} c \cos^2 \theta \frac{1}{c h \nu} I_\nu d\nu d\omega \\
P_{rad} &= \frac{2}{c} \int_0^{\pi/2} I \cos^2 \theta d\omega
\end{aligned}$$

avec $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$. S'il y a symétrie, alors $\int_0^\pi \dots = 2 \int_0^{\pi/2} \dots$, et

$$P_{rad} = \frac{1}{c} \int_{\theta=0}^\pi I \cos^2 \theta d\omega \quad (2.30)$$

Remarque : Si l'on définit le moment d'ordre n de l'intensité spécifique comme étant

$$M_n(I) = \int_\omega I \cos^n \theta d\omega$$

alors

$$u = \frac{1}{c} M_0(I) \quad (2.31)$$

$$F = M_1(I) \quad (2.32)$$

$$P_{rad} = \frac{1}{c} M_2(I) \quad (2.33)$$

2.3 Rayonnement noir et température en astrophysique

2.3.1 Grandeurs monochromatiques

Intensité spécifique

Soit un champ de rayonnement en équilibre avec la matière environnante qui est à température T . Dans ce cas très particulier, l'intensité spécifique

ne dépend alors que de T , et sa distribution en fréquence est donnée par la loi de Planck :

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{aligned} h &= 6.625 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ k &= 1.3804 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{K}^{-1} = 1.3804 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

Comme $I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda$ et $\nu = c/\lambda$, on a $I_\lambda = \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| I_\nu = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu$ et donc

$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (2.35)$$

Flux

Le flux sortant vaut

$$F_\nu^+ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} B_\nu(T) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

et comme on a symétrie sphérique ($B_\nu(T)$ indépendant de θ, ϕ),

$$F_\nu^+ = 2\pi B_\nu(T) \int_0^1 \mu \, d\mu = \pi B_\nu(T) \quad (2.36)$$

le flux net $F_\nu = 0$ à cause de l'isotropie du corps noir.

Densité d'énergie

$$\begin{aligned} U_\nu &= \frac{1}{c} \int B_\nu(T) \, d\omega = \frac{2\pi}{c} B_\nu(T) \int_{-1}^1 d\mu \\ U_\nu &= \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$U_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} (e^{hc/kT\lambda} - 1)^{-1} \quad (2.38)$$

Loi de Wien

On cherche le maximum de la fonction $B_\lambda(T)$. En posant $x = hc/kT\lambda$, on a

$$B_\lambda(T) = \frac{2k^5 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1}$$

Or, $\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = \frac{dB_\lambda}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda} = \frac{-dB_\lambda}{dx} \frac{hc}{kT\lambda^2}$

On cherche donc le maximum de la fonction $\frac{x^5}{e^x - 1}$ (car il suffit que $\frac{dB_\lambda}{dx} = 0$ pour que $\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 0$). La dérivée de ce quotient donne une fraction dont le numérateur doit s'annuler, et l'on obtient l'équation transcendante (cf. exercices)

$$x = \frac{5(e^x - 1)}{e^x}$$

qui admet formellement deux solutions : $x = 4.9651$ et $x = 0$, mais cette dernière n'est évidemment pas physique. On a donc finalement la **loi de Wien**

$$\lambda_{max} \cdot T = \frac{hc}{kx_{max}} = \frac{hc}{4.965k} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K} \quad (2.39)$$

Approximation de Wien

Pour les hautes énergies, $h\nu/kT \gg 1$ et à plus forte raison $e^{h\nu/kT} \gg 1$, donc

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad (2.40)$$

Approximation de Rayleigh-Jeans

Aux basses énergies, $h\nu/kT \ll 1$, si bien que $e^{h\nu/kT} - 1 \sim \frac{h\nu}{kT}$, donc

$$B_\nu(T) = \frac{2kT}{c^2} \nu^2 \quad (2.41)$$

Cette approximation est utilisée en radioastronomie, où elle définit la *température d'antenne* T_A .

2.3.2 Grandeurs intégrées sur tout le spectre

Intensité

En faisant le changement de variable $x = h\nu/kT$, on peut écrire

$$I = B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2k^4T^4}{h^3c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

La dernière intégrale définie vaut $\pi^4/15$, si bien que

$$I = B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (2.42)$$

avec $\sigma = \frac{2\pi^5k^4}{15h^3c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$

Flux émergent

On sait que, dans le cas isotrope (équation 2.11),

$$F^+ = \pi B(T) = \sigma T^4 \quad (2.43)$$

Densité d'énergie

Toujours dans le cas isotrope,

$$U = \frac{4\pi}{c} B(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4 = a T^4 \quad (2.44)$$

avec $a = \frac{4\sigma}{c} = 7.5634 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} = 7.5634 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$

Pression de radiation

$$P_{rad} = \frac{1}{3} U = \frac{a}{3} T^4 \quad (2.45)$$

Remarque : Pour un gaz parfait, $P_{gaz} = nkT$ (où n est la densité numérique des molécules), et dans le cas du centre du Soleil, où règne une température $T \sim 15.8 \cdot 10^6 \text{ K}$, on a

$$\frac{P_{rad}}{P_{gaz}} \approx 6 \cdot 10^{-4}$$

avec $P_{rad} = 1.57 \cdot 10^{13} \text{ N m}^{-2}$ et $P_{gaz} = 2.50 \cdot 10^{16} \text{ N m}^{-2}$

2.3.3 Températures

Température effective

Comme une atmosphère stellaire est stratifiée, il n'y a pas de température unique. Cependant, on peut définir une température effective T_{eff} telle que $L(\text{étoile}) = L(\text{corps noir de même } R)$:

$$L = 4\pi R^2 F^+ \Leftrightarrow L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^2$$

Cas du Soleil : Eclairement reçu (hors atmosphère) au niveau de la Terre :
 $e = 1365 \text{ W m}^{-2}$

$$e = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \Rightarrow L_{\odot} = 4\pi r^2 e = 3.83 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

avec $r = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Donc

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{1/4} = 5770 \text{ K}$$

car $R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$.

Température de brillance

On mesure un éclairement e_{ν} dans un intervalle de fréquence $\Delta\nu$. La température de brillance T_b est celle qu'aurait un corps noir de même diamètre apparent ϕ et donnant le même éclairement e_{ν} :

$$e_{\nu} = \frac{\pi}{4} \phi^2 \bar{I}_{\nu} \equiv \frac{\pi}{4} \phi^2 B_{\nu}(T_b)$$

Température de couleur

On mesure l'éclairement e_{ν} (ou la magnitude) en deux fréquences ν_1 et ν_2 (ou deux longueurs d'onde). Dans l'intervalle de ν ou de λ considéré, on définit la température T_c comme celle pour laquelle la "pente" (ou le "gradient"; en réalité, un rapport d'intensité, qui ne dépend pas de la distance) donnée par un modèle (le modèle du corps noir, dans le cas le plus simple) est identique à celle observée :

$$\frac{e_{\nu_1}}{e_{\nu_2}} \equiv \frac{B_{\nu_1}}{B_{\nu_2}}(T_c)$$

(ou en fonction de λ , voir Fig. 2.7).

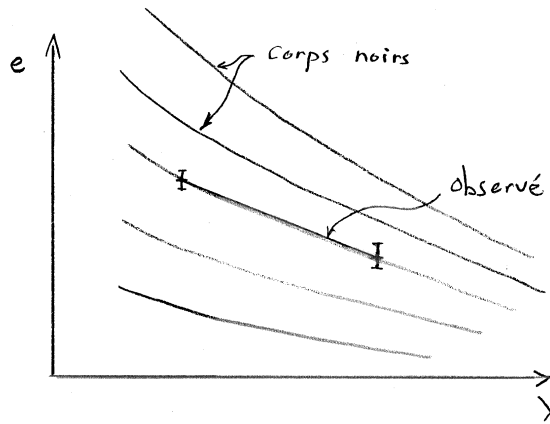


FIG. 2.7 –

Remarque : En réalité, pour une étoile, T_{eff} ne coïncide pas exactement avec T_b ou T_c (si le modèle du corps noir a été utilisé), car la distribution d'énergie d'une étoile ne coïncide pas avec celle du corps noir. Il n'y a coïncidence que si l'on remplace $B_\nu(T)$ par une distribution d'énergie réaliste, donnée par un modèle d'atmosphère détaillé (par exemple un modèle de R. Kurucz).

On peut aussi définir d'autres températures, utiles en spectroscopie :

- température d'excitation (loi de Boltzmann)
- température d'ionisation (loi de Saha)
- température cinétique (loi de Maxwell-Boltzmann)

2.4 Coefficients d'extinction et d'émission

2.4.1 Coefficient d'extinction

Un rayon traversant un milieu d'épaisseur dx , de densité ρ et de coefficient d'extinction κ_ν subira une absorption proportionnelle à l'intensité, à la densité et à l'épaisseur, le coefficient d'extinction apparaissant comme la constante de proportionnalité :

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu dx$$

$$\implies [\kappa_\nu] = \text{cm}^2 \text{g}^{-1} \text{ ou } \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$$

On peut considérer κ_ν comme l'inverse d'une densité de colonne. Il résulte

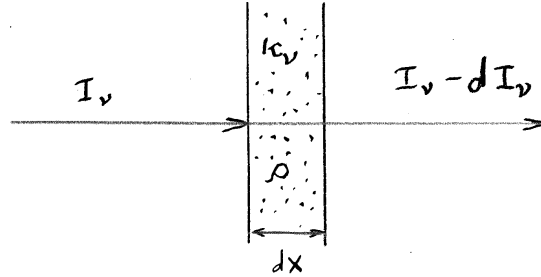


FIG. 2.8 – Absorption d'un faisceau I_ν par une couche de matériau d'épaisseur dx , de densité ρ et de coefficient d'absorption κ_ν

de l'addition de plusieurs processus physiques.

Si κ_ν et ρ sont constants dans le milieu, alors on peut écrire :

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\kappa_\nu \rho (x-x_0)} = I_\nu^0 e^{-(x-x_0)/l}$$

avec $l = \frac{1}{\kappa_\nu \rho}$, [l] = *cm* ou *m*. l est le libre parcours moyen : après un parcours de cette longueur, l'intensité est réduite d'un facteur e .

Profondeur optique

$$\tau_\nu = \int_0^x \kappa_\nu \rho dx' \implies I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu}$$

Examinons le rapport de l'intensité transmise à l'intensité incidente en fonction de la profondeur optique :

- Si $\tau = 1$, $I_\nu/I_\nu^0 = 1/e = 0.37$
- 2, $1/e^2 = 0.135$
- 5, $1/e^5 = 0.0067$

On voit donc que le rayonnement observable provient des couches situées à $\tau_\nu \leq 4 - 5$

Que vaut le libre parcours moyen d'un photon $l = \frac{1}{\kappa \rho}$ dans une étoile ? Il dépend fortement de la région considérée :

- $1 \mu\text{m}$ au centre du \odot

- 1 cm à la base de la photosphère
 - 1000 km 700 km au-dessus
- ou encore :
- 1 cm à $T = 25000$ K
 - 1 km à $T = 10000$ K
 - 100 km à $T = 6000$ K
 - > 1000 km à $T = 5000$ K

Energie absorbée

Selon la définition de I_ν , on a

$$\begin{aligned}
 dE_\nu^{abs} &= |dI_\nu| d\nu dA \cos \theta d\omega dt \\
 &= \kappa_\nu I_\nu \rho dx dA \cos \theta d\nu d\omega dt \\
 &= \kappa_\nu I_\nu d\nu dm d\omega dt
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

où $dm = \rho dV = \rho dx dA \cos \theta$ est l'élément de masse.

Energie diffusée

L'extinction comporte une part d'absorption vraie, et une part de diffusion :

$$\kappa_\nu^{tot} = \kappa_\nu^{diff} + \kappa_\nu^{abs}$$

L'énergie diffusée dans une direction θ par rapport à la direction d'incidence est (voir Fig. 2.9) :

$$dE_\nu^{diff} = \kappa_\nu^{diff} I_\nu dm d\omega dt \frac{d\omega'}{4\pi} p^{diff}(\cos \theta) d\nu$$

c'est donc la fraction diffusée de l'énergie incidente, multipliée par la fraction d'angle solide correspondant à la direction θ , et multipliée par la fonction de phase, qui est normalisée de telle façon que

$$\int_{\omega'} p^{diff}(\cos \theta) \frac{d\omega'}{4\pi} = 1$$

Si la diffusion est isotrope, $p^{diff} = 1 \quad \forall \theta$

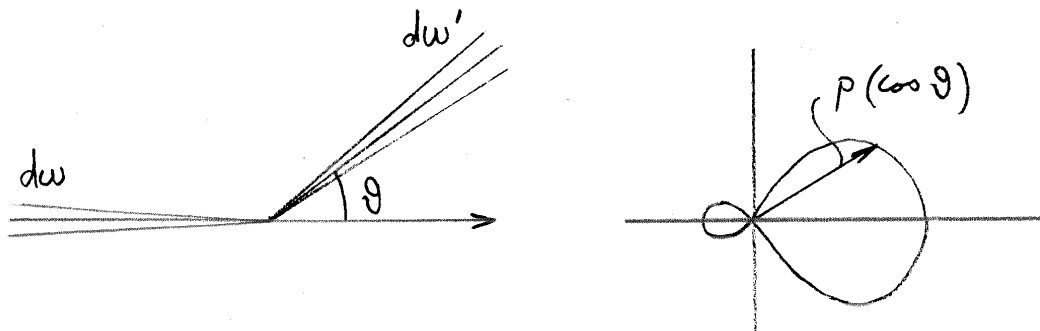


FIG. 2.9 – A gauche : faisceau diffusé sous la direction θ . A droite : exemple d'une forme de fonction de phase

Albédo de diffusion : (degré de blancheur)

$$\alpha_{\nu}^{diff} = \frac{\kappa_{\nu}^{diff}}{\kappa_{\nu}^{tot}}$$

Si $\alpha = 1$, tout est diffusé et il n'y a pas d'absorption. Si $\alpha = 0$, tout est absorbé et il n'y a aucune diffusion.

2.4.2 Coefficient d'émission

L'énergie émise par l'élément de masse dm provient soit des réactions nucléaires, soit de l'effet du rayonnement sur dm , soit bien sûr des deux à la fois. L'énergie émise dans le cône $d\omega$ dans le temps dt vaut :

$$dE_{\nu}^{em} = j_{\nu} d\nu dm d\omega dt \quad (2.47)$$

Si l'émission est liée à l'absorption pure et/ou aux réactions nucléaires, j_{ν} n'est **pas** fonction de la direction θ, ϕ .

2.4.3 Loi de Kirchhoff

Soit une enceinte isotherme à température T , remplie d'un milieu matériel caractérisé par un coefficient d'absorption κ_{ν} et par un coefficient d'émission

j_ν : l'équilibre se fait entre l'énergie absorbée et l'énergie émise, et l'on peut alors égaler les équations 2.46 et 2.47.

$$dE_\nu^{abs} = dE_\nu^{em} \implies j_\nu = \kappa_\nu I_\nu \quad (2.48)$$

C'est la loi de Kirchhoff. L'équilibre thermique implique :

$$I_\nu = B_\nu(T) = j_\nu / \kappa_\nu \quad (2.49)$$

Ce rapport est indépendant de la nature du corps, de la position, de la direction ; il ne dépend que de ν et de T . Cette relation implique aussi que le milieu n'émet qu'aux fréquences où il absorbe.

Chapitre 3

Transfert radiatif et atmosphères stellaires

3.1 L'équation de transfert radiatif

Dans tout astre de masse importante, il y a transfert d'énergie du centre vers la surface, quelle que soit la source d'énergie interne : contraction gravitationnelle (proto-étoiles), énergie de fission (la Terre), énergie de fusion nucléaire (étoile).

Il existe essentiellement deux mécanismes de transfert :

- radiatif : prédominant dans les atmosphères stellaires
- convectif : important dans le coeur des étoiles massives, et dans l'enveloppe des étoiles de petite masse ou dans les géantes rouges.

Soit un pinceau de rayonnement monochromatique I_ν de direction \vec{s} (Fig. 3.1).

La variation globale d'énergie le long du faisceau pendant le temps dt est :

$$dE_\nu = dI_\nu d\nu dA d\omega dt$$

Le cylindre considéré ayant une longueur ds et une section dA , l'énergie qu'il émet vaut :

$$dE_\nu^{emis} = j_\nu \rho dA ds d\nu d\omega dt$$

L'énergie que le cylindre absorbe vaut :

$$dE_\nu^{abs} = \kappa_\nu I_\nu \rho dA ds d\nu d\omega dt$$

A l'équilibre, le bilan net est :

$$dE_\nu = dE_\nu^{emis} - dE_\nu^{abs}$$

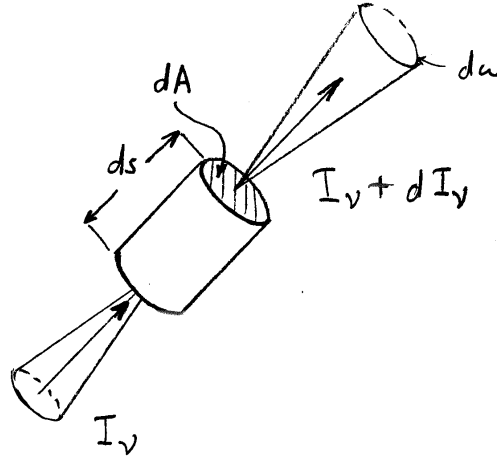


FIG. 3.1 – Transfert de rayonnement dans un élément de masse.

$$\begin{aligned} dI_\nu &= j_\nu \rho ds - \kappa_\nu I_\nu \rho ds \\ \Rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} &= j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho I_\nu \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cette dernière équation est l'équation de transfert dans une direction donnée.

Tenant compte des directions, dans un système de coordonnées sphériques on a (Fig. 3.2) :

$$\begin{aligned} dr &= ds \cos \theta \\ -r d\theta &= ds \sin \theta \end{aligned}$$

car au niveau de ds , $\theta + d\theta < \theta \Rightarrow$ si $ds > 0$, $d\theta < 0$. Donc sous l'hypothèse de symétrie cylindrique,

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

Donc en coordonnées sphériques, on a

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I_\nu}{r \partial \theta} \sin \theta = \rho (j_\nu - \kappa_\nu I_\nu) \quad (3.2)$$

qui est la forme générale de l'équation de transfert pour le cas de symétrie cylindrique, mais avec possibilité d'effets de sphéricité. On peut écrire une

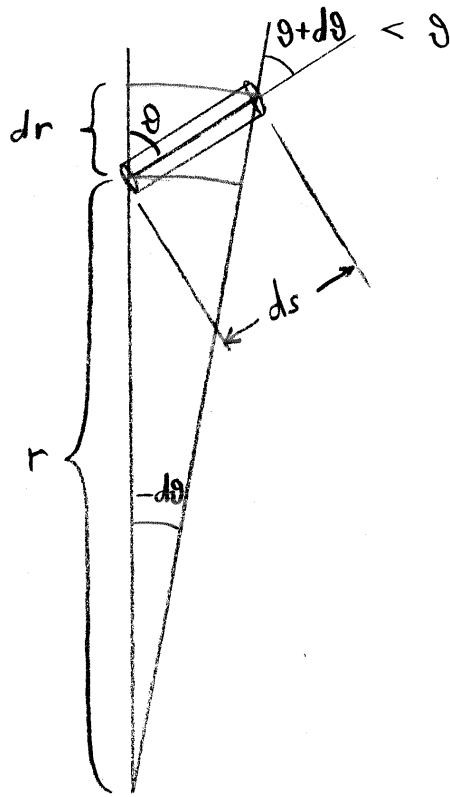


FIG. 3.2 – Transfert dans le cas d'une symétrie cylindrique.

équation semblable pour les grandeurs bolométriques (*i.e.* intégrées sur toutes les fréquences), dont l'intérêt est qu'elle permet d'établir le lien entre ρ , F , κ et P_{rad} .

3.1.1 Cas des intérieurs stellaires :

Dès que l'on se situe suffisamment profond dans l'atmosphère stellaire ou plus bas encore, l'équilibre thermodynamiques est localement réalisé (ETL), car :

1. Le gradient moyen de T est très faible dans les étoiles :

$$\frac{dT}{dr} \sim \frac{T_c}{R} \sim \frac{10^7 \text{ K}}{7 \cdot 10^8 \text{ m}} \sim 10^{-2} \text{ K m}^{-1} = 10^{-4} \text{ K cm}^{-1}$$

2. Le libre parcours moyen est en général très court : si $\rho = \langle \rho_{\odot} \rangle = 1.4 \text{ g cm}^{-2}$ et $\kappa = 1 - 10 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$, alors $l = \frac{1}{\kappa\rho} \sim 0.01 - 1 \text{ cm}$ (base de la photosphère et plus profond) \Rightarrow Peu de variation de T sur un libre parcours moyen d'un photon \rightarrow localement, $I_{\nu} \simeq B_{\nu}(T)$.
3. Anisotropie très faible : si on développe en série

$$I(\theta) = I_0 + I_1 \cos \theta + I_2 \cos^2 \theta + \dots$$

on voit que seuls les deux premiers termes sont utiles en pratique.

Si on néglige les effets de courbure : $ds = \frac{dr}{\cos \theta}$, alors

$$\frac{dI}{dr} \cos \theta = \rho (j - \kappa I)$$

et l'on peut montrer que (voir exercices)

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c} F \quad (3.3)$$

car u et P_{rad} ne dépendent que de I_0 (à I_2 près). Or,

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 &\implies \frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} \implies \\ F_{\text{rad}} = \frac{L_r}{4\pi r^2} = -\frac{4ac T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} &= -C_{\text{rad}} \frac{dT}{dr} \end{aligned} \quad (3.4)$$

C'est une des équations essentielles de la structure interne des étoiles. La grandeur $C_{\text{rad}} = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}$ est la **conductivité radiative** :

$$\begin{aligned} C_{\text{rad}} &\propto T^3 \\ C_{\text{rad}} &\propto l = \frac{1}{\kappa\rho} \end{aligned}$$

Remarque : F_{rad} existe dès que $\frac{dT}{dr} \neq 0$. Autrement dit, la cause première de l'éclat d'une étoile est le gradient de température qui y règne, et non pas l'existence des réactions nucléaires. Ces dernières ne font qu'entretenir le gradient en question sur de très longues durées, mais d'autres sources d'énergie peuvent provisoirement jouer ce rôle, comme on le verra au dernier chapitre.

Définition : La fonction source est définie comme

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$$

Pour une atmosphère plan-parallèle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_\nu &= I_\nu(z, \theta), & \rho &= \rho(z) \\ \kappa &= \kappa(z) \\ j_\nu &= j_\nu(z) \end{aligned}$$

Cas ETL : $S_\nu = B_\nu(T)$. On a la profondeur optique $d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho dz$ (la hauteur z a ici remplacé le rayon r) et

$$ds = \frac{dz}{\cos \theta} = -\frac{d\tau_\nu}{\kappa_\nu \rho} \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{dI}{dz} \cos \theta = -\frac{dI}{d\tau_\nu} \cos \theta \kappa_\nu \rho$$

ou encore

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \quad (3.5)$$

équation différentielle du 1^{er} ordre.

3.2 Intensité émergente (problème de Milne)

Solution de l'équation différentielle :

– On part de l'équation réduite

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI}{d\tau} &= I \quad (\text{avec } \mu = \cos \theta) \\ \Rightarrow \frac{dI}{I} &= \frac{d\tau}{\mu} \Rightarrow I = C \cdot e^{\tau/\mu} \end{aligned}$$

– Méthode de la variation des constantes : on considère $C = C(\tau)$ et on substitue dans l'équation complète $\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S$. On obtient alors après un peu d'algèbre :

$$I(\tau, \mu) = I(\tau_1, \mu) e^{-\frac{\tau_1 - \tau}{\mu}} + \int_{\tau}^{\tau_1} S(t, \mu) e^{-\frac{t - \tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \quad (3.6)$$

Notons que $0 \leq \mu \leq 1$. Le premier terme représente le rayonnement incident à la profondeur τ_1 , tandis que le second représente la contribution de l'émission le long du trajet entre τ_1 et τ , avec l'atténuation liée à la profondeur optique $t - \tau$.

Milieu semi-infini : $\tau_1 \rightarrow \infty$

$$I(\tau, \mu) = \int_{\tau}^{\infty} S(t, \mu) e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \quad (3.7)$$

Intensité émergente :

$$I(0, \mu) = \int_0^{\infty} S(t, \mu) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \quad (3.8)$$

C'est la somme des contributions des fonctions source, atténuées par le facteur d'absorption.

3.3 Opacité moyenne

On avait vu que, dans le cas isotrope (ou quasi tel),

$$U = \frac{4\pi}{c} I$$

(équation 2.23) et

$$P_{rad} = \frac{1}{3} U = \frac{4\pi}{3c} I$$

Corps noir $\Rightarrow I = B(T) \Rightarrow P_{rad} = \frac{4\pi}{3c} B(T)$. Prenons le gradient de la pression :

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4\pi}{3c} \frac{dB}{dr}$$

mais on avait aussi

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c} F$$

La question est : que vaut κ ? Dans le cas monochromatique, on peut écrire

$$\frac{4\pi}{3c} \frac{dB_{\lambda}}{dr} = -\frac{\kappa_{\lambda}\rho}{c} F_{\lambda}$$

Comme $F = \int_0^{\infty} F_{\lambda} d\lambda$ et $\frac{dB_{\lambda}}{dr} = \frac{dB_{\lambda}}{dT} \frac{dT}{dr}$, on peut écrire le flux total comme étant :

$$F = \frac{4\pi}{3\rho} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\lambda}} \frac{dB_{\lambda}}{dT} \frac{dT}{dr} d\lambda \equiv \frac{4\pi}{3\rho} \frac{1}{\kappa} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dr}$$

par définition de κ , avec $B = \int_0^{\infty} B_{\lambda} d\lambda$.

Par conséquent, l'opacité moyenne de Rosseland est donnée par :

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{dB/dT} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\lambda} \frac{dB_\lambda}{dT} d\lambda \quad (3.9)$$

Il importe de remarquer qu'ici, $\kappa \neq \int_0^\infty \kappa_\lambda d\lambda$

3.4 Atmosphère grise et assombrissement centre-bord

Le but de cette section est d'obtenir une solution simple de l'équation de transfert, et d'en déduire une conséquence de grande importance astrophysique, à savoir l'assombrissement centre-bord du disque apparent solaire et des disques stellaires en général.

3.4.1 Structure de l'atmosphère grise :

Partons des hypothèses suivantes :

1. Atmosphère plan-parallèle
2. ETL $\rightarrow S_\nu = B_\nu(T)$
3. Equilibre radiatif : le **flux** d'énergie rayonnante est **constant**
4. $\kappa_\nu \sim \kappa = \text{constante} \forall \nu \in \text{visible} \leftrightarrow \text{atmosphère grise}$

On avait

$$\frac{dP_{rad}}{dz} = -\frac{\kappa\rho F}{c} \implies \frac{dP_{rad}}{d\tau} = \frac{F}{c}$$

car $d\tau = -\kappa\rho dz$

$$P_{rad}(\tau) = \frac{F}{c} \tau + P_{rad}(0)$$

or $P_{rad} = \frac{1}{3} aT^4$ et $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$

$$\implies \frac{1}{3} aT^4 = \frac{a}{4} T_{\text{eff}}^4 \cdot \tau + P_{rad}(0)$$

où $a = 4\sigma/c$. En divisant par $a/3$ il vient :

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{cP_{rad}(0)}{F} \right)$$

car $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$. Pour aller plus loin, introduisons...

L'approximation d'Eddington : En surface, l'anisotropie se réduit à :

$$\begin{aligned} I = I_1 &= 0 \text{ pour } \mu < 0 \text{ (flux entrant)} \\ I = I_2 &= \text{constante pour } \mu > 0 \text{ (flux sortant)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(Il s'agit en réalité d'un cas particulier de l'approximation d'Eddington proprement dite, laquelle postule un flux entrant constant et un flux sortant constant également, mais avec une autre valeur).

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= 2\pi \int_0^1 I \mu \, d\mu = 2\pi I_2 \int_0^1 \mu \, d\mu = \pi I_2 \\ P_{rad} &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I \mu^2 \, d\mu = \frac{2\pi}{c} I_2 \int_0^1 \mu^2 \, d\mu = \frac{2\pi}{c} \frac{I_2}{3} = \frac{2}{3c} F \\ T^4 &= \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} T_{\text{eff}}^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

La dernière équation décrit la structure de l'atmosphère grise.

3.4.2 Assombrissement centre-bord :

L'intensité émergente s'écrit (équation 3.8) :

$$I(0, \mu) = \int_0^\infty S(t, \mu) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu}$$

$$\text{ETL} \Rightarrow S = B = \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{3}{4\pi} F \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

car $F = \sigma T_{\text{eff}}^4 = \text{constante}$

$$\Rightarrow I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \left[\mu \int_0^\infty \frac{t}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} + \frac{2}{3} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \right]$$

La première intégrale peut être intégrée par parties et vaut 1 ; la seconde vaut aussi 1. On obtient donc

$$I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \quad (3.12)$$

Or l'intensité au centre du disque stellaire vaut $I(0, 1) = \frac{5F}{4\pi}$, d'où :

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{3}{5} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) = 0.4 + 0.6 \mu \quad (3.13)$$

Dans le cas général, la loi linéaire d'assombrissement centre-bord s'écrit :

$$I(\mu) = I(1) [1 - x + x \mu] \quad (3.14)$$

où x est le coefficient d'assombrissement centre-bord; on a toujours $0 < x < 1$, avec $x = x(\lambda)$. Cette expression simple est encore utilisée assez fréquemment, mais on tend à lui préférer des expressions plus réalistes à deux coefficients, avec un terme en $\sqrt{\mu}$ ou en $\log \mu$.

N.B. : Lorsqu'on détermine des diamètres stellaires, on est toujours confronté au problème de l'assombrissement centre-bord.

3.5 Transfert d'énergie par convection

Ce mode de transfert ne concerne pas seulement les atmosphères stellaires, mais aussi l'intérieur profond des étoiles, que ce soit dans l'enveloppe ou dans le coeur.

Imaginons une cellule de gaz, suffisamment petite pour que la température, la pression et la densité puissent y être considérées comme uniformes, et située à distance r_0 du centre de l'étoile (Fig. 3.3). Il y règne les condi-

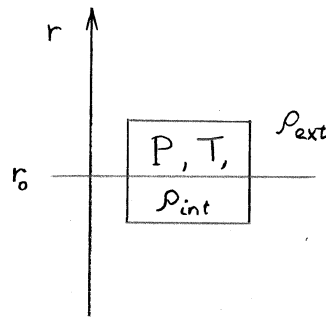


FIG. 3.3 – Cellule convective

tions T, P, ρ_{int} . Imaginons qu'une petite perturbation mette cette cellule en

mouvement : après cette chiquenaude, l'équation du mouvement sera :

$$\rho_{int} \frac{d^2 r}{dt^2} + g(\rho_{int} - \rho_{ext}) = 0 \quad (3.15)$$

ρ_{ext} étant la densité ambiante à l'extérieur de la cellule. Développons ρ_{int} et ρ_{ext} en série au voisinage de l'équilibre, en admettant $\rho_{int}(r_0) = \rho_{ext}(r_0)$:

$$\begin{aligned} \rho_{int}(r) &= \rho_{int}(r_0) + \frac{d\rho_{int}}{dr}(r - r_0) \\ \rho_{ext}(r) &= \rho_{ext}(r_0) + \frac{d\rho_{ext}}{dr}(r - r_0) \\ \Rightarrow \rho_{int} \frac{d^2 r}{dt^2} + g \left(\frac{d\rho_{int}}{dr} - \frac{d\rho_{ext}}{dr} \right) (r - r_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

C'est l'équation du mouvement harmonique sans frottement, dont la solution est $r - r_0 = Ae^{iNt}$, avec N tel que

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho_{int}}{dr} - \frac{d\rho_{ext}}{dr} \right)$$

N est la **fréquence de Brunt-Väisälä**.

Pour qu'il y ait stabilité, il faut qu'il y ait oscillations et non divergence exponentielle, autrement dit que N soit réelle, ou que $N^2 > 0 \Rightarrow$

$$\frac{d\rho_{int}}{dr} > \frac{d\rho_{ext}}{dr} \text{ ou } -\frac{d\rho_{int}}{dr} < -\frac{d\rho_{ext}}{dr}$$

Si $\rho_{int}(r) > \rho_{ext}(r)$ (tandis que $\rho_{int}(r_0) = \rho_{ext}(r_0)$), alors la force extérieure tend à ramener l'élément de volume à sa position d'équilibre (Fig. 3.4). Par contre, si $\rho_{int}(r) < \rho_{ext}(r)$ ou, de manière équivalente $\frac{d\rho_{int}}{dr} < \frac{d\rho_{ext}}{dr}$, alors l'élément de volume **continuera à monter** et N sera imaginaire puisque $N^2 < 0$

Convection adiabatique : Soit une cellule convective, assez petite pour être décrite par P, T, ρ mais assez grande pour ne pas échanger de quantité significative de chaleur avec l'extérieur. Le premier principe de la thermodynamique $\delta Q \checkmark = 0 = dU + PdV$ et la loi des gaz parfaits $PV = RT$ impliquent

$$P \cdot V^\gamma = \text{constante}$$

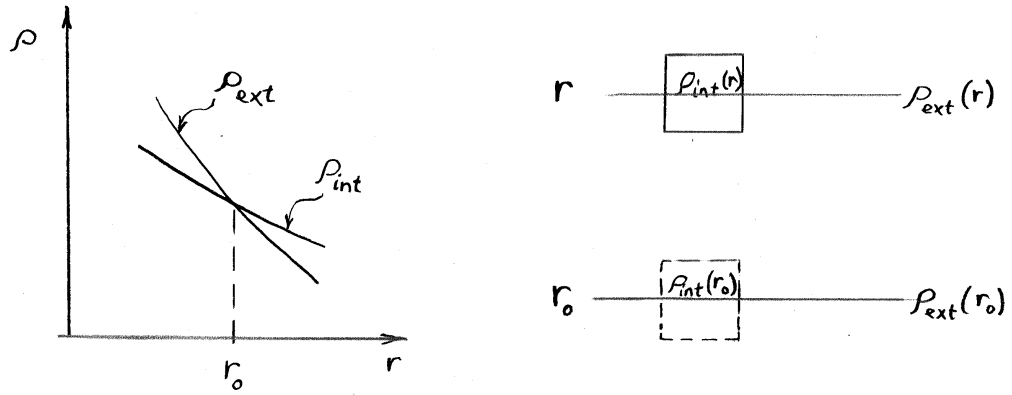


FIG. 3.4 – **Gauche** : gradient de ρ pour la cellule et pour son entourage, dans un cas de stabilité. **Droite** : Situation dans le milieu stellaire.

avec $\gamma = C_p/C_V$. Donc

$$P_{int} \propto \rho_{int}^\gamma \iff \rho_{int} \propto P_{int}^{\frac{1}{\gamma}}$$

puisque $\rho = m/V \Rightarrow V \propto \rho^{-1}$ où m est la masse contenue dans le volume V . Prenons le gradient selon la direction radiale, et admettons $P_{int} = P_{ext} = P$:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{int}}{dr} &\propto \frac{1}{\gamma} P^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{int}}{P} \frac{dP}{dr} \\ \frac{d\rho_{int}}{\rho_{int}} &= \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} \end{aligned}$$

Si l'on assimile P à la pression intérieure, alors la condition de stabilité $\frac{d\rho_{int}}{dr} > \frac{d\rho_{ext}}{dr}$ implique

$$\frac{d\rho_{int}}{\rho_{int}} > \frac{d\rho_{ext}}{\rho_{ext}} \implies \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} > \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.17)$$

où $\rho = \rho_{ext}$. Pour un gaz parfait, $P \propto \rho T$, d'où

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}$$

Mais 3.17 implique

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}$$

d'où

$$-\frac{dT}{dr} < \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \left(-\frac{dP}{dr} \right) \quad (3.18)$$

condition de stabilité vis-à-vis de la convection. On peut aussi écrire

$$\nabla \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P} < \frac{\gamma - 1}{\gamma} \equiv \nabla_{ad} \quad (3.19)$$

Ce critère est aussi appelé **critère de Schwarzschild**.

3.6 Calcul du flux sortant (radiatif)

Dans le cadre de l'hypothèse ETL, on donne ici l'expression du flux sortant, et non plus seulement de l'intensité sortante.

On avait vu que

$$F_\lambda = 2\pi \int_0^1 \mu I_\lambda d\mu$$

avec $\mu = \cos \theta$ pour *tout* niveau de profondeur dans l'étoile. On désire calculer ce qui est observable, à savoir le flux à la surface de l'étoile. Posons $F'_\lambda = \pi F'_\lambda$ qui permet de s'affranchir du facteur π :

$$F'_\lambda(0) = 2 \int_0^1 \mu I_\lambda(0, \mu) d\mu$$

Soit une atmosphère en ETL ; l'intensité émergente est alors :

$$\begin{aligned} I_\lambda(0, \mu) &= \int_0^\infty B_\lambda(T) e^{-\tau_\lambda/\mu} \frac{d\tau_\lambda}{\mu} \\ \Rightarrow F'_\lambda(0) &= 2 \int_0^1 \int_0^\infty B_\lambda(\tau_\lambda) e^{-\tau_\lambda/\mu} d\tau_\lambda d\mu \quad \text{car } T = T(\tau_\lambda) \\ F'_\lambda(0) &= 2 \int_0^\infty B_\lambda(\tau_\lambda) \int_0^1 e^{-\tau_\lambda/\mu} d\mu d\tau_\lambda \end{aligned} \quad (3.20)$$

(notons que λ est fixe). Dans la dernière équation, l'intégrale de l'exponentielle peut s'écrire sous la forme d'une *intégrale exponentielle d'ordre 2* à la

faveur du changement de variable $y = 1/\mu$, $dy = -d\mu/\mu^2$. La forme générale d'une intégrale exponentielle d'ordre n est :

$$E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xy} y^{-n} dy \quad (3.21)$$

Le flux à la surface s'écrit donc

$$F'_\lambda(0) = 2 \int_0^\infty B_\lambda(\tau_\lambda) E_2(\tau_\lambda) d\tau_\lambda \quad (3.22)$$

C'est la somme des fonctions sources à chaque profondeur, multipliée par le coefficient d'extinction $E_2(\tau_\lambda)$.

Le flux dépend donc de :

- $T(\tau_\lambda)$ et donc du gradient de T
- κ_λ puisque $\tau_\lambda = -\int_0^x \kappa_\lambda \rho dx$

3.7 Calcul d'une atmosphère stellaire

Le but est d'obtenir la structure de l'atmosphère, c'est-à-dire les fonctions $T(\tau)$, $P(\tau)$, $\rho(\tau)$ etc.

Les moyens à disposition consistent en deux équations, quelques hypothèses et quelques contraintes issues de l'observation. Les deux équations à résoudre sont :

- L'équation d'équilibre hydrostatique $\frac{dP}{dr} = -g\rho \rightarrow P(\tau)$
- L'équation de transfert $\frac{dT}{dr} = \dots \rightarrow T(\tau)$

Notons que l'on peut aussi écrire L'équation hydrostatique sous la forme

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{-g\rho dr}{-\kappa\rho dr} = \frac{g}{\kappa}$$

En utilisant encore le critère de convection, on obtient le *flux sortant* = $F_{rad} + F_{conv}$. Pour relier pression, densité et température, on dispose de l'équation d'état (celle des gaz parfaits dans le cas le plus simple) $P = \frac{R}{\mu} \rho T$ mais il faut connaître μ , le poids moléculaire moyen. Celui-ci dépend de l'état d'ionisation du gaz ; nous en verrons la définition au chapitre 6.

Notons qu'il n'y a **pas** de production d'énergie dans l'atmosphère. Les hypothèses pertinentes en général adoptées sont :

- Atmosphère plan-parallèle

- Equilibre radiatif
- ETL

L'absence de production d'énergie et les deux premières hypothèses permettent de dire que le flux émergent est **constant**, et finalement celui-ci s'écrit :

$$F^+(z) = \int_0^\infty \int_{\omega^+} I_\lambda \cos \theta \, d\omega \, d\lambda = \sigma T_{\text{eff}}^4 = \text{constante}$$

Les contraintes observationnelles sont :

- $F(\lambda)$ observé (dans le cas des étoiles)
- $I(\lambda, \theta)$ observé (dans le cas du Soleil)

En première approximation, on peut partir de la structure d'une atmosphère grise $T^4 = \frac{1}{2} T_{\text{eff}}^4 (1 + \frac{3}{2}\tau)$. Mais pour pouvoir aller plus loin, il faut savoir calculer $\kappa(\lambda)$.

Chapitre 4

Intéractions rayonnement-matière dans les intérieurs stellaires

4.1 Introduction

Ce chapitre traite des mécanismes d'émission et d'absorption dans les intérieurs stellaires, dont la connaissance est essentielle au calcul du coefficient d'absorption, en particulier, et donc au calcul de la structure des atmosphères stellaires.

Le rayonnement peut être émis, absorbé ou diffusé. L'absorption d'un photon peut se faire soit par photoexcitation, par photoionisation ou par transitions hyperboliques (transition respectivement bound-bound – b-b – bound-free – b-f – et free-free – f-f – en anglais). Le premier mécanisme produit un spectre de raies, tandis que les deux autres affectent le spectres continu. Rappelons que les transitions hyperboliques consistent en l'absorption d'un photon par un électron libre évoluant au voisinage d'un ion positif sur une orbite hyperbolique.

4.2 Lois de Boltzmann et Saha

4.2.1 Généralités

En général, le nombre de particules N_r ayant une énergie E_r s'écrit :

$$N_r = \frac{g_r}{e^{-\psi + \frac{E_r}{kT}} + \alpha}$$

avec $\alpha = 0, \pm 1$ et $\psi = \frac{\mu}{kT}$, μ étant le potentiel chimique. La valeur de α définit le type de statistique :

1. Boltzman : $\alpha = 0$
2. Bose–Einstein : $\alpha = -1$ (particules de spin entier ou nul : bosons)
3. Fermi–Dirac : $\alpha = +1$ (particules de spin demi-entier : fermions)

$\psi \equiv$ paramètre de dégénérescence (apparaît comme un multiplicateur de Lagrange dans l'établissement de la statistique). Pour $\psi \ll -1$, $e^{-\psi}$ est très grand et les statistiques de Bose–Einstein et de Fermi–Dirac tendent vers celle de Boltzmann, suffisante pour les milieux peu denses, en particulier les atmosphères stellaires (et même les cœurs des étoiles de séquence principale).

4.2.2 Loi de Boltzmann

Soit un gaz d'atomes, en nombre N et excités à des niveau d'énergie E_n . Leur répartition selon les états d'énergie n (de leur électron périphérique, par exemple) est fonction de la température T (supposée uniforme ici). Dans une configuration d'équilibre et pour un gaz non dégénéré, cette répartition est donnée par la statistique de Boltzmann :

$$N_n = g_n e^{\psi} e^{-E_n/kT} \quad (4.1)$$

où g_n est le poids statistique du niveau n et $N = \sum_n N_n$. Le peuplement relatif de deux niveaux a et b est donné par

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{g_a}{g_b} e^{-\chi_{ab}/kT} \quad (4.2)$$

avec $\chi_{ab} = E_a - E_b$. Soit un niveau s quelconque, tel que $\chi_s = E_s - E_0$ et $E_0 \equiv$ niveau fondamental. Alors,

$$\frac{N_s}{N} = \frac{g_s e^{-\chi_s/kT}}{U(T)} \quad (4.3)$$

avec la **fonction de partition**

$$U(T) \equiv \sum_n g_n e^{-\chi_n/kT}$$

4.2.3 Ionisation : loi de Saha

Si le photon incident a une énergie supérieure au potentiel d'ionisation de l'atome, il provoquera l'ionisation de celui-ci. Et l'ionisation sera d'autant plus facile si l'atome est déjà excité. La formule de Saha dit comment se répartissent les atomes et ions d'un élément donné entre les différents états d'ionisation successifs.

On a la réaction atome neutre \rightleftharpoons ion + e^- . Avant d'établir la formule de Saha, précisons la notation :

- atomes neutres à l'état fondamental : N_{00} , poids statistique g_{00}
- atomes $1 \times$ ionisés à l'état fondamental : N_{01} , poids statistique g_{01}
- électrons : N_e , poids statistique g_e
- atomes r fois ionisés (tous états d'excitation) : N_r , fonction de partition U_r

Les étapes vers la formule de Saha sont alors celles-ci :

1. Poids statistique du système (ion+ e^-) = $g_e \cdot g_{01}$
2. Energie du système (ion+ e^-) : $E = \chi_0 + \frac{p^2}{2m_e}$ où χ_0 est le potentiel d'ionisation à partir de l'état fondamental, p est l'impulsion de l'électron et m_e est sa masse.
3. Appliquons la loi de Boltzmann :

$$\frac{N_{01}}{N_{00}} = \frac{g_e \cdot g_{01}}{g_{00}} e^{-\left(\chi_0 + \frac{p^2}{2m_e}\right)/kT}$$

4. Que vaut g_e ? on a deux états de spin, donc

$$g_e = \frac{2d^3p d^3q}{h^3} = \frac{2dV \cdot 4\pi p^2 dp}{h^3}$$

où dV est le volume occupé par un e^-

5. N_e étant la densité électronique, on peut écrire $dV = 1/N_e(p)$,

$$\implies \frac{N_{01}}{N_{00}} = \frac{g_{01}}{g_{00}} \frac{8\pi}{N_e(p)h^3} e^{-\left(\chi_0 + \frac{p^2}{2m_e}\right)/kT} p^2 dp$$

6. Il faut maintenant intégrer sur toutes les impulsions des électrons :

$$\frac{N_{01}N_e}{N_{00}} = \frac{N_{01}}{N_{00}} \int_0^\infty N_e(p) dp = \frac{g_{01}}{g_{00}} \frac{8\pi}{h^3} e^{-\chi_0/kT} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2m_e kT}} p^2 dp$$

La dernière intégrale vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4} (2m_e kT)^{3/2}$, car $\int_0^\infty t^2 e^{-at^2} dt = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ avec $a = \frac{1}{2m_e kT}$.

On a donc

$$\frac{N_{01} N_e}{N_{00}} = \frac{g_{01}}{g_{00}} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_0/kT} \quad (4.4)$$

ou bien, pour deux états successifs $r, r+1$ d'ionisation :

$$\frac{N_{0r+1} N_e}{N_{0r}} = \frac{g_{0r+1}}{g_{0r}} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_r/kT} \quad (4.5)$$

avec $\chi_r =$ potentiel d'ionisation de l'état r à $r+1$.

7. Considérons l'état **d'excitation** s et l'énergie χ_{sr} d'excitation de l'état d'excitation s et d'ionisation r à partir du niveau fondamental du ion. Alors $(\chi_r - \chi_{sr})$ est le potentiel d'ionisation nécessaire à amener un ion à l'état sr à un ion à l'état fondamental $0r+1$. Ainsi, par analogie avec 4.5, on aura :

$$\frac{N_{0r+1} N_e}{N_{sr}} = \frac{g_{0r+1}}{g_{sr}} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(\chi_r - \chi_{sr})/kT} \quad (4.6)$$

formule de **Saha-Boltzmann**.

8. Mais on voudrait connaître les populations relatives de deux états successifs d'ionisation, indépendamment des états d'excitation. Pour cela, rappelons que

$$\frac{N_s}{N} = \frac{g_s}{U(T)} e^{-\chi_s/kT} \rightarrow \frac{N_{sr}}{N_r} = \frac{g_{sr}}{U_r(T)} e^{-\chi_s/kT}$$

et

$$\frac{N_{0r+1}}{N_{r+1}} = \frac{g_{0r+1}}{U_{r+1}(T)} e^{-\chi_{0r}/kT}$$

Or l'exponentielle vaut 1, puisque $\chi_{0r} = 0$, donc

$$\frac{N_{r+1} N_e}{N_r} = \frac{U_{r+1}}{U_r} 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_r/kT} \quad (4.7)$$

et introduisant $P_e = N_e kT$, on a l'équation de Saha sous sa forme la plus fréquente :

$$\frac{N_{r+1} P_e}{N_r} = 2 \frac{U_{r+1}}{U_r} \left(\frac{2\pi m_e}{h^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} e^{-\chi_r/kT} \quad (4.8)$$

Sous forme logarithmique, avec χ en eV, P_e en dyne cm^{-2} et N en cm^{-3} :

$$\log \left(\frac{N_{r+1}}{N_r} P_e \right) = -\chi_r \frac{5040}{T} + \frac{5}{2} \log T - 0.48 + \log \left(2 \frac{U_{r+1}}{U_r} \right) \quad (4.9)$$

L'ionisation est favorisée par $T \nearrow$, ou par $P_e \searrow$. En particulier, à T égale, l'ionisation est plus prononcée dans les supergéantes que dans les naines.

4.3 Absorption par un oscillateur harmonique

Que vaut κ_ν pour les raies spectrales ? Le modèle le plus simple qui puisse décrire l'absorption ou l'émission de rayonnement par un atome est celui de l'oscillateur harmonique. On considère un atome constitué d'un noyau et d'un électron, qui oscille sous l'effet d'une onde plane représentée par un champ électrique oscillant. Cette section a pour objet d'établir le profil d'une raie selon ce modèle.

4.3.1 Court rappel d'électrodynamique

Milieu diélectrique soumis à un champ extérieur \vec{E}_0

- Chaque atome peut être considéré comme un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = e\vec{z}$ (Fig. 4.1) où e est la charge de l'électron et \vec{z} le déplacement de l'électron par rapport au noyau.

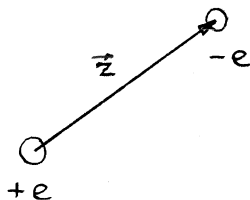


FIG. 4.1 –

- Polarisation globale = somme des moments dans l'unité de volume

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

où N est la densité numérique (la lettre n est réservée à l'indice de réfraction).

Le champ \vec{E} dans le milieu est $\neq \vec{E}_0$ à cause de l'alignement des dipôles, et on a :

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} \text{ système SI, } \chi \equiv \text{susceptibilité électrique}$$

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \text{ système de Gauss}$$

Le champ \vec{E}' dû à la polarisation vaut

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \text{ (SI)} \\ &= -4\pi \vec{P} \text{ (Gauss)} \\ \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' &= \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \text{ (SI)} \\ &= \vec{D} - 4\pi \vec{P} \text{ (Gauss)} \end{aligned}$$

où $\vec{D} \equiv$ champ de "déplacement" ou d'induction. On introduit encore la **constante diélectrique relative** ε , définie par $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ (SI) ou $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (Gauss) :

$$\begin{aligned} \vec{D} &\equiv \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} (1 + \chi) \Rightarrow \varepsilon = 1 + \chi \text{ (SI)} \\ &\equiv \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{E} (1 + 4\pi \chi) \Rightarrow \varepsilon = 1 + 4\pi \chi \text{ (Gauss)} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \vec{p} = \frac{\vec{P}}{N} &= \frac{\chi \vec{E}}{N} = e \vec{z} \Rightarrow \\ \chi &= \frac{N e z}{E} \quad (\vec{E} \parallel \vec{z}) \text{ (Gauss)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ondes électromagnétiques

- Onde électrique plane de fréquence ν , se propageant à vitesse v :

$$\vec{E}_\nu = \vec{E}_\nu^0 e^{2\pi i \nu (t - \frac{x}{v})}$$

On a pour un milieu d'indice de réfraction n , $v = c/n$ avec $n^2 = \varepsilon$:

- Milieu diélectrique : n réel, intensité constante, pas d'absorption
- Milieu conducteur : n complexe \rightarrow onde amortie. On remplace n par $\tilde{n} = n - ik$. Ainsi,

$$\vec{E}_\nu = \underbrace{\vec{E}_\nu^0 e^{2\pi i \nu (t - \frac{x}{c} n)}}_{\text{onde}} \cdot \underbrace{e^{-2\pi \nu \frac{x}{c} k}}_{\text{terme d'absorption}} \quad (4.11)$$

- Le flux d'énergie (donné par le vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$) est proportionnel au **carré de l'amplitude** :

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-4\pi\nu\frac{kx}{c}} \quad (4.12)$$

Or, on avait dans le cas macroscopique $I_\nu = I_\nu^0 e^{-\kappa_\nu\rho x}$. On a donc par identification :

$$\kappa_\nu\rho = \frac{4\pi\nu k}{c} = \frac{2\omega k}{c} \quad (4.13)$$

avec $\omega = 2\pi\nu$

4.3.2 Absorption par un oscillateur harmonique

L'électron oscille autour du noyau : oscillation forcée avec absorption. L'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{z} = \underbrace{-m\omega_0^2 z}_{\vec{F} \text{ de rappel}} \underbrace{-m\gamma\dot{z}}_{\text{de freinage}} \underbrace{+ eE_0 e^{i\omega t}}_{\text{extérieure}} \quad (4.14)$$

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t} \quad (4.15)$$

$\omega_0 \equiv$ fréquence propre.

On cherche une solution stationnaire du type $z = z_0 e^{i\omega t}$ qui, substituée dans 4.15, donne

$$z_0 = \frac{e}{m} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (4.16)$$

Or on avait

$$\chi = \frac{Ne z_0}{E_0} \quad (\text{système de Gauss})$$

donc

$$\chi = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{4\pi^2 (\nu_0^2 - \nu^2 + i\frac{\nu}{2\pi}\gamma)} \quad (4.17)$$

$$\varepsilon = \tilde{n}^2 = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{Ne^2}{\pi m (\nu_0^2 - \nu^2 + i\frac{\nu}{2\pi}\gamma)} \quad (4.18)$$

Il s'agit maintenant d'isoler la composante d'absorption de l'indice de réfraction complexe, le but étant de trouver une expression pour le coefficient

d'absorption dû à la raie. On sépare d'abord les parties réelle et imaginaire de ε , sachant que

$$\varepsilon = \tilde{n}^2 = (n - ik)^2 = n^2 - k^2 - 2ink$$

et en multipliant la fraction par le complexe conjugué du dénominateur, ce qui donne :

$$n^2 - k^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\pi m} \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \frac{\nu^2}{4\pi^2} \gamma^2} \quad (4.19)$$

$$nk = \frac{Ne^2}{\pi m} \frac{\frac{\nu}{4\pi} \gamma}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \frac{\nu^2}{4\pi^2} \gamma^2} \quad (4.20)$$

Recourons maintenant à l'**hypothèse d'un gaz peu dense** : $k \ll 1$ et $n \simeq 1$. On a alors $nk \sim k$ et $n^2 - k^2 \simeq n^2$. On a aussi $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \simeq 2(n-1)$, ce qui donne en fin de compte :

$$n - 1 \simeq \frac{Ne^2}{2\pi m} \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \nu^2} \quad (4.21)$$

$$k \simeq \frac{Ne^2}{2\pi m} \frac{\nu \frac{\gamma}{2\pi}}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \nu^2} \quad (4.22)$$

On s'intéresse à présent à ce qui se passe **près de la résonance** : $\nu_0^2 - \nu^2 = (\nu_0 - \nu)(\nu_0 + \nu) \simeq 2\nu(\nu_0 - \nu)$. On obtient après quelques manipulations :

$$n - 1 \simeq \frac{Ne^2}{4\pi m\nu} \frac{(\nu_0 - \nu)}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2} \quad (4.23)$$

$$k \simeq \frac{Ne^2}{8\pi m\nu} \frac{\frac{\gamma}{2\pi}}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2} \quad (4.24)$$

Sachant que $\kappa_{\nu\rho} = 4\pi\nu k/c$, on a donc

$$\kappa_{\nu\rho} \simeq \frac{Ne^2}{2mc} \frac{\frac{\gamma}{2\pi}}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2} = \frac{\pi e^2 N}{mc} \frac{\gamma}{4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (4.25)$$

On trouve dans la littérature l'une ou l'autre des deux expressions ci-dessus. Ainsi, l'absorption est proportionnelle au nombre d'oscillateurs N , et atteint un maximum en $\nu = \nu_0$, c'est-à-dire à la fréquence propre du système.

Largeur à mi-hauteur : Elle est fixée par la condition $4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 = (\gamma/2)^2$, soit

$$\Delta\nu = 2|\nu_{1/2} - \nu_0| = \frac{\gamma}{2\pi} \quad (4.26)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\nu}{\nu_0^2} \cdot c = \frac{c\gamma}{2\pi\nu_0^2} = \frac{2\pi c\gamma}{\omega_0^2} \quad (4.27)$$

avec $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. On montrera plus loin que $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$, ce qui permet de donner une valeur numérique à la largeur de la raie :

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi e^2}{3mc^2} \simeq 10^{-12} \text{ cm} = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ nm} \quad (4.28)$$

Il s'agit de ce qu'on appelle la **largeur naturelle** de la raie : c'est une propriété inhérente aux raies spectrales. La largeur naturelle est si faible qu'elle reste en général inobservable avec les spectrographes astronomiques habituels.

Exemple : Le spectrographe HARPS, installé au télescope de 3.60 m de l'ESO à La Silla et destiné entre autres à la chasse aux exoplanètes, a un *pouvoir résolvant* $R \equiv \lambda/\Delta\lambda_{instr} \sim 110\,000 \Rightarrow$ à 5000 Å, $\Delta\lambda_{instr} \simeq 0.045$ Å, donc $\Delta\lambda_{instr} \sim 380 \Delta\lambda$! Par conséquent, même des spectrographes dont le pouvoir résolvant est quatre ou cinq fois supérieur, comme les spectrographes solaires, sont encore loin de résoudre la largeur naturelle.

Interprétation quantique : Partant du principe d'incertitude de Heisenberg $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar \Rightarrow \Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}$, où Δt est la durée de vie du niveau d'énergie E_0 : l'énergie du niveau est "en fait" comprise entre $E_0 - \Delta t/2$ et $E_0 + \Delta t/2$, et c'est cela qui produit la largeur naturelle de la raie, d'autant plus que deux niveaux sont impliqués dans sa formation.

Expression de γ : quelle est sa "valeur classique" ?

On considère le dipôle **sans force extérieure** :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $x = Ae^{i\alpha t}$, on trouve $\alpha \simeq \omega_0 + \frac{i\gamma}{2}$ car $4\omega_0^2 \gg \gamma^2$. Donc

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2} + i\omega_0 t}$$

Or, l'énergie émise par le rayonnement de freinage est donné par (voir cours d'électrodynamique, ou bien par ex. le *Précis de physique expérimentale et théorique*, J. Rossel, éd. du Griffon, p. 10) :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 \ddot{x}^2}{c^3} \quad (4.29)$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right) x \simeq i\omega_0 x_0 e^{i\omega_0 t - \gamma t/2} \\ \ddot{x} &= \left(-\omega_0^2 - i\gamma\omega_0 + \frac{\gamma^2}{4}\right) x_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \end{aligned}$$

et la partie réelle de \ddot{x} est

$$Re(\ddot{x}) = x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\left(-\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right) \cos \omega_0 t + \gamma\omega_0 \sin \omega_0 t \right]$$

Comme $\gamma \ll \omega_0$, on a à peu près, après avoir élevé au carré :

$$Re(\ddot{x})^2 = x_0^2 e^{-\gamma t} \cdot \omega_0^4 \cos^2 \omega_0 t$$

et la moyenne sur un cycle devient

$$\overline{Re(\ddot{x})^2} = x_0^2 e^{-\gamma t} \cdot \frac{1}{2} \omega_0^4$$

d'où

$$\frac{d\overline{U}}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{e^2 \omega_0^4}{c^3} x_0^2 e^{-\gamma t} \quad (4.30)$$

Comme $U = E_{cin} + E_{pot}$ avec $\overline{E_{cin}} = \overline{E_{pot}}$, on a

$$\overline{U} = m_e \overline{\dot{x}^2} = m_e x_0^2 \omega_0^2 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \underbrace{\overline{\sin^2 \omega_0 t}}_{1/2}$$

On a donc

$$\overline{U} \propto e^{-\gamma t} \iff \frac{d\overline{U}}{dt} = -\gamma \overline{U} = -\gamma \frac{1}{2} m_e x_0^2 \omega_0^2 e^{-\gamma t}$$

qui, combiné avec 4.30, donne par identification :

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{m_e c^3} = \frac{8\pi^2 e^2}{3m_e c \lambda^2} = \frac{0.222}{\lambda^2 [\text{cm}]} \quad (4.31)$$

avec $[\gamma] = \text{s}^{-1}$.

Domaine optique : $\lambda \sim 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$

$$\Rightarrow \gamma \simeq \frac{0.222}{25 \cdot 10^{-10}} = 8.88 \cdot 10^7 \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$$

Par conséquent, la **durée de vie du niveau** excité vaut typiquement

$$\Delta t = \frac{1}{\gamma} \sim 10^{-8} \text{ s}$$

Coefficient d'absorption par atome

$$\alpha_\nu \equiv \frac{\kappa_\nu \rho}{N} \quad (4.32)$$

$[\alpha_\nu] = \text{cm}^2$; α_ν est une section efficace. Partant de 4.25 et posant $x = \nu - \nu_0$ et $a = \gamma/4\pi$, on obtient

$$\alpha_\nu = \frac{e^2}{m_e c} \frac{a}{x^2 + a^2}$$

et en intégrant sur les fréquences

$$\alpha = \int_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu d\nu = \frac{e^2}{m_e c} \int_{-\nu_0}^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx \simeq \frac{\pi e^2}{m_e c} \quad (4.33)$$

car $\int_{-\nu_0}^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx \sim \int_{-\infty}^{\infty} \dots = \arctan(x/a)|_0^{\infty} = \pi$. On voit que le résultat est une constante! Cela montre les limites du modèle, car on sait bien que la force de la raie dépend en réalité de l'atome et des niveaux considérés dans celui-ci.

Cas quantique :

- On remplace γ par $\Gamma_n + \Gamma_{n'}$, somme des largeurs des deux niveaux.
- N est remplacé par $N_{n'} \cdot f_{n'n}$ (cas d'une transition $n' \rightarrow n$), où $f_{n'n}$ est la **force d'oscillateur**.

Ainsi,

$$\kappa_\nu \rho = \frac{\pi e^2}{m c} N_{n'} f_{n'n} \frac{\Gamma_n + \Gamma_{n'}}{4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2 + \frac{(\Gamma_n + \Gamma_{n'})^2}{4}} \quad (4.34)$$

(théorie quantique de Weisskopf & Wigner).

Les forces d'oscillateur sont déterminées empiriquement en labo, ou estimées de manière semi-empiriques.

Pour l'hydrogène, il existe des expressions analytiques (formules de Kramers) :

$$H_\alpha : f_{23} = 0.641$$

$$H_\beta : f_{24} = 0.119$$

$$H_\gamma : f_{25} = 0.044$$

$$H_\delta : f_{26} = 0.021$$

$$H_\varepsilon : f_{27} = 0.012$$

Notons encore que ν_0 est à remplacer par $\frac{E_n - E_{n'}}{h}$, et qu'en général l'expression de $\kappa_{\nu\rho}$ ci-dessus doit encore être corrigé de l'émission induite (définie dans la section suivante).

4.4 Absorption, émission spontanée et émission induite

Nous allons préciser ici les caractéristiques de l'émission et de l'absorption d'un atome, en considérant un modèle d'atome à deux niveaux n' et n , et en définissant les taux de transitions, appelés aussi coefficients d'Einstein.

On distingue trois processus :

1. émission spontanée : taux de transitions $A(n, n')$
2. absorption : taux de transitions $B(n', n)$
3. émission induite ou stimulée : taux de transitions $B(n, n')$

Soit un atome à l'état excité n : il a une probabilité $A(n, n')dt$ de sauter spontanément au niveau n' durant le temps dt , en émettant un photon d'énergie $h\nu = E_n - E_{n'}$. Ainsi, le nombre de transitions $n \rightarrow n'$ par unité de volume vaut $N_n A(n, n')dt$. La valeur typique de A étant 10^8 à 10^9 s^{-1} , la durée de vie radiative de l'état n de l'atome est $\sim 10^{-8} \text{ s}$, pour autant que seule la transition $n \rightarrow n'$ soit possible.

Soit un atome **immergé dans un rayonnement de corps noir** isotrope de température T (Fig. 4.2) :

- Nombre de transitions *vers le haut* : $N_{n'} B(n', n) I_\nu$
- Nombre de transitions *vers le bas* : $N_n [A(n, n') + B(n, n') I_\nu]$
- Etat d'équilibre : nb. d'ascensions = nb. de descentes

$$\implies N_n [A(n, n') + B(n, n') I_\nu] = N_{n'} B(n', n) I_\nu \quad (4.35)$$

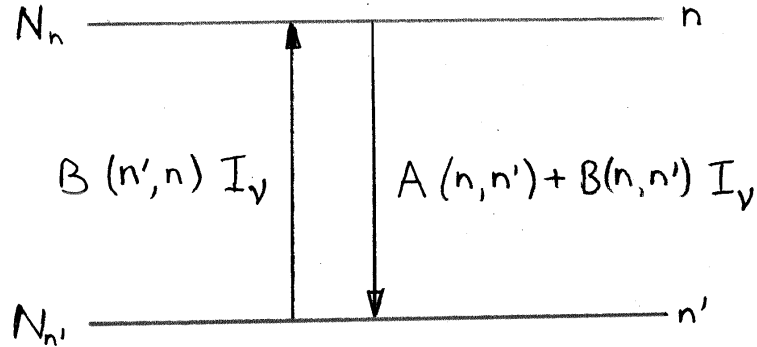


FIG. 4.2 – Modèle d'atome à deux niveaux

Comme nous sommes dans un corps noir, $I_\nu = B_\nu(T)$, et le rapport $N_n/N_{n'}$ est donné par la statistique de Boltzmann :

$$\frac{N_n}{N_{n'}} = \frac{g_n}{g_{n'}} e^{-\chi_{nn'}/kT}$$

avec $\chi_{nn'} = h\nu_{nn'} = E_n - E_{n'}$. Par ailleurs, on a aussi par 4.35 :

$$\frac{N_n}{N_{n'}} = \frac{B(n', n)I_\nu}{A(n, n') + B(n, n')I_\nu}$$

donc

$$\frac{g_n}{g_{n'}} = \frac{B(n', n)I_\nu}{A(n, n') + B(n, n')I_\nu} e^{\chi_{nn'}/kT}$$

et on se place à la résonance, c'est-à-dire à $\chi_{nn'} = h\nu_{nn'} = h\nu$, si bien que

$$\begin{aligned} \frac{g_n}{g_{n'}} A(n, n') &= B(n', n)I_\nu e^{h\nu/kT} - B(n, n') \frac{g_n}{g_{n'}} I_\nu \\ &= B(n', n)I_\nu \left[e^{h\nu/kT} - \frac{B(n, n')}{B(n', n)} \frac{g_n}{g_{n'}} \right] \\ &= \frac{2h\nu^3}{c^2} B(n', n) \frac{\left[e^{h\nu/kT} - \frac{B(n, n')}{B(n', n)} \frac{g_n}{g_{n'}} \right]}{e^{h\nu/kT} - 1} \end{aligned}$$

puisque $I_\nu = B_\nu$. Mais pour un atome donné et une transition donnée, **les coefficients A et B sont des constantes et doivent donc être indépendants de T** . Ainsi le membre de droite de la dernière équation doit-il

être indépendant de T , $\forall T$, et la seule manière de satisfaire à cette condition est d'égaliser numérateur et dénominateur. Par conséquent,

$$g_n B(n, n') = g_{n'} B(n', n) \quad (4.36)$$

$$\frac{g_n}{g_{n'}} A(n, n') = \frac{2h\nu^3}{c^2} B(n', n) \quad (4.37)$$

Notons que **si un seul coefficient d'Einstein est connu, alors les deux autres le sont aussi.**

Cas des hautes fréquences, $h\nu/kT \gg 1$: L'approximation de Wien donne $B_\nu(T) \simeq (2h\nu^3/c^2) e^{-h\nu/kT}$, donc

$$B(n, n') I_\nu = B(n, n') \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} = A(n, n') e^{-h\nu/kT} \ll A(n, n') \quad (4.38)$$

L'émission induite ou stimulée est négligeable par rapport à l'émission spontanée.

Cas des basses fréquences (IR et radio), $h\nu/kT \ll 1$: L'approximation de Rayleigh-Jeans s'applique ici, donnant $B_\nu(T) \simeq 2\nu^2 kT/c^2$ et donc

$$B(n, n') I_\nu = B(n, n') \frac{2\nu^2 kT}{c^2} = \frac{kT}{h\nu} B(n, n') \frac{2h\nu^3}{c^2} = \frac{kT}{h\nu} A(n, n') \gg A(n, n') \quad (4.39)$$

Donc, **l'émission stimulée domine en IR et radio !**

Exemple : MASER (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) OH/IR autour d'étoiles froides.

Expression de $\Gamma_n = 1/T_n$ dans la formule de Weisskopf-Wigner : On peut poser $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_{n'}$ dans 4.34. Soit un ensemble d'atomes – cette fois non plus des atomes idéaux à deux niveaux seulement, mais des atomes réels à niveaux multiples – excités au niveau n , qui se désexcitent *spontanément*, c'est-à-dire que l'on néglige l'absorption et l'émission stimulée :

$$\frac{dN_n}{dt} = -N_n \sum_{n'} A(n, n') = -N_n \Gamma_n \quad (4.40)$$

car si les électrons partent toujours du niveau n , ils ont la possibilité d'aboutir sur l'un ou l'autre de plusieurs niveaux n' possibles. On a donc **dans ce cas restreint** :

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= \sum_{n'} A(n, n') \\ N_n &= N_n^0 e^{-\Gamma_n t} \implies \Gamma_n = \frac{1}{T_n}\end{aligned}\quad (4.41)$$

où $T_n \equiv$ temps de vie moyen du niveau d'excitation n .

De manière plus générale, si la température est grande et la densité de rayonnement importante, on doit tenir compte de l'émission stimulée (que l'on appelle aussi l'absorption négative) et de l'absorption. Si on a $n' < n < n''$, alors :

$$\Gamma_n = \underbrace{\sum_{n'} A(n, n')}_{\text{émission spontanée}} + \underbrace{\sum_{n'} B(n, n') I(\nu_{nn'})}_{\text{émission stimulée}} + \underbrace{\sum_{n''} B(n, n'') I(\nu_{nn''})}_{\text{absorption}} \quad (4.42)$$

Notons que l'absorption inclut aussi la photoionisation.

4.5 Raies spectrales

4.5.1 Considérations qualitatives et intuitives

En moyenne, le nombre de transitions $n \rightarrow n'$ est évidemment égal au nombre de transitions $n' \rightarrow n$; autrement dit, tout photon absorbé finit par être réémis (spécialement dans une transition lié-lié). Pourquoi donc voit-on des raies? La réponse réside dans le fait que l'observateur définit une direction privilégiée et que l'absorption ne concerne que les photons venant dans cette direction, alors que l'émission (spontanée) se fait dans toutes les directions. Ceux qui sont réémis en direction de l'observateur ne sont pas assez nombreux pour compenser l'absorption.

Si l'on imagine un nuage de gaz éclairé par une source qui lui est distincte, un observateur qui examinera la source à travers lui verra des raies en **absorption**, parce qu'une source continue est présente derrière le nuage. Par contre, un observateur qui serait situé le long d'une ligne de visée perpendiculaire et examinera le nuage seul, verra des raies en **émission**, si le nuage est **optiquement mince**, car il n'y a aucune source derrière le nuage.

Une autre manière de comprendre une raie en absorption dans une atmosphère stellaire est la suivante :

L'opacité dans la raie est bien supérieure à celle dans le continu,

$$\kappa_\nu(\text{raie}) \gg \kappa_\nu(\text{continu})$$

Donc, on voit dans le continu des régions **beaucoup plus profondes** que dans la raie. De plus, il y a un **gradient de température** : les couches profondes sont plus chaudes que les couches superficielles, donc aussi plus brillantes (fonction source plus grande). Ainsi, le rayonnement du continu est intense car il provient des couches profondes, tandis que celui du centre de la raie est faible car il vient des couches superficielles qui sont plus froides.

4.5.2 Profil et largeur équivalente d'une raie

Pour quantifier l'intensité d'une raie, introduisons quelques définitions, appuyées par la figure 4.3 L'**absorption** ou le **flux résiduel** R est défini par

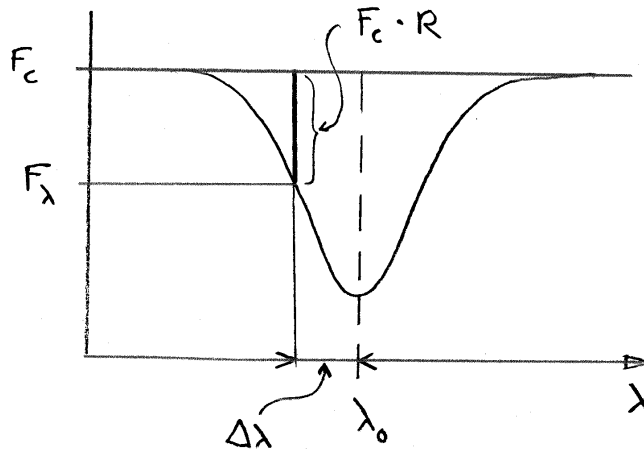


FIG. 4.3 – Profil d'une raie

$$R = \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} \quad (4.43)$$

où F_c est le flux dans le continu tandis que F_λ est le flux dans la raie, à la longueur d'onde λ . **L'absorption centrale** est $R_c = \frac{F_c - F_{\lambda_0}}{F_c}$. Ce qu'on appelle **profil de raie** est la fonction $R(\Delta\lambda)$.

On définit la **largeur équivalente** comme étant

$$W_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_c - F(\lambda)}{F_c} d\lambda \quad (4.44)$$

Avec $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$. On voit que l'unité physique de W_λ est une longueur (d'onde), exprimée en général en Å ou en mÅ.

Remarque :

- La définition de la largeur équivalente ci-dessus implique des flux, si elle s'applique à des spectres stellaires, pour lesquels l'intensité est intégrée sur le disque apparent de l'étoile. Pour l'observation du soleil, où le disque apparent peut être résolu, on devrait plutôt parler de l'intensité spécifique I_λ en lieu et place de F_λ (attention toutefois : certains spectres solaires concernent le disque intégré, tandis que d'autres sont relatif à une petite région du disque, par exemple le centre ou au contraire le voisinage du bord).
- Si $I_\nu = I_\nu^c e^{-\kappa\nu\rho x}$ (où x serait l'épaisseur de l'atmosphère), alors $W_\nu = \int_0^\infty (1 - e^{-\kappa\nu\rho x}) d\nu$

Interprétation "géométrique" La largeur équivalente W_λ est la largeur du rectangle de hauteur F_λ^c (ou I_λ^c), dont la surface (ou l'intégrale) est égale à la surface (l'intégrale) de la raie.

W_λ est une mesure de l'énergie prélevée par la transition $n \rightarrow n'$ sur le spectre continu. C'est la largeur d'une raie fictive complètement opaque ($R = 1$) qui enlèverait la même énergie au continu que la raie réelle.

4.5.3 Elargissement des raies

On a vu que la largeur naturelle γ est inobservable. Or, on arrive à résoudre les raies d'une étoile. Il y a donc d'autres causes d'élargissement, qui sont extérieures à l'atome, et qui sont passées brièvement en revue ci-après :

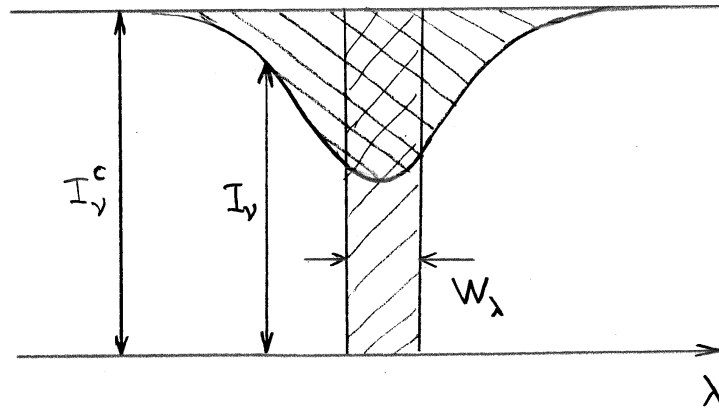


FIG. 4.4 – Interprétation géométrique de la largeur équivalente.

Collisions avec d'autres atomes, des ions ou des électrons

Une raie spectrale correspondant à une transition entre deux niveaux de longue durée de vie sera très fine, puisque la relation d'incertitude de Heisenberg impose à ces niveaux une énergie très bien définie, i.e. de "largeur" très faible. Inversément, des niveaux de courte durée de vie ont une énergie moins bien définie et une grande "largeur", ce qui implique une raie spectrale large.

Les chocs représentent une manière de raccourcir, parfois considérablement, la durée de vie des niveaux d'énergie, et ils impliquent donc un élargissement de la raie. Si Δt_{choc} est l'intervalle de temps moyen entre deux collisions subies par un atome (ou ion) donné, on peut montrer que la contribution des chocs à la largeur de la raie, γ_{choc} , est donnée par (cf. par ex. D. Emerson, Interpretation of astronomical spectra, p. 83 et suivantes)

$$\gamma_{choc} = \frac{2}{\Delta t_{choc}} \quad (4.45)$$

Ce coefficient d'amortissement s'ajoute au coefficient de largeur naturelle :

$$\gamma = \gamma_{nat} + \gamma_{choc}$$

Ce sont surtout les **ailes** de la raie qui sont affectées.

Les collisions donnent lieu à deux effets :

- **Effet Van der Waals** : il est dû aux collisions avec des **atomes neutres** (effet dipolaire) et se manifeste surtout dans les atmosphères d'étoiles froides.
- **Effet Stark** : dû aux collisions avec des **électrons et des ions**. Il affecte de manière spectaculaire les raies d'hydrogène et d'hélium, surtout, dans les étoiles chaudes (types B–A).

Effet Doppler thermique

Puisque les atomes et ions sont agités de mouvements aléatoires selon la distribution de Maxwell (considérée sur une dimension), il existe un effet Doppler “microscopique”, en ce sens qu’il affecte les particules individuelles. La fréquence observée pour une particule dotée d’une vitesse radiale v est¹

$$\underbrace{\nu}_{obs.} = \underbrace{\nu_0}_{vraie} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (4.46)$$

$$\Rightarrow v = c \left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right) = \frac{c}{\nu_0} (\nu - \nu_0) \Rightarrow dv = \frac{c}{\nu_0} d\nu$$

La distribution maxwellienne des vitesses est :

$$\frac{dN}{N} = \frac{I_\nu d\nu}{I} = \frac{1}{\sqrt{\pi}W} e^{-\left(\frac{v}{W}\right)^2} dv \quad (4.47)$$

avec $W = \sqrt{2kT/M}$. Ici, il faut imaginer la situation, ou bien d’un ensemble de N atomes subissant la même transition et qui émettent un rayonnement d’intensité totale (i.e. intégrée sur les fréquences) I , ou bien d’un ensemble d’atomes qui absorbent la même intensité I . Parmi ceux-ci, dN d’entre eux émettent l’intensité $I_\nu d\nu$, qui est donc donnée par :

$$I_\nu d\nu = I\pi^{-1/2} e^{-\left[\left(\frac{c}{\nu_0 W}\right)^2 (\nu - \nu_0)^2\right]} \frac{c}{\nu_0 W} d\nu \quad (4.48)$$

Or, $\frac{c}{\nu_0 W} = \frac{c}{\nu_0} \sqrt{\frac{M}{2kT}} \equiv \frac{1}{\Delta\nu_D}$

$$I_\nu d\nu = I\pi^{-1/2} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2} \frac{d\nu}{\Delta\nu_D} \quad (4.49)$$

¹si la particule s’éloigne de nous, sa vitesse radiale est positive par convention ; mais elle s’approche alors de la source de lumière située plus en profondeur dans l’étoile et “voit” donc une fréquence plus élevée que si elle était au repos. C’est ce qui la rend éventuellement capable d’absorber un photon de cette fréquence, ce qu’elle ne pourrait faire étant au repos.

avec $\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{M}}$.

Le profil est gaussien : c'est le **coeur de la raie** qui est affecté. T est la **température cinétique**. En général, la largeur Doppler domine sur les γ . Mais dans la pratique, à moins de faire un modèle détaillé de l'atmosphère stellaire incluant les turbulences, il faut ajouter un paramètre arbitraire, la **vitesse de microturbulence** ξ_t (ou v_{turb}), qui traduit de manière *ad hoc* des mouvements à petite échelle, i.e. petite par rapport à l'épaisseur de la zone de formation de raies. On postule que la microturbulence a une distribution gaussienne, et l'élargissement de la raie est une **convolution** du profil Doppler thermique et du profil Doppler de microturbulence. Comme les deux profils sont gaussiens, cela revient à additionner quadratiquement les largeurs :

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \left(\frac{2kT}{M} + \xi_t^2 \right)^{1/2} \quad (4.50)$$

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \left(\frac{2kT}{M} + \xi_t^2 \right)^{1/2} \quad (4.51)$$

car $v = \frac{c}{\lambda} (\lambda - \lambda_0)$

Autres cause d'élargissement des raies

- **Effet Doppler macroscopique** : Contrairement à la microturbulence, les effets Doppler macroscopiques ne modifient pas la largeur équivalente de la raie. Ainsi, la raie est élargie, mais aussi moins profonde, de sorte que la largeur équivalente reste constante.
- **Macroturbulence** : On admet en général une distribution gaussienne, avec une largeur à mi-hauteur de quelques km/s.
- **Rotation stellaire** : Le profil dû à la rotation est fortement non gaussien, avec des flancs très raides mais un fond très évasé.
- **Effet Zeeman** (champ magnétique) : Il est mesurable dans les taches solaires et dans les étoiles magnétiques de type Bp–Ap.

Le profil final d'une raie est la **convolution** des profils naturel et de choc, avec le profil Doppler. Ce produit de convolution est appelé fonction de Voigt.

4.6 Courbe de croissance

Il s'agit de la relation entre la largeur équivalente d'une raie et le nombre d'atomes responsables de la raie. Plus précisément, c'est la relation entre $\log\left(\frac{W\lambda}{\lambda}\right)$ et $\log Nf + \text{constante}$, car le produit Nf est plus pertinent que N seul, d'autant plus qu'en pratique, on considère plusieurs raies plutôt qu'une seule.

La courbe de croissance comprend **trois parties** (Fig. 4.5) :

1. Petites raies, milieu optiquement mince : $W \propto N$ (partie linéaire)
2. Raies saturées dans le coeur : $W \propto (\log N)^{1/2}$ (plateau)
3. Raies très saturées : $W \propto N^{1/2}$ (partie saturée)

Montrons que $W \propto N$ dans le premier cas :

$$\begin{aligned}
 I_\nu &= I_\nu^c e^{-\tau_\nu} ; \tau_\nu = \kappa \nu \rho x ; \kappa \nu \rho = N \alpha_\nu \\
 \implies I_\nu &= I_\nu^c e^{-N \alpha_\nu x} \\
 W &= \int \frac{I_\nu^c - I_\nu}{I_\nu^c} d\nu = \int_0^\infty (1 - e^{-N \alpha_\nu x}) d\nu \\
 \tau_\nu &\ll 1 \rightarrow e^{-N \alpha_\nu x} \simeq 1 - N \alpha_\nu x \\
 \iff W &= \int_0^\infty N \alpha_\nu x d\nu = Nx \underbrace{\int_0^\infty \alpha_\nu d\nu}_{f \frac{\pi e^2}{mc}} \\
 \implies W &= Nx f \frac{\pi e^2}{mc} \propto \underbrace{Nx}_{\text{densité de colonne}} f
 \end{aligned}$$

La partie linéaire de la courbe de croissance correspond à un coefficient d'absorption de la raie petit par rapport à celui du continu. Pour un coefficient plus grand, il faut tenir compte de la largeur Doppler du coeur de la raie, et c'est ce profil qui impose la dépendance en $(\log N)^{1/2}$. La saturation s'étend ensuite aux ailes de la raie, dont le profil impose la dépendance en $N^{1/2}$.

4.7 Diffusion Rayleigh, Thomson et propriétés de l'atmosphère terrestre

On peut envisager la diffusion Rayleigh comme un cas limite d'une absorption par un oscillateur harmonique, lorsqu'on est très loin de la résonance :

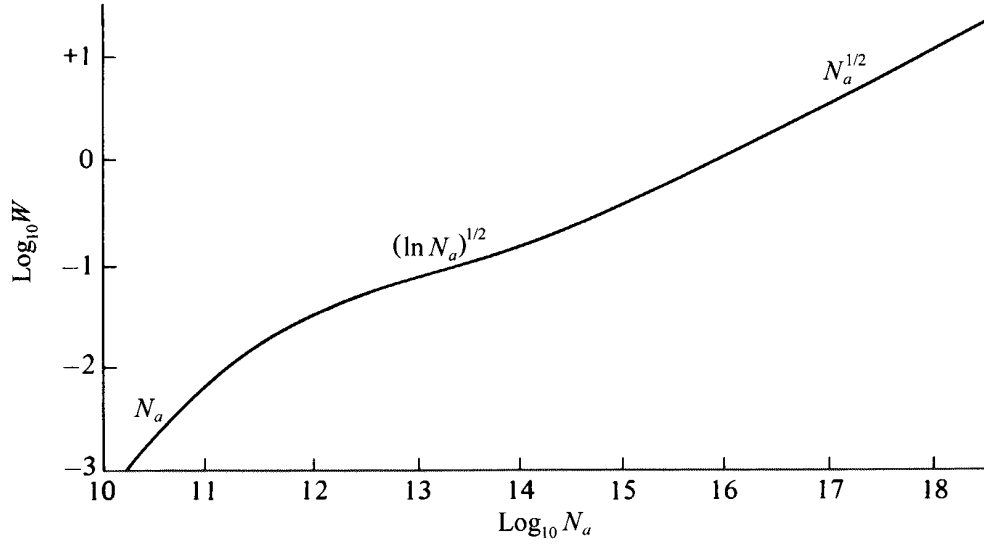


FIG. 4.5 – Courbe de croissance. (Source : Aller, The atmospheres of the Sun and stars, Ronald Press, New York, 1963).

$|\nu - \nu_0| \gg \gamma$. Partons de l'équation 4.22 et tenons compte de cette condition. On obtient :

$$k \simeq \frac{Ne^2}{2\pi m} \cdot \frac{\nu \frac{\gamma}{2\pi}}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2}$$

Or, on a montré que $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{c^3 m}$ (on a remplacé ici ω_0 par ω , car il s'agit d'une oscillation forcée et non libre, et on est loin de la résonance). Donc on a, en tenant compte de 4.13 et de $\gamma = \frac{8}{3} \frac{\pi^2 e^2 \nu^2}{3mc^3}$

$$\begin{aligned} \kappa_\nu \rho &= \frac{4\pi\nu k}{c} = \frac{Ne^2}{\pi mc} \frac{\nu^2 \gamma}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2} \\ &= \frac{8\pi e^4 N}{3m^2 c^4} \frac{\nu^4}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2} \\ \kappa_\nu \rho &= \frac{8\pi Ne^4}{3m^2 c^4} \frac{1}{\left[\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 - 1\right]^2} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Il y a deux cas extrêmes, caractérisés par une condition supplémentaire :

Electrons fortement liés à l'atome : $\nu_0 \gg \nu$ La formule 4.52 devient :

$$\kappa_{\nu\rho} = \frac{8\pi Ne^4}{3m^2c^4} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4 = \left(\frac{8\pi Ne^4\lambda_0^4}{3m^2c^4}\right) \frac{1}{\lambda^4} \quad (4.53)$$

qui n'est autre que la loi de **diffusion de Rayleigh**. Le bleu est davantage diffusé que le rouge, et la lumière diffusée est polarisée. On peut aussi introduire l'indice de réfraction dans l'expression de l'absorption :

$$\kappa_{\nu\rho} = \frac{32}{3}\pi^3 \frac{(n-1)^2}{N\lambda^4} \quad (4.54)$$

car selon 4.21 et avec $\gamma \ll |\nu - \nu_0|$ on a

$$n - 1 \sim \frac{Ne^2}{2\pi m} \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2}$$

et si de plus $\nu_0 \gg \nu$,

$$n - 1 \simeq \frac{Ne^2}{2\pi m\nu_0^2} \implies \frac{1}{\nu_0^4} = \frac{4\pi^2 m^2}{N^2 e^4} (n - 1)^2$$

ce qui donne finalement l'équation 4.54 ci-dessus.

- La diffusion Rayleigh est en général négligeable dans les atmosphères stellaires, sauf dans les supergéantes.
- Elle explique le bleu du ciel de l'atmosphère terrestre. Deux effets interviennent (Fig. 4.6) : D'une part, la distribution d'énergie du soleil présente un maximum dans le jaune ; d'autre part, le rayonnement solaire est diffusé par les molécules de l'atmosphère selon la loi en $1/\lambda^4$. Ainsi, la courbe résultante présente un maximum dans le bleu.

Electrons faiblement liés à l'atome : $\nu_0 \ll \nu$, ou $\nu_0 \rightarrow 0$ On voit immédiatement que

$$\kappa_{\nu\rho} = \frac{8\pi Ne^4}{3m^2c^4} = 0.6655 \cdot 10^{-24} \cdot N \quad (4.55)$$

expression de la **diffusion Thomson**, N étant la concentration en cm^{-3} . Si les électrons sont libres, alors N devient N_e , la concentration d'électrons libres.

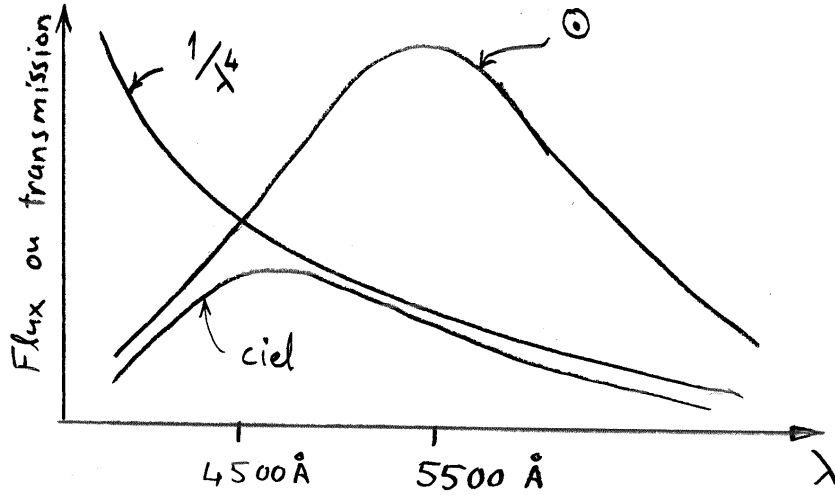


FIG. 4.6 – Cause de la couleur bleue du ciel

La **section efficace** σ est définie par $\kappa_\nu \rho = N \cdot \sigma$, si bien que

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 0.6655 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (4.56)$$

Dans le visible, $\sigma_{Th} \ll \sigma_{bf}$ (ionisation de l'H). **La diffusion Thomson est indépendante de la fréquence et isotrope.**

Propagation d'une onde dans l'ionosphère : Revenons encore à l'expression 4.21, mais en se souvenant qu'elle a été établie en supposant $n \sim 1 \rightarrow n^2 - 1 \simeq 2(n - 1)$. Si l'on relâche la condition $n \sim 1$ (tout en maintenant $k \ll n$) mais que l'on tient compte de $\nu \gg \nu_0$, on voit que

$$n^2 - 1 \rightarrow -\frac{Ne^2}{\pi m_e \nu^2}$$

Pour que l'onde soit transmise, il faut que $n^2 > 0$ (par définition, n doit être réel), ce qui implique

$$\nu > \left(\frac{Ne^2}{\pi m_e} \right)^{1/2} \quad (4.57)$$

Ainsi, pour des fréquences plus faibles que cette valeur critique, l'onde est réfléchie. Dans le cas de l'atmosphère terrestre, $\nu_{crit} \sim 28 \text{ MHz}$, $\lambda_{crit} \sim 10 \text{ m}$.

Remarques sur la diffusion Rayleigh et sur la transparence atmosphérique en général :

1. La diffusion Rayleigh opère sur des particules dont la taille ϕ vaut $\phi < (0.1 - 0.2)\lambda$. Si $\phi \geq (0.1 - 0.2)\lambda$, alors $I \propto \frac{1}{\lambda^p}$ avec $0 \leq p \leq 4$. Pour les aérosols fins, on a diffusion de Mie ($I \propto 1/\lambda$), tandis que pour la “vase atmosphériques” formée d’aérosols plus grossiers, $p \rightarrow 0$ et le ciel devient blanchâtre (par exemple : sables du Sahara dans le ciel de l’Observatoire de Calar Alto, dans la Sierra Nevada au sud de l’Espagne, ou à l’Observatoire de La Palma aux Canaries).
2. L’intensité de la lumière diffusée varie avec l’angle θ de diffusion, et cette variation $I(\theta)$ est donnée par une indicatrice de diffusion. Par ailleurs, la lumière diffusée est partiellement polarisée.
3. Les principaux absorbants de l’atmosphère terrestre sont N_2 , O, O_2 et O_3 , qui sont ionisés au-dessus de 70 – 80 km (ionosphère). L’ozone est présent vers 20 km et au-dessus.

Il est intéressant de passer en revue le spectre électromagnétique, en se demandant pourquoi la totalité de celui-ci n’atteint pas le sol (notion de **fenêtre atmosphérique**) : au-dessus de 1 MeV, les photons vont se matérialiser en paires e^+ , e^- lors d’un passage à proximité d’un noyau ou d’un ion. Ceux d’énergie comprises entre 1 MeV et 50 keV sont susceptibles de subir une diffusion Compton par les e^- libres. Ceux de 50 keV à 3 eV peuvent provoquer des photoionisations, dans lesquelles ils disparaissent évidemment. Entre 3 eV (le plus bas potentiel d’ionisation) et 1.7 eV, le photon peut traverser l’atmosphère sans grand obstacle, bien qu’il puisse être soumis à la diffusion Rayleigh (et à la diffusion de Mie par des aérosols). Entre 1.7 et 10^{-4} eV, les innombrables transitions moléculaires de vibration et de rotation absorbent les photons presque à coup sûr. Il n’y a plus d’obstacle entre 10^{-4} et 10^{-8} eV, puis les e^- libres de l’ionosphère réfléchissent les photons de plus basse énergie.

4.8 Absorption continue

4.8.1 Transitions lié-libre : ionisation

L’ionisation concerne tous les photons doués d’une énergie $h\nu >$ potentiel d’ionisation. Le reliquat d’énergie disponible est transmis sous forme d’énergie cinétique de l’électron.

Pour l'hydrogène, la vitesse de l' e^- arraché à l'atome se déduit de

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{hRc}{n^2} = h\nu$$

avec $R = \frac{2\pi^2me^4}{h^3c}$ constante de Rydberg, car l'énergie du niveau n est $-\frac{hRc}{n^2}$ (Fig. 4.7). L'ionisation à partir du niveau n correspond aux discontinuités

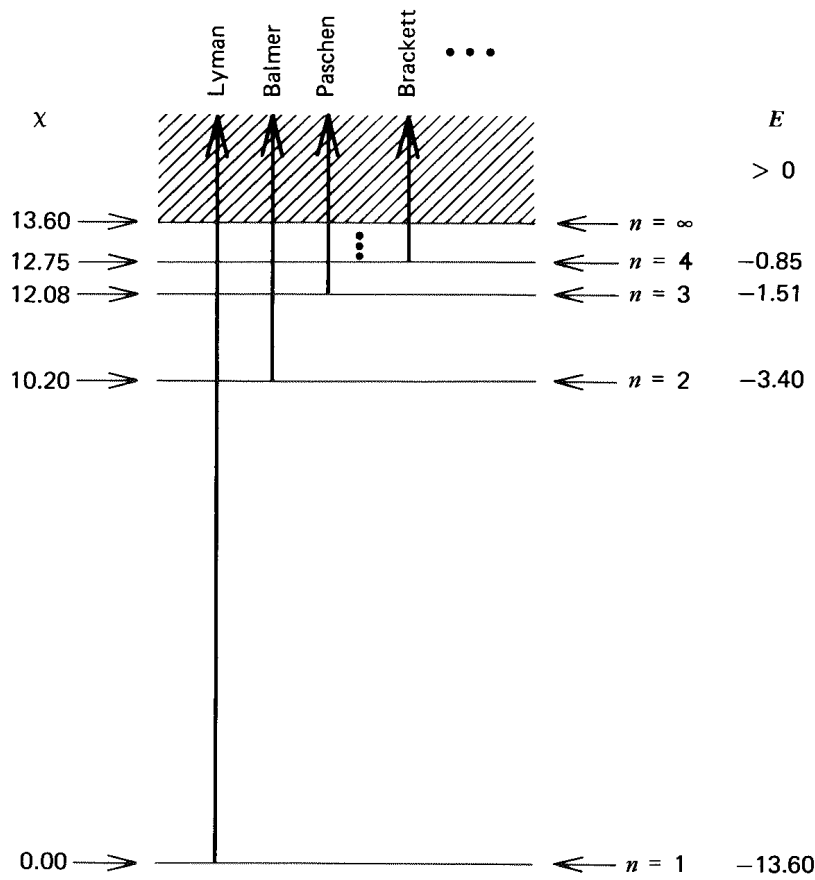


FIG. 4.7 – Niveaux d'énergie dans l'atome d'H. (Source : D. F. Gray, The observation and analysis of stellar photospheres, Cambridge Astrophysics Series, 2nd ed., 1992, p. 131).

	n	λ [Å]	nom
suivantes du spectre de l'hydrogène :	1	912	discontinuité de Lyman
	2	3647	Balmer
	3	8206	Paschen
	4	14588	Brackett

Il y a donc absorption continue pour $\lambda < 912 \text{ \AA}$, $\lambda < 3647 \text{ \AA}$, etc., respectivement.

Pour les **ions de No atomique Z et ne comportant plus qu'un e^-** , on a :

$$E_n = -\frac{RhcZ^2}{n^2}$$

Le coefficient d'absorption par atome ou ion **excité au niveau n** et dont l'électron est arraché est donné (sans démonstration) par

$$\alpha_\nu(n) = \frac{32}{3^{3/2}} \frac{\pi^2 e^6}{h^3} \frac{R}{n^5 \nu^3} g'_n Z^4 = \frac{32}{3^{3/2}} \frac{\pi^2 e^6}{h^3 c^3} \frac{R \lambda^3}{n^5} g'_n Z^4 \quad (4.58)$$

où g'_n est le **facteur de Gaunt** introduit pour rendre l'équation classique de Kramers compatible avec la mécanique quantique.

Pour l'hydrogène, on peut écrire

$$\alpha_\nu(n) = \frac{\alpha_0 g'_n \lambda^3}{n^5} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = 1.044 \cdot 10^{-26} \quad (4.59)$$

pour $[\lambda] = \text{\AA}$.

On veut connaître le coefficient d'absorption moyen par atome d'H, κ_ν^{bf} : (Attention, ici κ_ν^{bf} est défini différemment du κ_ν utilisé précédemment). Il faut connaître le nombre d'atomes excités à l'état n , donc recourir à la statistique de Boltzmann (relation 4.3, s étant remplacé par n) où N_n/N apparaît comme le nombre d'atomes d'H excités au niveau n par atome d'H neutre. Le coefficient d'absorption en $\text{cm}^2/\text{atome d'H neutre}$ et pour tous les continus partant de n_0 s'écrit alors, sachant que la fonction de partition de l'hydrogène vaut $U = 2$ et que $g_n = 2n^2$:

$$\kappa_\nu^{bf} = \sum_{n_0}^{\infty} \frac{\alpha_n N_n}{N} = \alpha_0 \sum_{n_0}^{\infty} \frac{\lambda^3}{n^3} g'_n e^{-\chi_n/kT} \quad (4.60)$$

4.8.2 Transitions libre-libre ou hyperboliques

Un e^- passant près d'un ion à vitesse v peut absorber un photon et s'en trouver accéléré. Cela peut s'écrire

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + h\nu = \frac{1}{2}mv_2^2$$

avec $v_2 > v_1$. Le coefficient d'absorption par ion et par e^- de vitesse v (relative au ion) est donné par Kramers (1923) :

$$\alpha_\nu = \frac{2}{3^{3/2}} \frac{Rh^2}{\pi m^3} \frac{Z^2 e^2}{\nu^3 v} \cdot g_{ff} \propto \frac{1}{v} \quad (4.61)$$

On peut comprendre intuitivement la proportionnalité en $1/v$ par le fait que si l' e^- est lent, il a plus de chances de rencontrer un photon, puisqu'il reste plus longtemps au voisinage du ion. Mais cette expression n'a qu'une utilité très limitée, puisqu'en réalité nous avons tout un spectre de vitesses. Examinons donc plus avant le...

Cas de l'hydrogène : Si on a n_i protons/cm³ et $N_e f(v)dv$ électrons/cm³ ayant $v \in [v, v + dv]$, alors le produit

$$\frac{N_i}{N_0} N_e \underbrace{f(v) \alpha_\nu dv}_{\text{coeff. moyen}/e^-} = d\kappa_\nu^{ff}$$

où N_0 est le nombre total d'atomes d'H, donne l'absorption pour les e^- de vitesse v . Si $f(v)$ est la distribution maxwellienne,

$$f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

alors

$$\kappa_\nu^{ff} = \frac{4}{3} \left(\frac{2\pi}{3mkT} \right)^{1/2} \frac{e^6}{hcm\nu^3} \frac{N_i N_e}{N_0} \cdot g_{ff} \quad (4.62)$$

Notons que si $[\kappa_\nu^{ff}] = \text{cm}^{-1}$, on a $\rho \kappa_\nu^{ff'} = \kappa_\nu^{ff}$ et donc $[\kappa_\nu^{ff'}] = \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$.

Loi de Kramers : En prenant la **moyenne de Rosseland** donnée par 3.9 et en considérant $T > T_{ionisation}$ de H, He, alors on se trouve dans le régime où les éléments lourds contribuent à N_e et on a la **loi de Kramers** :

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5} \quad (4.63)$$

où κ_0 dépend de la composition chimique. Cette formule approximative a été largement utilisée à l'époque des premiers modèles de structure interne stellaire, parce que les transitions free-free sont la principale source d'opacité à l'intérieur des étoiles de petite masse (une masse solaire et moins). De plus, l'addition des transitions bf et ff suit une loi semblable.

4.8.3 Absorption par le ion H^-

Dans les étoiles de type solaire ou plus froides, on a **photodissociation du ion H^-** , dont l'effet est prédominant dans l'infrarouge mais reste important dans le visible.

$$\chi_{dissoc}(H^-) = 0.75 \text{ eV} \iff \lambda_{dissoc} = 1.65 \mu m$$

Dans les étoiles froides, l'hydrogène est presque totalement neutre. Par conséquent, presque tous les électrons libres proviennent des métaux. Dans les étoiles chaudes, H^- est complètement dissocié. H^- est donc dominant dans les étoiles G-K. Dans les étoiles M, l'importance de H^- décroît par manque d'électrons libres. C'est l'absorption par le ion H^- qui permet de justifier l'approximation d'atmosphère grise exposée et utilisée plus haut.

4.9 Opacité globale dans le milieu stellaire

L'opacité κ est une donnée essentielle à la construction des modèles stellaires et des modèles d'atmosphère. Les importances respectives des différents mécanismes d'absorption varient selon les conditions physiques, à savoir essentiellement ρ , T et composition chimique. Le coefficient d'absorption global s'écrit pour la fréquence ν :

$$\kappa_\nu = \left[\underbrace{\kappa_{bf}(\nu)}_{\text{photoion.}} + \underbrace{\kappa_{ff}(\nu)}_{\text{trans. hyp.}} + \underbrace{\kappa_{bb}(\nu)}_{\text{raies}} \right] \cdot \underbrace{(1 - e^{-h\nu/kT})}_{\rightarrow 0 \text{ si } T \rightarrow \infty} + \kappa_{Th} \quad (4.64)$$

Le terme $(1 - e^{-h\nu/kT})$ corrige de l'émission induite.

Dans les tables numériques d'opacités récentes, on tient compte aussi de :

- la diffusion Compton (cas particulier : diffusion Thomson, pour $h\nu \ll m_e c^2$)
- l'absorption bf et ff par les ions négatifs, en particulier H^-
- la diffusion cohérente Raman (inélastique) et Rayleigh (élastique)
- l'absorption moléculaire ($T < \sim 4000$ K)
- production de paires e^+, e^-

On fait la moyenne de Rosseland pour les termes dépendant de ν , ce qui pondère fortement κ pour ν t.q. $h\nu/kT \sim 4$. On trouve des tables $\kappa = \kappa(\rho, T, composition)$ à l'adresse

<http://www-phys.llnl.gov/Research/OPAL/index.html>

Régimes de température

- **T faible** : Raies spectrales ; peu de transitions bf et ff possibles $\rightarrow \kappa$ faible
- **T d'ionisation partielle de H et He** : $\kappa_{bf}(H, He)$ maximum ! $\rightarrow \kappa$ devient maximum. En partant des basses températures, $\kappa \propto \rho^\alpha T^\beta$ avec $\alpha \sim 0.7$ et $\beta \sim 6$ à 10
- **T au-delà du maximum** : κ dû aux éléments lourds partiellement ionisés. Avec $T \nearrow$, les éléments lourds perdent leurs e^- , d'où moins de transitions bf. C'est dans ce régime que règne la loi de Kramers

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$$

- **T très élevées** : κ dû à la diffusion par les e^- libres

Dépendance vis-à-vis de ρ :

- **Milieu peu ionisé** : chaque atome absorbe indépendamment $\rightarrow \kappa$ indépendant de ρ
- **Milieu partiellement ionisé** : κ_{bf} conditionné par la possibilité de repeuplement des niveaux, donc par la densité électronique N_e

Appendice : rappel sur les unités physiques des coefficients d'absorption

$$[\kappa_\nu \rho] = \text{cm}^{-1} ; l = \frac{1}{\kappa_\nu \rho} ; [l] = \text{cm}$$

$$[\rho] = \text{g cm}^{-3} \Rightarrow [\kappa_\nu] = \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$$

Coefficient d'absorption atomique α :

$$[\alpha] = \text{cm}^2/\text{atome}$$

Puissance soustraite à l'intensité I_ν dans l'intervalle de fréquence $d\nu$ par atome absorbant :

$$[\alpha_\nu d\nu] = \text{erg}/(\text{s cm}^2 \text{ rad}^2 \text{ Hz})/\text{absorbant}$$

Coefficient d'absorption continue **par atome d'H neutre** κ : Attention, $\kappa \neq \kappa_\nu$ car κ_ν est le coefficient d'absorption par unité de masse habituel, en $\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$. Pour passer de κ à κ_ν , on part de α , que l'on multiplie par le nombre d'absorbants par atome d'H (cf. D.F. Gray, The observation and analysis of stellar photospheres, pp. 129–130).

L'opacité spécifique pour l'absorbant de nature i (i pouvant être le numéro atomique, par ex.) peut s'écrire :

$$\kappa_i(\nu) = \frac{n_i}{\rho} \alpha_i(\nu) \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

où n_i est la densité numérique de l'absorbant i (Bowers & Deeming, 1984, Astrophysics I : stars, Jones & Bartlett, 1984, p. 116).

Chapitre 5

Réactions nucléaires

Les réactions nucléaires jouent un rôle central dans la formation des éléments, bien entendu, et cela non seulement lors de la nucléosynthèse primordiale, mais aussi lors de la nucléosynthèse à l'intérieur des étoiles. Mais en plus de la formation des éléments, ces réactions produisent l'énergie qui permet de maintenir le gradient thermique dans les étoiles – et donc leur équilibre hydrostatique – sur des échelles de temps considérables. On peut donc dire que l'un des buts de l'étude des réactions nucléaires est de permettre le calcul du **taux de production d'énergie par unité de masse** ε dans une étoile. Par ailleurs, la composition chimique joue un rôle essentiel dans la structure interne d'une étoile, et il est donc important pour le théoricien de l'évolution stellaire de pouvoir prédire l'évolution de la composition en fonction du temps et de la profondeur.

On se restreindra ici au cas **non relativiste**, les énergies cinétiques présentes dans les intérieurs stellaires étant faibles.

5.1 Généralités

5.1.1 Rappels de cinématique

Soient deux particules de masse m_1 , m_2 et de vitesse \vec{v}_1 , \vec{v}_2 . La conservation de l'impulsion permet de définir la vitesse du centre de masse (CDM) :

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

La quantité de mouvement de la particule 1, respectivement de la particule 2, par rapport au CDM vaudra alors :

$$\begin{aligned} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{V}) &= \mu \vec{v} \\ m_2 (\vec{v}_2 - \vec{V}) &= -\mu \vec{v} \end{aligned}$$

où

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

est la **masse réduite** et $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ est la **vitesse relative** de m_1 et de m_2 . La conservation de l'impulsion implique

$\vec{V} = \text{constante}$ et que l'impulsion totale dans le référentiel du CDM (RCDM) = $\vec{0}$, avant aussi bien qu'après la collision.

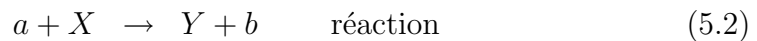
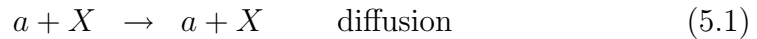
5.1.2 Energie d'une réaction

Soit une collision de deux particules (les collisions à trois particules sont si improbables qu'on peut les négliger). L'énergie cinétique avant la collision est :

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \underbrace{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{V}^2}_{E_{cin} \text{ du CDM}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \vec{v}^2}_{E_{cin} \text{ disponible}}$$

Le premier terme du membre de droite, l'énergie du CDM, est à peu près constant; le second représente l'énergie disponible pour la réaction. Mais cette formule n'est valable que si les masses ne changent pas : en toute rigueur, on ne peut l'appliquer au cas d'une réaction nucléaire que si la somme des masses des deux particules est exactement le même après qu'avant la collision. En réalité, cela n'est jamais exactement vrai, puisqu'une partie de la masse est convertie en rayonnement lors de réactions exothermique. Mais pour les réactions nucléaires à faible énergie, cette partie reste toujours en-dessous de 1%, si bien qu'en pratique on peut admettre que l'énergie cinétique du CDM reste constante alors que l'énergie cinétique dans le RCDM va décroître ou augmenter selon que la masse totale des particules augmente ou diminue.

Plus précisément, soit un projectile a tombant sur une cible X :



Dans la seconde situation, on a des produits de réaction Y et b ; si $m_Y > m_X$, il s'agit d'une fusion. Si au contraire $m_Y < m_X$, il s'agit d'une fission ou d'une spallation.

Que vaut l'énergie Q libérée par la réaction ? La conservation de l'énergie impose

$$E_{aX} + (M_a + M_X) c^2 = E_{bY} + (M_b + M_Y) c^2$$

où E_{aX} et E_{bY} sont les énergies cinétiques dans le RCDM avant et après la réaction. L'énergie libérée vaut :

$$Q = [M_a + M_X - (M_Y + M_b)] c^2$$

Si on exprime M en UMA, on a

$$Q = [M_{init} - M_{fin}] \cdot 931.478 \text{ MeV}$$

car $1 \text{ UMA} \sim 931.478 \text{ MeV}$. Or l'excès de masse d'un noyau vaut

$$\Delta M(A, Z) = 931.478 \left[\underbrace{M(A, Z)}_{\text{masse noyau}} - \underbrace{A}_{\text{nb. de masses at.}} \right] < 0$$

pour un noyau plus stable que ^{12}C . Cela étant, l'équation de conservation de l'énergie devient :

$$E_{aX} + (\Delta M_a + \Delta M_X) = E_{bY} + (\Delta M_b + \Delta M_Y)$$

et l'énergie libérée s'écrit :

$$Q = (\Delta M_a + \Delta M_X) - (\Delta M_Y + \Delta M_b) = E_{bY} - E_{aX}$$

5.1.3 Taux de réactions et section efficace

Section efficace :

$$\sigma \equiv \frac{\text{nb. de réactions/noyau/s}}{\text{flux incident de part. a}} \Leftrightarrow [\sigma] = \text{cm}^2$$

En pratique, $[\sigma] = 10^{-24} \text{ cm}^2 \equiv 1 \text{ barn}$. Le flux incident peut s'écrire

$$\text{flux incident} = n_a \cdot v$$

où n_a est la densité numérique de particules a et v est la vitesse relative de a et de X .

Taux de réaction Le taux de réaction par unité de volume vaut, pour une vitesse relative v :

$$r_{aX} = \sigma \cdot n_X n_a v \quad (5.3)$$

Comme $n_a v$ est le flux, $\sigma \cdot n_a v$ est le nombre de réactions par seconde et par noyau X ; on comprend que le taux s'obtienne en multipliant encore cela par le nombre de noyaux X par cm^3 . Mais cette relation n'est valable que pour une vitesse v unique.

Cas d'un intérieur stellaire Les particules sont douées de vitesses distribuées selon la distribution de Maxwell. La vitesse apparaissant dans 5.3, toutefois, est une vitesse relative et non absolue, mais on peut montrer que les vitesses relatives suivent également une distribution de Maxwell. On a donc

$$r_{aX} = n_a n_X \langle \sigma v \rangle_{aX} \quad (5.4)$$

avec

$$\langle \sigma v \rangle_{aX} = \int_{E=0}^{\infty} v(E) \sigma(E) dn(E) / n \quad (5.5)$$

et

$$\int_{E=0}^{\infty} dn(E) = n$$

avec $E = \frac{1}{2} \mu v^2$. Compte tenu de la distribution de Maxwell,

$$\frac{dn(E)}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-E/kT} E^{1/2} dE$$

Définissons le **taux de réactions par paire de particules** :

$$\lambda_{aX} \equiv \langle \sigma v \rangle_{aX} \quad (5.6)$$

Le taux de réactions devient

$$r_{aX} = \frac{n_a n_X}{1 + \delta_{aX}} \lambda_{aX} \quad (5.7)$$

où δ_{aX} est le symbole de Kronecker : $\delta_{aX} = 0$ si $a \neq X$ et $\delta_{aX} = 1$ si $a = X$. En effet, $n_a \cdot n_X$ est le nombre de paires possibles si $a \neq X$. Mais si $a = X$, alors le projectile et la cible peuvent échanger leurs rôles, et le nombre de paires possibles est $n_X^2/2$ et non n_X^2 . Cela équivaut au nombre de combinaisons 2 à 2 de n éléments :

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Temps de vie des particules X bombardées par a : En désignant ce temps de vie par $\tau_a(X)$, on a :

$$\tau_a(X) = \frac{n_X}{r_{aX}(1 + \delta_{aX})} = \frac{1}{n_a \lambda_{aX}} = \frac{A_a m_H}{\rho X_a \lambda_{aX}} \quad (5.8)$$

où X_a est la **fraction de masse de l'élément a** et A_a la **masse atomique de l'élément a**. La première égalité fait intervenir δ_{aX} pour la raison suivante : $\tau_a(X)$ est défini par

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_a \equiv \frac{n_X}{\tau_a(X)} \quad (5.9)$$

où $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_a$ est la variation du nombre de particules X due aux interactions avec les particules a . Or, si $a = X$, une seule réaction détruit **deux** particules, donc il faut poser

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_a = (1 + \delta_{aX}) r_a X$$

Débit d'énergie : Quelle est la puissance émise par unité de masse par les réactions nucléaires ? On définit cette puissance par (voir aussi Fig. 5.1) :

$$\varepsilon \equiv \frac{dL_r}{dM_r} \quad ; \quad [\varepsilon] = \text{erg s}^{-1} \text{g}^{-1} \quad (5.10)$$

Ainsi, ε est lié au taux de réactions par la relation :

$$\varepsilon = \frac{r_{aX} \cdot Q}{\rho} = \frac{Q n_a n_X \lambda_{aX}}{\rho (1 + \delta_{aX})} \quad (5.11)$$

et, en écrivant $n_a = \frac{\rho X_a}{A_a m_H}$, $n_X = \frac{\rho X_X}{A_X m_H}$:

$$\varepsilon = \frac{Q \rho X_a X_X \lambda_{aX}}{A_a A_X m_H^2 (1 + \delta_{aX})} \quad (5.12)$$

où X_a et X_X sont les fractions de masse des éléments a et X respectivement. Notons que λ_{aX} est fonction de la température T , si bien que $\varepsilon = \varepsilon(T)$ aussi !

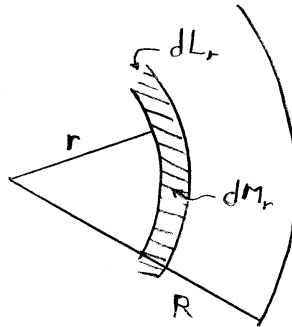
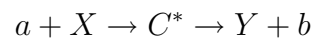


FIG. 5.1 – Définition de ε

5.1.4 Forme de la section efficace dans différentes situations

Quelques généralités

Ecrivons plus précisément le déroulement d'une réaction nucléaire :



où C^* représente le noyau composé excité. Aux énergies inférieures à 50 MeV, la réaction présente trois étapes :

1. Rencontre des deux noyaux a et X , envisagée comme une interaction de l'onde associée à la particule incidente avec le centre de diffusion associé au noyau cible.
2. Franchissement de la barrière de potentiel et la formation d'un noyau composé instable. Pour un choc frontal, cette barrière s'écrit

$$V = \frac{Z_a Z_X e^2}{r} = 1.44 \frac{Z_a Z_X}{r[\text{Fermi}]} \text{ [MeV]}$$

(rappelons que 1 Fermi = 10^{-15} m). C'est grâce à l'effet tunnel que la barrière de potentiel peut être franchie, et que le taux de réactions peut atteindre une valeur suffisante dans les conditions stellaires (cf. exercices).

3. Désintégration du noyau composé : la durée de vie de ce noyau est plus longue que le temps de traversée (lequel n'est que de l'ordre de

10^{-21} s^1), si bien que le mode de désintégration de C^* est complètement indépendant de la manière dont il a été formé.

Dans le cas des très hautes énergies ($\geq 100 \text{ MeV}$), qui est par exemple celui des réactions de spallation, le schéma ci-dessus ne s'applique plus, car la particule incidente ne peut plus être considérée comme interagissant avec le noyau cible entier. Elle n'interagit qu'avec quelques nucléons de ce dernier (car sa longueur d'onde de de Broglie est petite), si bien que les produits de réaction sont éjectés avant que l'énergie de la particule incidente ne soit partagée entre tous les nucléons.

Désintégration du noyau composé : Comme les électrons dans un atome, les nucléons dans un noyau ont des niveaux d'énergie. La largeur Γ d'un niveau est inversement proportionnelle au temps de vie moyen de ce niveau :

$$\Gamma = \hbar/\tau$$

Mais il y a en général plusieurs modes de désintégration possibles, et on peut considérer Γ comme la somme de largeurs partielles associées à chaque canal i de désintégration :

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i$$

Ainsi Γ_i/\hbar apparaît-il comme la probabilité par unité de temps que le noyau C^* se désintègre (ou se désexcite) par le canal i .

Soit D l'intervalle d'énergie entre deux niveaux voisins. Pour qu'un niveau existe, il faut que sa largeur $\Gamma \ll D$. Mais $\Gamma \nearrow$ avec l'énergie du niveau, et le noyau présente un continu au-delà d'une certaine énergie.

Avant de définir le facteur de transmission qui intervient dans l'expression générale de σ , introduisons la "période" P d'oscillation des constituants du noyau composé :

$$P = \frac{2\pi\hbar}{D}$$

Le temps de vie τ du noyau composé est telle que $\tau \gg P$, car P représente le temps après lequel la particule incidente a est susceptible de ressortir, par

¹on obtient cette valeur en égalant l'énergie thermique moyenne et l'énergie cinétique moyenne d'une particule, en prenant comme température typique celle du centre du soleil. Cela donne une estimation de la vitesse thermique. On prend 1 fm comme dimension typique du noyau, ce qui permet d'obtenir le temps de traversée.

le même canal, du noyau C^* . Mais en fait la particule capturée est “réfléchie” plusieurs fois, donc $\tau \gg P$ et C^* peut atteindre un état stationnaire.

Soit $T_\ell(a)$ la **probabilité de pénétration** de l’impacteur a dans la cible X avec un moment cinétique relatif donné par le nombre ℓ . Le temps de formation du noyau composé² vaut alors

$$\tau_a = \frac{\hbar}{\Gamma_a} = \frac{P}{T_\ell(a)} \sim \frac{2\pi\hbar}{T_\ell(a)D}$$

$T_\ell(a)$ est aussi appelé facteur de transmission. On a donc aussi

$$\Gamma_a \sim T_\ell(a) \frac{D}{2\pi}$$

On a généralement $T_\ell(a) \ll 1$ et $\Gamma_a \ll D$.

Expression générale de la section efficace : Revenons à la réaction 5.2 : on dira que la réaction commence par le canal a et se termine par le canal b . La section efficace peut s’écrire comme un produit des termes correspondant aux diverses étapes de la réaction :

$$\sigma(a, b) = (2\ell + 1) \pi \lambda^2 \cdot \omega \cdot T_\ell(a) \cdot y(E) \cdot s \cdot G(b) \quad (5.13)$$

Les différents termes apparaissant ici sont successivement :

- la section efficace maximale pour un choc de moment cinétique $\ell\hbar$
- des facteurs de spin de a et de X : $\omega \sim 1$
- le facteur de transmission détaillé ci-dessus
- le terme de résonance $y(E)$, valable dans le domaine des basses énergies : équation de Breit–Wigner. Pour les hautes énergies, il n’y a pas de résonance et $y(E) = 1$.
- un facteur de symétrie s qui vaut

$$\begin{aligned} s &= 1 && \text{pour } a \neq X \\ s &= 2 && \text{pour } a = X \end{aligned}$$

- le rapport de branchement $G(b)$, qui est le pourcentage de désintégration dans un canal particulier : $G(b) = \Gamma_b/\Gamma$

²ou de désintégration de celui-ci par le canal a : dans cette situation symétrique il n’y a pas de réaction proprement dite

Réactions non résonnantes

Aux faibles énergies, loin d'une résonance, la formule 5.13 se réduit à

$$\sigma(a, b) = \text{const } \lambda^2 T_\ell(a) \quad (5.14)$$

puisque $p \propto E^{1/2}$ et $p = k\hbar \propto 1/\lambda$, λ étant la longueur d'onde de de Broglie, on a aussi $\lambda^2 \propto 1/E$. On peut donc écrire $T_\ell(a) = S(E) \cdot e^{-b/E^{1/2}}$, où $S(E)$ est une fonction incluant tous les effets liés à la structure nucléaire du projectile et de la cible. On montre que la quantité b vaut

$$b = 31.28 \cdot Z_a Z_X A^{1/2} \quad [\text{keV}^{1/2}] \quad (5.15)$$

où $A = \frac{A_a A_X}{A_a + A_X} = \mu/m_H$ est le nombre de masse réduit. Par ailleurs, $S(E)$ peut aussi se définir par

$$S(E) = \sigma(E) E e^{\frac{2\pi Z_a Z_X e^2}{\hbar v}} \quad (5.16)$$

Partant de 5.5 et de la distribution de Maxwell, on peut alors écrire :

$$\lambda = \langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\mu\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) e^{-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}} dE \quad (5.17)$$

La première exponentielle de l'intégrand, fortement décroissante, domine ; la seconde est croissante, si bien que le résultat est une sorte de "pic", appelé **pic de Gamow** (voir Fig. 5.2). Si l'on admet que la fonction $S(E) \sim \text{const.}$ en première approximation, on trouve (cf. exercices) que l'énergie du maximum du pic vaut

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3}$$

tandis que la valeur de l'intégrand vaut, à $S(E)$ près

$$f(E_0) = e^{-E_0/kT - b/E_0^{1/2}} = e^{-\frac{3E_0}{kT}} = e^{-\tau}$$

avec

$$\tau = \frac{3E_0}{kT} = \frac{3}{kT} \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3} = 42.48 \left(\frac{Z_a^2 Z_X^2 A}{T_6} \right)^{1/3}$$

où $T_6 = T/10^6$ K. E_0 , l'**énergie efficace de réaction**, est de l'ordre de 15 à 30 keV pour des noyaux légers et des températures de quelques dizaines

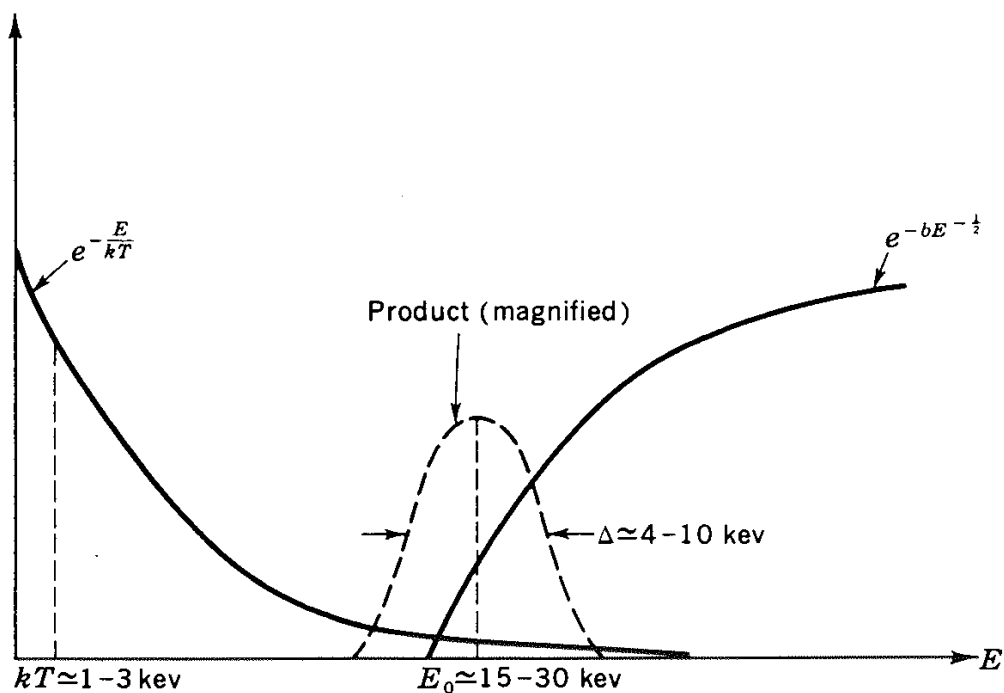


FIG. 5.2 – Les deux contributions essentielles à l'intégrand de 5.17. (Source : D.D. Clayton, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis, McGraw-Hill, 1968, p. 302).

de millions de degrés, alors que l'énergie moyenne des particules est plutôt de 1 à 3 keV. On voit bien que les particules qui contribuent aux réactions nucléaires sont une petite minorité issue de la queue de distribution maxwellienne des vitesses. Généralement, on estime l'intégrale 5.17 numériquement. Pour obtenir une approximation analytique, on remplace l'intégrand par une gaussienne centrée en E_0 et de demi-largeur ΔE :

$$f(E) \simeq e^{-\tau} e^{-\left(\frac{E-E_0}{\Delta E}\right)^2}$$

On obtient (cf. exercices) $\Delta E = (4E_0kT/3)^{1/2}$, si bien que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(E)dE &\simeq e^{-\tau} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{E-E_0}{\Delta E}\right)^2} dE \\ &\simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\tau} \Delta E \end{aligned}$$

et 5.17 devient en explicitant E_0 :

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma v \rangle &\simeq \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} S(E_0) e^{-\tau} \left(\frac{4}{3} E_0 kT\right)^{1/2} \\
 &\propto S(E_0) e^{-\tau} \tau^2 \\
 \langle \sigma v \rangle &\propto \frac{1}{T^{2/3}} e^{-const./T^{1/3}}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Finalement, pour un domaine limité de température, on peut représenter le débit d'énergie par la relation très simple

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^\nu \tag{5.19}$$

avec $\nu = \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln T}\right)_\rho$ et $\nu = \frac{\tau-2}{3}$ (cf. exercices).

Réactions résonnantes

On suppose ici que les interactions de chaque nucléon avec le reste du noyau sont bien décrites par un potentiel sphérique $V(r)$, c'est-à-dire qu'on adopte le modèle en couches du noyau. Comme l'atome, le noyau possède différents états d'excitation, chacun étant caractérisé par l'énergie E_i du niveau, la largeur Γ_i ou le temps de vie τ_i du niveau, le moment cinétique total J et la parité π . J est la somme des moments orbitaux et de spin des nucléons du noyau; chaque couche complète a un moment cinétique total nul. La parité décrit le comportement de la fonction d'onde du noyau quand les coordonnées spatiales sont inversées. La parité est paire si l'inversion des coordonnées ne change pas le signe de la fonction d'onde, et impaire dans le cas contraire. La parité d'un seul nucléon vaut $(-1)^\ell$, ℓ étant le moment orbital du nucléon, et celle d'un noyau est le produit des parités individuelles des nucléons qui le composent. La parité d'une couche complète vaut 1 (est paire).

Les niveaux d'énergie ne sont pas espacés de manière uniforme. Pour certains nombres atomiques (nombre magiques de la structure nucléaire), il y a des niveaux entre lesquels l'écart d'énergie est beaucoup plus important que la moyenne. Ces noyaux-là (Z ou $(A - Z) = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 120$) sont particulièrement stables; en particulier, leur section efficace de capture de neutrons est beaucoup plus faible que celle des autres noyaux.

Il y a résonance à une énergie donnée lorsque le taux de réaction atteint un maximum relatif à cette énergie. Une réaction est résonnante lorsque les trois conditions suivantes sont réunies :

1. L'énergie cinétique des particules à l'infini est telle que l'énergie totale coïncide avec l'un des états quasi-stationnaires du noyau composé. Des états avec des énergies positives $E_n > 0$ peuvent exister, la barrière de potentiel étant assez haute pour leur laisser un temps de vie relativement long. Energie et quantité de mouvement sont conservées si l'énergie cinétique à l'infini coïncide avec l'énergie E du noyau composé.
2. Le moment cinétique total doit être conservé, ce qui implique

$$\vec{J}_n = \vec{J}_a + \vec{J}_X + \vec{L}$$

où \vec{J}_n est le moment cinétique de l'état excité E_n du noyau composé C , \vec{J}_a et \vec{J}_X sont les spins des particules a et X , et \vec{L} est le moment cinétique orbital de la particule a par rapport à la particule X .

3. La parité π doit être conservée : $\pi(C) = \pi(a) \cdot \pi(X) \cdot (-1)^\ell$, avec ℓ tel que $L = \ell\hbar$.

Le taux de réactions nucléaires s'écrit de manière générale

$$r_{aX} = \frac{n_a n_X}{(1 + \delta_{aX})} \int_0^\infty v(E) \sigma(E) \frac{dn(E)}{n}$$

et à une résonance E_r , comme $v(E)$ et $dn(E)/n$ varient peu sur l'intervalle d'énergie considéré :

$$r_{aX} = \frac{n_a n_X}{(1 + \delta_{aX})} v(E_r) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-E_r/kT} E_r^{1/2} \int_0^\infty \sigma(E) dE$$

Par ailleurs, pour une réaction résonnante de type 5.2, la formule de Breit–Wigner s'écrit :

$$\sigma(a, b) = (2\ell + 1) \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (5.20)$$

donc la valeur maximale de $\sigma(E)$ est, pour un choc frontal où $\ell = 0$:

$$\sigma_{max} = 4\pi \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma^2}$$

Afin d'estimer l'intégrale de la section efficace, on approxime le pic de résonance par une demi-ellipse dont le demi-grand axe est σ_{max} et le demi-petit

axe est Γ (la largeur du pic à mi-hauteur est $\Gamma/2$). Ainsi, la surface de cette demi-ellipse est :

$$\int_0^\infty \sigma(E) dE \simeq \frac{\pi \sigma_{max} \Gamma}{2} = 2\pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma}$$

si bien que

$$r_{aX} = \frac{n_a n_X}{(1 + \delta_{aX})} \left(\frac{2 E_r}{\mu} \right)^{1/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E_r^{1/2}}{(kT)^{3/2}} e^{-E_r/kT} 2\pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma}$$

En faisant apparaître les densités et les abondances relatives, et en explicitant la longueur d'onde de de Broglie, on obtient

$$r_{aX} = \frac{\rho^2 X_a X_X \hbar^2}{A_a A_X m_H^2 (1 + \delta_{aX})} \left(\frac{2\pi}{A m_H kT} \right)^{3/2} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} e^{-\frac{E_r}{kT}}$$

puis, en exprimant E_r et Γ en keV et en explicitant les facteurs numériques :

$$r_{aX} = \frac{2.94 \cdot 10^{36}}{(1 + \delta_{aX})} \rho^2 \frac{X_a X_X}{A_a A_X} \frac{1}{(AT_6)^{3/2}} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} e^{-11.61 \frac{E_r}{T_6}} \quad (5.21)$$

Examinons **deux cas extrêmes** :

1. $\Gamma_b \gg \Gamma_a \Rightarrow \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \approx \Gamma_a$ (on suppose ici que $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$). Dans ce cas, le taux de réactions se réduit au taux de formation du noyau composé : autrement dit, le temps de désintégration de ce dernier est beaucoup plus court que le temps moyen nécessaire à le former. Cela arrive surtout aux basses énergies, où le facteur de pénétration est faible.
2. $\Gamma_b \ll \Gamma_a \Rightarrow \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \approx \Gamma_b$: cela arrive lorsque l'énergie du niveau résonnant est élevée. On peut alors obtenir une équation de type Saha pour l'équilibre $a + X \rightleftharpoons C^*$ de la manière suivante.

Soit n_{C^*} la concentration des noyaux composés C^* dans le niveau de résonance E_r . Soit τ_b la durée de vie de C^* à l'égard de la désintégration par émission de la particule b . On a

$$\Gamma_b = \hbar/\tau_b$$

et donc :

$$r_{aX} \equiv \frac{n_{C^*}}{\tau_b} = \frac{n_a n_X}{(1 + \delta_{aX})} \frac{\hbar^3}{(2\pi \mu kT)^{3/2}} \frac{1}{\tau_b} e^{-\frac{E_r}{kT}}$$

d'où l'équation de type Saha :

$$\frac{n_a n_X}{n_{C^*}} = (1 + \delta_{aX}) \left(\frac{2\pi m_{red} kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} e^{+E_r/kT}$$

Effet d'écran

La présence des électrons dans le milieu stellaire peut affecter le taux des réactions nucléaires : même si les e^- ne sont pas liés aux noyaux, dans un milieu assez dense on peut dire que chaque noyau est environné d'un nuage d'électrons qui atténue la répulsion coulombienne entre noyaux. C'est ce qu'on appelle l'effet d'écran, qui facilite la pénétration de la barrière de potentiel.

On verra que le potentiel au voisinage d'un noyau de masse A_i est

$$\phi = \frac{Ze}{r} e^{-r/r_D}$$

avec le rayon de Debye r_D

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n \chi}}$$

où $n = \rho/(\mu m_H)$ est la concentration moyenne³ et

$$\chi = \mu \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i (Z_i + 1) \equiv \mu \zeta$$

la charge effective. L'énergie potentielle entre deux noyaux 1 et 2 devient

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2}{r} e^2 e^{-r/r_D}$$

$$e^2 = 23.07 \cdot 10^{-20} \text{ cm} \cdot \text{erg}$$

Exemples numériques : Par exemple, pour

$$T = 10^7 K, \rho = 10^2, \zeta \sim 1, Z_1 Z_6 = 6$$

on a

$$r_D/r_0 \simeq 10^2$$

où r_0 est le rayon du noyau. Dans le domaine ρ, T des étoiles de séquence principale, le rayon de Debye $\gg r_0$.

³Attention, μ désigne ici non plus la masse réduite dans le cas d'une collision à deux corps, mais le poids moléculaire moyen, défini au chapitre suivant.

Développons donc au 1er ordre le potentiel :

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D}$$

Dans le calcul du facteur de pénétration $P_\ell(E)$, dû à l'effet tunnel, le terme important qui apparaît (cf. cours de *Mécanique quantique*) est la différence $V(r) - E$, entre l'énergie potentielle des noyaux et l'énergie relative des particules. On a

$$V(r) - E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \left(E + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D} \right)$$

Tout se passe donc comme si l'énergie cinétique relative de la particule incidente était augmentée de

$$V_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D}$$

On a donc

$$\sigma_{\text{écran}}(E) \simeq \sigma_{\text{sans écran}}(E + V_0)$$

Calculons le produit $\langle \sigma v \rangle$

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{écran}} = \int_0^\infty \frac{dn(E)}{n} \sigma_{\text{écran}}(E) v(E) dE$$

avec

$$\frac{dn(E)}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-E/kT} E^{1/2}$$

Posons $E' = E + V_0$

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{écran}} = \int_{V_0}^\infty \frac{dn(E' - V_0)}{n} v(E' - V_0) \sigma(E') dE'$$

$$\begin{aligned} \frac{dn(E' - V_0)}{n} \cdot v(E' - V_0) &= \text{fonction}(E' - V_0) e^{-E'/kT} \cdot e^{V_0/kT} \\ &\simeq \text{fonction}(E') e^{-E'/kT} e^{V_0/kT} \end{aligned}$$

car V_0 est faible par rapport à l'énergie efficace de réaction.

Donc

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{écran}} = \langle \sigma v \rangle_{\text{sans écran}} \cdot f, \quad f = e^{V_0/kT}$$

où f est le facteur de screening
 Numériquement :

$$\frac{V_0}{kT} = 0.188 Z_1 Z_2 \frac{(\zeta\rho)^{1/2}}{T_6^{3/2}} \quad T_6 = \frac{T}{10^6}$$

Les développements ci-dessus s'appliquent au cas où

$$\frac{V_0}{kT} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D kT} \ll 1$$

c'est-à-dire lorsque V_0 est faible par rapport à l'énergie des particules. Ce cas est dit "*weak screening*". Il s'applique pour $\rho \sim 10^4 \text{ g/cm}^3$. Le facteur f est voisin de l'unité. Pour $\rho \sim 10^6 \text{ g/cm}^3$, on a en général le cas de "*strong screening*", qui demande d'autres approximations. L'effet d'écran devient si fort que l'on a des réactions dont le taux, dépendant surtout de ρ , pourrait être très augmenté (réactions pycno-nucléaires). Cependant, les réactions nucléaires sont fortement contrariées par la cristallisation qui se produit en général dans de telles conditions.

Chapitre 6

Les équations d'état

Une équation d'état lie la pression, la densité et la température d'un fluide. Elle est donc incontournable dans tout modèle de structure interne d'étoile. Dans une large mesure, il est possible en astrophysique d'utiliser celle des gaz parfaits, mais on ne peut s'en contenter dans le cas des astres dits dégénérés.

Comme le milieu stellaire est toujours un mélange de particules de différentes masses (c'est le cas même de l'hydrogène pur, s'il est ionisé), et comme toute équation d'état fait intervenir la masse des particules, il est nécessaire de définir tout d'abord le *poids moléculaire moyen*.

6.1 Poids moléculaire moyen

On définit le poids moléculaire moyen comme étant la *masse en UMA par particule libre*.

Pour le calculer en fonction des abondances des divers éléments présents dans le milieu, écrivons la densité numérique de particules dans un milieu incluant divers éléments j de masse atomique A_j , de fraction de masse X_j , chaque atome ayant libéré E_j électrons :

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H} = \sum_j \underbrace{\frac{\rho X_j}{A_j m_H}}_{\text{nb. d'atomes } j} \underbrace{(1 + E_j)}_{\text{1 noyau} + j \text{ e}^-} \quad (6.1)$$

Il en résulte immédiatement que

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{X_j}{A_j} (1 + E_j) \quad (6.2)$$

Par ailleurs, le nombre d'électrons libres par unité de volume est

$$n_e = \frac{\rho}{m_H} \sum_j \frac{X_j}{A_j} E_j \quad (6.3)$$

et l'on peut définir un poids moléculaire moyen électronique μ_e tel que

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H} \implies \frac{1}{\mu_e} = \sum_j \frac{X_j}{A_j} E_j \quad (6.4)$$

qui est pertinent dans l'expression de la pression électronique pour un gaz parfait :

$$P_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H} kT$$

Définissons encore le nombre moyen E d'électrons libres par atome ou ion :

$$E \equiv \frac{\text{nb. total d'e}^- \text{ libres}}{\text{nb. total d'atomes ou ions}} = \frac{\sum_j \frac{X_j}{A_j} E_j}{\sum_j \frac{X_j}{A_j}} \quad (6.5)$$

Milieu neutre : $E_j = 0 \implies$ Le poids moléculaire moyen μ_0 de la matière neutre est

$$\frac{1}{\mu_0} = \sum_j \frac{X_j}{A_j} \quad (6.6)$$

Milieu complètement ionisé : $E_j = Z_j$ (no. atomique)

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{X_j (1 + Z_j)}{A_j} \quad (6.7)$$

Les spécialistes de la structure interne des étoiles désignent volontiers les fractions de masse de H, de He et des éléments plus lourds par X , Y et Z

respectivement. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
 X &\equiv X_1 \quad \text{fraction de masse de H, } E_1 = 1 \\
 Y &\equiv X_2 \quad \text{fraction de masse de He, } E_2 = 2 \\
 Z &\equiv \sum_{j>2} X_j \quad \text{fraction de masse des "métaux", } E_{j>2} = Z_j \\
 \Rightarrow \frac{1}{\mu} &= 2X + \frac{3}{4}Y + \sum_{j>2} \frac{X_j}{A_j} (1 + Z_j)
 \end{aligned}$$

Or, $(1 + Z_j)/A_j \sim 1/2$, donc on peut écrire, sachant encore que $X + Y + Z = 1$:

$$\frac{1}{\mu} \simeq 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{Z}{2} \simeq \frac{5X + 3 - Z}{4} \quad (6.8)$$

Pour le soleil, les fractions de masse sont à peu près : $X = 0.70$, $Y = 0.28$ et $Z = 0.02$. Voici quelques exemples de poids moléculaire moyen :

- H pur ionisé : $\mu = 1/2$
- He pur ionisé : $\mu = 4/3$
- Métaux ionisés : $\mu \simeq 2$
- Mélange solaire complètement ionisé : $\mu \simeq 1.62$

Le poids moléculaire moyen électronique devient ici

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_j \frac{X_j}{A_j} Z_j \simeq X + \frac{Y}{2} + \frac{1}{2}Z = \frac{1}{2}(2X + Y + Z) \quad (6.9)$$

donc

$$\frac{1}{\mu_e} \simeq \frac{1}{2}(1 + X) \quad (6.10)$$

Milieu partiellement ionisé :

$$\frac{1}{\mu} = \sum_j \frac{X_j}{A_j} (1 + E_j) = \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_e} \quad (6.11)$$

Le nombre moyen d' e^- libres par atome ou ion devient ici :

$$E = \frac{\frac{\rho}{\mu_e m_H}}{\frac{\rho}{\mu_0 m_H}} = \frac{\mu_0}{\mu_e}$$

La masse moyenne par électron libre devient alors

$$\mu_e = \frac{\mu_0}{E} \quad (6.12)$$

et le poids moléculaire moyen du mélange est, par 6.11 :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + E} \quad (6.13)$$

Le plus difficile est d'évaluer E.

6.2 Gaz parfait et pression de radiation

Le milieu stellaire peut être considéré en première approximation comme un gaz parfait dans la plupart des types d'étoiles, et cela jusqu'au centre, malgré l'énorme pression qui y règne.

Question : *Pourquoi ?*

L'équation d'état du gaz parfait peut s'écrire de différentes manières, selon le choix des constantes :

$$P = n k T = \frac{R}{\mu} \rho T = k N_{Av} \rho T = \frac{\rho}{\mu m_H} k T \quad (6.14)$$

avec la constante de Boltzmann $k = 1.3806 \cdot 10^{-16}$ erg K⁻¹ = 1.3806 · 10⁻²³ joule K⁻¹, la constante des gaz $R = 8.31 \cdot 10^7$ erg mole⁻¹ K⁻¹ = 8.31 joule mole⁻¹ K⁻¹, le nombre d'Avogadro $N_{Av} = 1/m_H[g] = 6.02 \cdot 10^{23}$ mole⁻¹ (tel que $R = k N_{Av}$) et la masse de l'atome d'H $m_H = 1.674 \cdot 10^{-24}$ g.

La densité d'énergie radiative peut cependant s'avérer importante, si bien que la **pression de radiation** intervient aussi, et l'équation d'état complète s'écrit :

$$P_{tot} = P_{gaz} + P_{rad} = \frac{k}{\mu m_H} \rho T + \frac{1}{3} a T^4 \equiv \frac{k}{\mu m_H \beta} \rho T \quad (6.15)$$

avec $a = 4\sigma/c = 7.57 \cdot 10^{-15}$ erg cm⁻³ et la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5}$ erg cm⁻² s⁻¹. On définit β comme le rapport

$$\beta = P_{gaz}/P_{tot}$$

Dans le Soleil, la pression de radiation est relativement faible :

$$\left(\frac{P_{rad}}{P_{tot}}\right)_{\odot} \leq 6 \cdot 10^{-4}$$

Cependant, la contribution de la pression de radiation augmente avec la masse stellaire et devient donc non négligeable, voire prépondérante, dans les étoiles massives.

6.3 Gaz dégénéré

A part les photons, le milieu stellaire est constitué essentiellement de *fermions* : e^- et p^+ , particules de spin demi-entier. Or pour ces particules, le principe d'exclusion de Pauli nous dit que l'extension en phase de chaque particule i est

$$d^3p_i d^3q_i \geq h^3$$

Autrement dit, le nombre d'états quantiques autorisés pour une particule dans une cellule élémentaire d'espace de phase de volume h^3 est le *poids statistique*

$$g = \frac{d^3p_i d^3q_i}{h^3} (2S + 1)$$

si on tient compte du spin S . Pour un e^- ou un p^+ , $S = 1/2$ et

$$g = \frac{2 d^3p_i d^3q_i}{h^3}$$

Si de plus les mouvements sont *isotropes*, alors $d^3p = 4\pi p^2 dp$ et

$$g = \frac{8\pi p^2 dp_i d^3q_i}{h^3}$$

Il s'ensuit que, si l'on comprime suffisamment un gaz d' e^- , l'impulsion des électrons va augmenter : $d^3q \searrow \Rightarrow d^3p \nearrow$, ce qui laisse déjà présager une *pression d'origine non thermique*.

Quelles particules sont-elles dégénérées en premier ? La question revient à se demander quelles particules vont être responsables de cette pression non thermique, par exemple lorsque le noyau d'une étoile se contracte sous

l'effet de la gravitation. Pour le savoir, invoquons *l'équipartition de l'énergie* dans un certain volume d'hydrogène ionisé :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_p v_p^2 &= \frac{1}{2} m_e v_e^2 \\ \frac{p_p^2}{m_p} = \frac{p_e^2}{m_e} &\Rightarrow \frac{p_p}{p_e} = \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{1/2} = 42.85 \end{aligned}$$

De manière générale, si on considère des noyaux de masse atomique A , on a

$$\frac{p_N}{p_e} = A^{1/2} \left(\frac{m_H}{m_e} \right)^{1/2} \gg 1 \quad (6.16)$$

Donc, quelle que soit l'énergie, le domaine d'impulsion des noyaux est beaucoup plus grand que le domaine des impulsions des électrons. Par conséquent, **les électrons sont les premiers à se heurter au principe d'exclusion de Pauli**. Soient N fermions d'énergie totale E , distribués de sorte que N_r fermions aient l'énergie E_r , avec

$$E = \sum_r N_r E_r \quad N = \sum_r N_r$$

La distribution d'énergie est celle de Fermi-Dirac :

$$N_r = \frac{g_r}{e^{-\psi + \frac{E_r}{kT}} + 1}$$

C'est le nombre d'états dynamiques dans l'intervalle $[E_r, E_{r+1}]$ multiplié par la probabilité d'occupation d'un état à température T . En passant à la limite pour une distribution continue et isotrope des impulsions, on a le nombre de particules par unité de volume spatial

$$n(p) d^3 p = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} \underbrace{\frac{1}{e^{-\psi + \frac{E}{kT}} + 1}}_{f(\psi, E, T)}$$

$f(\psi, E, T)$ est le taux d'occupation des cellules.

Remarques :

- Un gaz non dégénéré est un gaz pour lequel $f \ll 1$, pour toute valeur de E/kT . Cela signifie donc que $\psi \ll -1$. Dans ce cas

$$f \simeq e^\psi \cdot e^{-E/kT}$$

et la distribution est donnée par la loi de Maxwell–Boltzmann.

- $f = \frac{1}{2}$ pour $\frac{E}{kT} = \psi$. $E_F = \psi kT$ est la *limite* ou *l'énergie de Fermi*.
- Un gaz complètement dégénéré est un gaz pour lequel $\psi \rightarrow \infty$. Pour les énergies inférieures à E_F , on a $f = 1$, tandis qu'au-dessus on a $f = 0$. Notons que si toutes les cellules de l'espace de phase sont occupées par deux particules, alors

$$n(p) d^3p = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3}$$

- Les particules d'un gaz dégénéré ont des vitesses non nulles même pour $T \rightarrow 0$.

6.3.1 Gaz complètement dégénéré

Soit un gaz d'électrons complètement dégénéré. On a $f(\psi, E, T) = 1$, et le nombre total de particules par unité de volume s'obtient en intégrant sur toutes les impulsions de 0 à p_F (impulsion correspondant à l'énergie de Fermi) :

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3$$

De manière générale pour le cas complètement dégénéré, la pression peut s'écrire comme (voir 2.26)

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 v dp$$

Il convient maintenant de distinguer les cas non relativiste et relativiste :

Cas non relativiste :

Puisque $v = p/m_e$, on a

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} p_F^5 \quad (6.17)$$

On peut éliminer p_F sachant que

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad (6.18)$$

et l'on a

$$P_e = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (6.19)$$

$$K_1 = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} \left(\frac{3h^3}{8\pi m_H} \right)^{5/3} \quad (6.20)$$

Cas relativiste :

Ici, $v \simeq c$, donc

$$P_e = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 dp = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4 \quad (6.21)$$

$$\Rightarrow P_e = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (6.22)$$

$$K_2 = \frac{hc}{8m_H} \left(\frac{3}{\pi m_H} \right)^{1/3} \quad (6.23)$$

Dans les deux cas, **la pression est indépendante de la température :**

$$P = P(\rho, \mu_e)$$

Cas partiellement relativiste :

Pour examiner le cas intermédiaire, remarquons d'abord que $p = \gamma m_0 v$, avec $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$. On peut montrer facilement (à faire en exercice) que

$$v = \frac{p/m_0}{\left[1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

La pression vaut alors

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int \frac{(p/m_0) p^3 dp}{\left[1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

et, par le changement de variable $\sinh \theta = \frac{p}{m_0 c}$:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} m_0^4 c^5 \int_0^{\theta_F} \frac{\sinh^4 \theta \cosh \theta d\theta}{(1 + \sinh^2 \theta)^{1/2}}$$

Le dénominateur de l'intégrand vaut $\cosh \theta$, si bien qu'il reste une intégrale que l'on peut intégrer par parties. Cela donne, compte tenu des propriétés des \sinh et \cosh (à faire en exercice) :

$$\int_0^{\theta_F} \sinh^4 \theta d\theta = \frac{1}{4} \sinh^3 \theta_F \cosh \theta_F - \frac{3}{16} \sinh(2\theta_F) + \frac{3}{8} \theta_F$$

En posant $x = \sinh \theta_F = p_F / m_0 c$, on a (sachant que $\arg \sinh(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|$) :

$$8 \int_0^{\theta_F} \sinh^4 \theta d\theta = x(x^2 + 1)^{1/2} (2x^2 - 3) + 3 \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

et finalement

$$P = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3 h^3} f(x) \quad (6.24)$$

avec

$$f(x) = x(x^2 + 1)^{1/2} (2x^2 - 3) + 3 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad (6.25)$$

Noton que la densité peut s'écrire ici :

$$\rho = \mu_e m_H \cdot \frac{8\pi}{3 h^3} p_F^3 = \frac{8\pi}{3} \mu_e m_H \left(\frac{m_0 c}{h}\right)^3 x^3 \quad (6.26)$$

Le gaz complètement dégénéré partiellement relativiste est donc gouverné par les deux équations paramétriques 6.24 et 6.26.

On peut vérifier que l'on retrouve les deux cas extrêmes :

Cas N.R. ($x \ll 1$) : Un développement en série de Taylor finit par donner

$$f(x) \rightarrow \frac{8}{5} x^5$$

et on retrouve

$$P = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

Cas R. ($x \gg 1$) :

$$f(x) \rightarrow 2x^4 \Rightarrow P = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}$$

6.3.2 Gaz partiellement dégénéré

Entre l'état de gaz parfait et celui de gaz complètement dégénéré d'électrons, il y a une suite continue d'états partiellement dégénérés. La densité numérique d'électrons est

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{-\psi + \frac{E}{kT}} + 1}$$

et en invoquant une fois de plus 2.26, la pression s'écrit :

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty v \frac{p^3 dp}{e^{-\psi + \frac{E}{kT}} + 1}$$

Quant à la densité d'énergie,

$$U = \int_0^\infty E n(p) d^3 p = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{E p^2 dp}{e^{-\psi + \frac{E}{kT}} + 1}$$

Pour des densités croissantes à $T = \text{const.}$, un gaz passera par les stades de : gaz parfait - partiellement dégénéré - complètement dégénéré non relativiste - complètement dégénéré partiellement relativiste - complètement dégénéré relativiste.

Gaz partiellement dégénéré non relativiste :

Dans ce cas la fonction f ne se réduit plus à la fonction "escalier", et il faut en garder la forme générale. On a ici $E = \frac{p^2}{2m_e}$. Posons $x = \frac{E}{kT} = \frac{p^2}{2m_e kT}$:

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{8\pi}{h^3} \frac{(2m_e kT)^{3/2}}{2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^{-\psi+x} + 1} \\ &= \frac{4\pi}{h^3} (2m_e kT)^{3/2} F_{1/2}(\psi) = \frac{\rho}{\mu_e m_H} \end{aligned}$$

On voit apparaître l'une des intégrales de Fermi, lesquelles sont définies par

$$F_n(\psi) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^{-\psi+x} + 1}$$

Elles sont tabulées pour $F_{1/2}$, $F_{3/2}$. Il existe également des développements en série dans plusieurs cas intéressants¹.

Sachant que $v = p/m_e$, la pression devient

$$P = \frac{8\pi}{3 h^3 m_e} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{e^{-\psi+E/kT} + 1} = \frac{8\pi}{3 h^3} (2 m_e)^{3/2} (kT)^{5/2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^{-\psi+x} + 1}}_{F_{3/2}(\psi)}$$

L'équation d'état est donc définie par les deux équations paramétriques

$$P = \frac{8\pi}{3 h^3} (2 m_e kT)^{3/2} kT F_{3/2}(\psi)$$

$$\rho = \frac{4\pi}{h^3} (2 m_e kT)^{3/2} \mu_e m_H F_{1/2}(\psi)$$

Cas de dégénérescence très faible ($\psi \ll -1$)

$$F_n(\psi) \longrightarrow e^\psi \int_0^\infty e^{-x} x^n dx$$

L'intégrale fait partie d'une famille d'intégrales définies dont la solution est connue :

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$$

Or la fonction gamma jouit de la propriété de récurrence

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \Gamma(1.5) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \text{donc } F_{1/2}(\psi) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^\psi \\ \Gamma(2.5) &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} & F_{3/2}(\psi) &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} e^\psi \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} P &= \frac{8\pi}{3 h^3} (2 m_e kT)^{3/2} kT \frac{3}{4} \sqrt{\pi} e^\psi \\ \rho &= \frac{4\pi}{h^3} (2 m_e kT)^{3/2} \mu_e m_H \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^\psi \end{aligned}$$

¹voir Cox and Giuli, Principles of stellar structure, p. 1143

Dans ce cas, on vérifie aisément que la pression électronique suit la loi des gaz parfaits

$$\frac{P}{\rho} = \frac{kT}{\mu_e m_H}$$

Cas de dégénérescence très forte ($\psi \gg 1$)

Les fonctions de Fermi deviennent

$$F_n(\psi) = \int_0^\psi x^n dx = \frac{\psi^{n+1}}{n+1}$$

Question : Pourquoi la limite supérieure d'intégration est-elle prise égale à ψ ?

On montrera en exercice que dans ce cas, l'équation d'état devient

$$P = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

avec K_1 donné par l'expression 6.20.

Remarque :

On peut également obtenir les expressions de la densité d'énergie interne, et vérifier que $P = \frac{2}{3} u$.

6.3.3 Conséquences importantes de la dégénérescence du gaz :

La conséquence la plus remarquable concerne la

Stabilité des réactions thermonucléaires :

Milieu non dégénéré, gaz parfait :

1. Supposons qu'un excès d'énergie δQ soit produit au centre :
2. $T \nearrow$
3. \Rightarrow expansion car $T \nearrow \Rightarrow P \nearrow$ (couplage $P(\rho, T)$)
4. $\Rightarrow E_{pot} \nearrow$ mais $E_{int} \searrow$ (théorème du viriel) $\Rightarrow T \searrow$

5. taux de réactions nucléaires $\varepsilon \searrow \Rightarrow \delta Q < 0$

\Rightarrow **Réacteur nucléaire stable !** Il y a auto-contrôle des réactions nucléaires dans une étoile où la loi des gaz parfaits prédomine.

Milieu dégénéré : $P = P(\rho)$

1. Excès d'énergie δQ au centre
2. $T \nearrow$
3. **Pas d'expansion**, car P indépendant de T
4. Taux de réactions nucléaires $\varepsilon \nearrow$
5. $\Rightarrow \delta Q > 0 \Rightarrow \delta Q \gg 0$
6. **Explosion !**

Les réactions nucléaires s'emballent en milieu dégénéré.

Une autre conséquence remarquable est la

Relation masse-rayon des astres dégénérés :

On montre (cf. exercices) que le rayon d'une naine blanche est d'autant plus petit que sa masse est grande.

Enfin, signalons l'effet de la

Contraction stellaire :

Lorsque l'équation d'état de gaz parfait domine, la contraction d'une étoile s'accompagne d'un réchauffement du gaz et d'une émission de rayonnement². Dans le cas du gaz dégénéré, on peut avoir réchauffement dans certains cas, mais refroidissement dans d'autres. Dans ces derniers cas, l'explication réside dans le fait que pour occuper des états d'impulsion plus élevés, comme le commande le principe d'exclusion de Pauli, les électrons sont obligés de prélever leur énergie quelque part, et le réservoir idoine est alors l'énergie thermique des ions. Autrement, si l'énergie gravitationnelle se convertit en quantité suffisante en énergie thermique, il y aura réchauffement.

²Voir cours de Structure interne des étoiles (école doctorale)

6.4 Effets électrostatiques

Aux densités importantes, il devient insuffisant de considérer les particules comme des masses ponctuelles sans charge, et il faut tenir compte des interactions coulombiennes entre particules chargées. Tenir compte des interactions coulombiennes aura des implications sur la pression du gaz, qui deviendra différente de celle du gaz parfait ou du gaz dégénéré. De plus, les niveaux atomiques et les potentiels d'ionisations sont affectés, les réactions nucléaires sont influencées et la conduction (transport d'énergie par les électrons libres) peut devenir non négligeable (contrairement au cas du gaz parfait, cf. exercices).

En présence de forces, l'énergie interne d'un gaz monoatomique doit inclure non seulement l'énergie cinétique des particules, mais aussi l'énergie potentielle des interactions :

$$U = \sum \frac{p^2}{2m} + \Phi$$

où Φ est l'énergie potentielle, qui dépend de la distance moyenne entre particules, et donc de la densité. Comme la pression est donnée par la variation d'énergie interne associée à une compression adiabatique,

$$dU_{ad} = -PdV$$

le fait que les interactions coulombiennes dépendent de la densité implique une pression correspondante.

Pour étudier l'ampleur des effets électrostatiques, il faut d'abord introduire une notion utilisée en physique du solide, le rayon de Debye–Hückel, qui permet d'étudier le cas d'un gaz *presque parfait*, c'est-à-dire où l'énergie de Coulomb reste faible vis-à-vis de l'énergie cinétique kT .

6.4.1 Rayon de Debye–Hückel

Chaque charge va polariser dans une certaine mesure son environnement, et on peut considérer qu'en moyenne chaque ion est entouré d'un nuage à symétrie sphérique d'électrons et de ions ; ce nuage n'est pas homogène du point de vue de la charge électrique, puisque les électrons auront tendance à s'accumuler au voisinage immédiat du ion, tandis que les autres ions en resteront plus éloignés.

Soit un ion quelconque de charge Z , entouré d'un nuage d'électrons et d'autres ions i . Le potentiel autour de ce ion, dû à toutes les charges, sera un potentiel de Coulomb avec écran $\Phi(r)$ obéissant à l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho_q$$

où ρ_q est la densité de charges au point considéré. L'énergie potentielle de chaque charge Z_i dans le champ $\Phi(r)$ du ion et des charges de son voisinage supposé sphérique, sera $Z_i\Phi(r)$. On peut alors appliquer la statistique de Boltzmann pour calculer la densité moyenne n_i de ions à distance r du ion central, par rapport à la densité moyenne *non perturbée* (i.e. pour $\Phi = 0$) n_{0i} :

$$n_i = n_{0i}e^{-Z_i e\Phi/kT} \quad (6.27)$$

(on voit qu'il ne s'agit que d'une perturbation, puisque selon l'hypothèse de départ $Z_i e\Phi \ll kT$, l'exponentielle est proche de 1). Pour des raisons pratiques, on pose $Z = -1$ pour les électrons, si bien que la densité électronique locale n_e s'écrira :

$$n_e = n_{0e}e^{+e\Phi/kT} \quad (6.28)$$

On voit bien que $n_e > n_{0e}$ et $n_i < n_{0i}$, conformément au fait que les électrons tendent à être plus nombreux au voisinage des ions alors que les autres ions tendent à éviter leurs semblables.

Développons les équations précédentes au premier ordre :

$$n_i = n_{0i} \left(1 - \frac{Z_i e \Phi}{kT} \right)$$

$$n_e = n_{0e} \left(1 + \frac{e\Phi}{kT} \right)$$

La densité de charge

$$\rho_q = \sum_i n_i Z_i e - n_e e$$

devient

$$\rho_q = \underbrace{\sum_i n_{0i} Z_i e - n_{0e} e}_{=0} - \sum_i \frac{n_{0i} Z_i^2 e^2 \Phi}{kT} - \frac{n_{0e} e^2 \Phi}{kT}$$

Le premier terme du membre de droite est nul à cause de la neutralité électrique, qui doit nécessairement régner en l'absence de perturbation. La dernière équation devient

$$\rho_q = \frac{-\Phi e^2}{kT} \chi \cdot n \quad (6.29)$$

$$\text{avec } n = \sum_i n_{0i} + n_{0e} \quad (6.30)$$

$$\text{et } \chi = \sum_i \frac{n_{0i}}{n} Z_i (Z_i + 1) \quad (6.31)$$

χ est une charge effective, dont l'expression résulte de la neutralité de la matière non perturbée : $n_{0i} Z_i = n_{0e}$. En écrivant

$$n_{0i} = \frac{\rho X_i}{A_i m_H} = N_{AV} \frac{\rho X_i}{A_i} \quad \text{et} \quad n = \frac{\rho}{\mu m_H} = N_{AV} \frac{\rho}{\mu}$$

χ devient

$$\chi = \mu \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i (Z_i + 1) \equiv \mu \zeta \quad (6.32)$$

avec

$$\zeta = \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i (Z_i + 1) \quad (6.33)$$

Introduisons à présent la densité de charge 6.29 dans l'équation de Poisson, en admettant la symétrie sphérique :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r\Phi)}{dr^2} = \frac{4\pi e^2}{kT} n \chi \Phi \equiv \frac{\Phi}{r_D^2} \quad (6.34)$$

Cette équation définit le **rayon de Debye-Hückel**

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n \chi}} \quad (6.35)$$

Il s'agit maintenant de voir comment le potentiel est affecté. Pour cela, écrivons l'équation de Poisson sous la forme

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d(r\Phi)} \left[\frac{d(r\Phi)}{dr} \right]^2 = \frac{r\Phi}{r_D^2}$$

(on voit qu'on se ramène en effet à 6.34, car $\frac{1}{2} \cdot \frac{d(r\Phi)}{dr} \frac{d^2(r\Phi)}{d(r\Phi)dr} = \frac{r\Phi}{r_D^2}$).

En intégrant, il vient

$$\frac{1}{2} d \left[\frac{d(r\Phi)}{dr} \right]^2 = \frac{r\Phi}{r_D^2} d(r\Phi) \implies \frac{1}{2} \left[\frac{d(r\Phi)}{dr} \right]^2 = \frac{r^2\Phi^2}{2r_D^2} + const$$

si bien que

$$\frac{d(r\Phi)}{dr} = \pm \frac{r\Phi}{r_D}$$

On retient le signe $-$ puisque le gradient doit être négatif, et la constante est nulle car $d(r\Phi)/dr \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$. Une seconde intégration donne

$$\ln(r\Phi) = -\frac{r}{r_D} + const' \implies \Phi = const' \frac{e^{-r/r_D}}{r}$$

Si $r_D \rightarrow \infty$, on doit retrouver le potentiel d'une charge isolée $\frac{Ze}{r}$, par conséquent $const' = Ze$. Le potentiel de la charge Ze avec effet d'écran est donc

$$\Phi = \frac{Ze}{r} e^{-r/r_D} \quad (6.36)$$

Le potentiel avec écran décroît donc plus rapidement que le potentiel de la charge isolée. Le rayon de Debye r_D est le rayon pour lequel l'effet d'écran réduit le potentiel d'un facteur e par rapport au potentiel de la charge isolée.

Remarque :

Dans le système d'unités choisi, on a

$$e^2 = 23.07 \cdot 10^{-20} \text{cm} \cdot \text{erg}.$$

6.4.2 Effets électrostatiques sur la pression gazeuse

Pour le domaine de validité du modèle de Debye–Hückel, $r/r_D \ll 1$, le potentiel avec écran peut être développé en série au premier ordre, afin d'obtenir le potentiel à la position de Z , dû à toutes les autres charges :

$$\Phi = \frac{Ze}{r} e^{-\frac{r}{r_D}} \simeq \frac{Ze}{r} - \frac{Ze}{r_D} \quad (6.37)$$

Le premier terme est le potentiel de Coulomb du ion lui-même, tandis que le second terme ne peut être que le potentiel au voisinage de la charge Ze

dû à l'interaction de cette charge avec toutes les autres du milieu³. L'énergie potentielle de la charge Ze due à son interaction électrostatique avec toutes les autres charges est donc

$$E_{ES} = -\frac{Z^2 e^2}{r_D} \quad (6.38)$$

On ne s'intéresse qu'à l'énergie due à l'effet d'écran, *i.e.* due aux écarts à la neutralité. Cette énergie tend vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$. On voit qu'elle est négative, ce qui traduit le fait que le ion et "son" nuage d'électrons forment un système faiblement lié : il faut fournir de l'énergie pour les séparer. L'énergie de liaison de la charge Ze est la même que celle de deux charges ponctuelles Ze et $-Ze$ qui seraient séparées d'une distance r_D .

Cette énergie négative a pour effet de réduire la pression dans le milieu. Si n_i est la concentration des ions de type i et de charge Z_i , alors la densité d'énergie totale associée à l'interaction électrostatique est

$$u_{ES} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r_D} \sum_i n_i Z_i^2$$

(Le fait d'additionner les énergies individuelles implique que chaque ion a été compté deux fois, puisqu'il s'agit d'interactions mutuelles, d'où l'introduction du facteur 1/2). Comme l'interaction se propage à la vitesse c , on peut dire que la pression associée à l'interaction électrostatique est :

$$\begin{aligned} P_{ES} &= \frac{1}{3} u_{ES} & (6.39) \\ &= -\frac{1}{3} \frac{e^2 \cdot e \sqrt{4\pi n \chi}}{(kT)^{1/2} 2} \underbrace{\sum_i Z_i^2 n_i}_{\simeq n\chi} \end{aligned}$$

$$P_{ES} = -\frac{1}{3} e^3 \left(\frac{\pi}{kT} \right)^{1/2} (n\chi)^{3/2} \quad (6.40)$$

Rappelons que

$$n\chi = \frac{\rho}{\mu m_H} \mu \zeta = \frac{\rho \zeta}{m_H}$$

³Le potentiel à la position de la charge Ze , dû aux autres charges, est le même que si cette charge Ze était entourée d'une charge $-Ze$ répartie sur une sphère dont le rayon serait celui de Debye-Hückel.

donc

$$P_{ES} = -\frac{e^3}{3} \left(\frac{\pi}{kT}\right)^{1/2} \left(\frac{\zeta\rho}{m_H}\right)^{3/2} \quad (6.41)$$

avec ζ donné par 6.33. La pression électrostatique est négative : lors d'une compression, les charges *fournissent* du travail au lieu d'en absorber⁴.

Finalement, la pression totale $P_{tot} = P_{gas} + P_{rad} + P_{ES} + \dots$ est donc réduite par les interactions électromagnétiques, et le rapport P_{ES}/P_{gas} vaut :

$$\frac{P_{ES}}{P_{gas}} = \frac{\mu m_H P_{ES}}{k \rho T} = -0.032 \frac{\rho^{1/2}}{T_6^{3/2}} \mu \zeta^{3/2} \quad (6.42)$$

avec $T_6 = T/10^6$ K et ρ en g cm^{-3} . Les effets électrostatiques sont faibles mais pas tout à fait négligeables dans le Soleil :

$$\left(\frac{P_{ES}}{P_{gas}}\right)_{\odot} \simeq -0.015$$

Notons que le rapport ρ/T^3 varie peu avec la profondeur, et qu'il en va donc de même des effets électrostatiques relatifs. L'approximation $r/r_D \ll 1$ qui justifie les développements ci-dessus impliquent $\frac{P_{ES}}{P_{gas}} \ll 1$, et on peut montrer que cela se traduit, pour une composition standard ($X = 0.73$, $Z = 0.02$), par la condition

$$T \gg 1.37 \cdot 10^5 \rho^{1/3}$$

On peut aussi montrer que, pour une étoile de masse M ,

$$\frac{P_{ES}}{P_{gas}} \sim \frac{1}{\mu^{1/2} M}$$

On voit donc que ce sont les étoiles de *petite masse* de la séquence principale qui sont le plus affectées par les corrections électrostatiques.

6.4.3 Dépression du continu et potentiel effectif d'ionisation

Selon 6.38, l'énergie d'un électron dans le système ion+nuage d' e^- est

$$E_{ES} = -\frac{e^2}{r_D}$$

⁴intuitivement, on peut comprendre cela en disant qu'une pression négative s'apparente à une tension : deux masses reliées par un élastique tendu présentent une "pression" négative

alors même que cet électron est censé être “libre” (et il l’est dans la mesure où il peut naviguer de l’entourage d’un ion à celui d’un autre, son énergie cinétique le lui permettant en moyenne). Par conséquent, le niveau d’énergie du continu est abaissé à une valeur inférieure à zéro, et le potentiel d’ionisation s’en trouve réduit de la même valeur. Cependant, un autre effet intervient encore, du fait que le potentiel n’a plus exactement une dépendance en $1/r$. Le potentiel avec écran s’écrit au premier ordre, pour un noyau muni d’un seul électron lié :

$$V \simeq \frac{Ze}{r} - \frac{(Z-1)e}{r_D} \quad \text{avec } r \ll r_D$$

Le second terme est le potentiel au voisinage du ion de charge $Z-1$, dû à l’interaction de cette charge avec toutes les autres charges du milieu. Cette formule suppose que le rayon de l’orbite de l’électron est $\ll r_D$ ⁵. Ainsi, l’énergie du niveau fondamental de l’électron lié ne sera-t-elle pas $-Ze^2/a$, a étant le rayon de l’orbitale, mais

$$E = -\frac{Ze^2}{a} + \frac{(Z-1)e^2}{r_D} \quad (6.43)$$

si bien qu’elle s’en trouve relevée de $(Z-1)e^2/r_D$. Cumulant les deux effets, on obtient un *potentiel d’ionisation effectif* (voir Fig. 6.1)

$$I_{\text{eff}} = -\frac{e^2}{r_D} - E = I_0 - \frac{Ze^2}{r_D} \quad (6.44)$$

où I_0 est le potentiel sans perturbation. Ainsi l’ionisation est-elle facilitée aux grandes densités, par le seul fait que le gaz ne se comporte plus en tant que gaz parfait. Plus le rayon de Debye est faible, plus facile sera l’ionisation ; à la limite, un élément peut être **ionisé par effet de pression**, à température donnée et au-delà d’une certaine densité.

L’effet étudié ici implique qu’un certain nombre de niveaux excités qui restent liés en laboratoire, peuvent très bien se trouver au-dessus du continu en milieu stellaire. Cela facilite considérablement le calcul des *fonctions de partition*, qui autrement seraient d’ailleurs des séries infinies divergentes. En effet, les niveaux excités sont très nombreux en l’absence de perturbation.

⁵la formule ci-dessus se distingue de 6.37 par le fait qu’il y a un électron lié, ce qui abaisse la charge du ion d’une unité quant à son effet sur les charges libres voisines, alors que 6.37 supposait le ion dépourvu de tout électron lié

Par ailleurs, le calcul exact des opacités radiatives est fortement affecté par l'abaissement des potentiels d'ionisation et la modification des niveaux excités.

6.4.4 Effets électrostatiques dans les milieux dégénérés

Dans un gaz dégénéré, l'effet relatif des interactions coulombienne *diminue* avec la *densité*, contrairement au cas du gaz parfait. Cela vient de ce que l'énergie pertinente ici n'est plus kT , mais l'énergie de Fermi E_F , laquelle croît plus rapidement avec la densité que l'énergie électrostatique (rappelons que $E_F \gg kT$ pour un gaz complètement dégénéré).

Rappelons que $E_F = p_F^2/(2m_e)$; combinée avec la relation 6.18 entre ρ et p_F , cette équation nous dit que

$$E_F \propto \rho^{2/3}$$

Quant à l'énergie électrostatique, elle est de l'ordre de Ze^2/r_D , avec $r_D \propto \rho^{-1/2}$ selon 6.35, donc

$$E_{ES} \propto \rho^{1/3}$$

On voit bien que E_F croît plus vite que E_{ES} avec ρ , si bien que les effets électrostatiques deviennent relativement négligeables aux hautes densités, tandis qu'ils peuvent se manifester aux basses densités. C'est la situation inverse de celle du gaz parfait.

Dans un milieu d'égnéré, le gaz d'électrons seul est d'égnéré. Les ions ne le sont pas. Mais si l'énergie électrostatique surpasse l'énergie cinétique kT des ions, alors ceux-ci vont se répartir de manière à maximiser leurs distances mutuelles, autrement dit à minimiser leur énergie potentielle : c'est le phénomène de *crystallisation*, où les ions s'organisent en réseau. Les intérieurs de naines blanches en voie de refroidissement sont dans ce cas. La cristallisation apparaît aussi dans les étoiles à neutrons, quand l'énergie liée aux forces nucléaires l'emporte sur l'énergie de Fermi des neutrons dégénérés.

6.5 Diagramme $\log T$ vs $\log \rho$

Sur ce plan apparaissent les zones où telle ou telle équation d'état prédomine. Il est vrai qu'en un point donné de ce diagramme, plusieurs effets coexistent (par ex. pression de gaz parfait, pression de radiation et pression

électrostatique dans le cas du Soleil), mais il y a en général un effet majoritaire. On définit ici les frontières des zones où un effet domine (voir Fig. 6.2).

6.5.1 Gaz parfait – pression de radiation

Le Soleil est situé dans la zone où la loi des gaz parfaits domine. Malgré la considérable variation de densité et de température entre l'atmosphère et le centre du Soleil, cela est vrai du centre au bord. Pour des températures plus élevées et des densités inférieures, que l'on rencontre dans les étoiles massives, la pression de radiation devient dominante. La frontière est définie par $P_{rad} = P_{gaz}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{3} aT^4 = \frac{k}{\mu m_H} \rho T$$

On obtient donc

$$\log T = \frac{1}{3} \log \rho + \text{const} \quad (6.45)$$

La relation est linéaire, avec une pente 1/3.

Gaz relativiste : Lorsque l'énergie des photons $E = h\nu = kT$ est supérieure à l'énergie de seuil de l'électron de 0.51 MeV, on a

$$\gamma + \gamma \rightleftharpoons e^+ + e^- \quad T = 5.9 \cdot 10^9 K$$

De fait, cette réaction s'amorce à des températures nettement inférieures à la température de seuil, à cause de la distribution d'énergie des photons.

Lorsque les photons et les électrons en équilibre ont une énergie supérieure à celle correspondant à la différence de masse entre neutrons et protons, c'est-à-dire pour

$$\begin{aligned} E &\simeq (m_N - m_P) c^2 = 939.55 - 938.26 \\ &= 1.29 \text{ MeV} \\ &\text{soit } T \simeq 1.5 \cdot 10^{10} K \end{aligned}$$

alors on a l'équilibre

$$p + e^- \rightleftharpoons n + \nu$$

6.5.2 Gaz parfait – gaz dégénéré

La frontière est donnée ici par $P_{gaz} = P_{dég}$

$$\frac{k}{\mu m_H} \rho T = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

On obtient donc

$$\log T = \frac{2}{3} \log \rho + \text{const} \quad (6.46)$$

La relation est à nouveau linéaire, avec cette fois une pente 2/3.

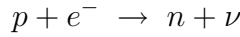
6.5.3 Gaz dégénéré non relativiste – relativiste

A très haute densité, le gaz dégénéré devient relativiste. La limite donnée par $P_{dég.N.R.} = P_{dég.R.}$ devient

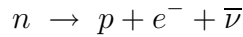
$$K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \Rightarrow$$

$$\log \rho = \text{const} \simeq 6.6 \quad \text{pour } \mu_e = 2 \quad (6.47)$$

Lorsque l'énergie de Fermi des électrons dépasse la différence $(m_N - m_P) c^2 = 1.29 \text{ MeV}$, on a la réaction de neutronisation



qui est la réaction inverse de la désintégration β



Ce processus se produit dans les étoiles à neutrons, pour des noyaux très riches en n . L'électron relativiste doit avoir une impulsion

$$p_F \geq \frac{1.29 \text{ MeV}}{c} = \frac{1.29 \cdot 1.602 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{10}} = 6.89 \cdot 10^{-17} \text{ C G S}$$

ce qui se produit pour une densité

$$\rho \geq \mu_e \frac{8\pi}{3} \frac{m_H}{h^3} p_F^3 = \frac{16\pi}{3} \frac{1.67 \cdot 10^{-24} (6.89 \cdot 10^{-17})^3}{(6.626 \cdot 10^{-27})^3}$$

$$= 3.15 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$$

Note sur les très hautes densités : Entre les densités d'environ 10^6 et 10^{15} kg/dm^3 , divers processus ont lieu, qui se retrouvent dans la structure d'une étoile à neutrons. Mentionnons-les brièvement et qualitativement :

- A partir de $\rho = 8.3 \cdot 10^7 \text{ kg/dm}^3$, l'énergie des électrons devient suffisante pour qu'ils puissent être capturés par les protons contenus dans les noyaux d'atomes. C'est la neutronisation mentionnée plus haut. Des noyaux très riches en neutrons et qui seraient impossibles à produire en laboratoire commencent à apparaître : $Z \sim 50$, $A \sim 200$.
- Vers $\rho = 4.3 \cdot 10^{11} \text{ kg/dm}^3$, la stabilité des noyaux avec $N \gg Z$ diminue tellement qu'ils commencent à perdre leurs neutrons. C'est le "Neutron Drip Point".
- Vers $5 \times 10^{13} \text{ kg/dm}^3$, les noyaux qui subsistent se dissolvent pour former un milieu composé de neutrons dégénérés avec quelques pourcents d'électrons et de protons. Au-dessus de $\rho = 3 \times 10^{14} \text{ kg/dm}^3$, l'équilibre se déplace au profit des muons (quand $E_{\text{électrons}} > \text{masse au repos du muon}$) et des hypérons (quand $E_{\text{neutrons}} > \text{différence de masse entre neutrons et hypérons}$).

Ces transitions se retrouvent dans la structure intérieure d'une **étoile à neutrons**, qui a typiquement $M \simeq 1 M_{\odot}$ et $R \simeq 10 \text{ km}$.

Les propriétés physiques du milieu, et par conséquent la structure des étoiles à neutrons, dépendent très fortement du potentiel nucléaire à très courte distance⁶. Aussi, des déviations importantes peuvent se produire par rapport à un gaz idéal de neutrons dégénérés.

⁶lequel joue un peu ici le rôle que les interaction électromagnétiques jouent dans le cas du milieu où seuls les électrons sont dégénérés

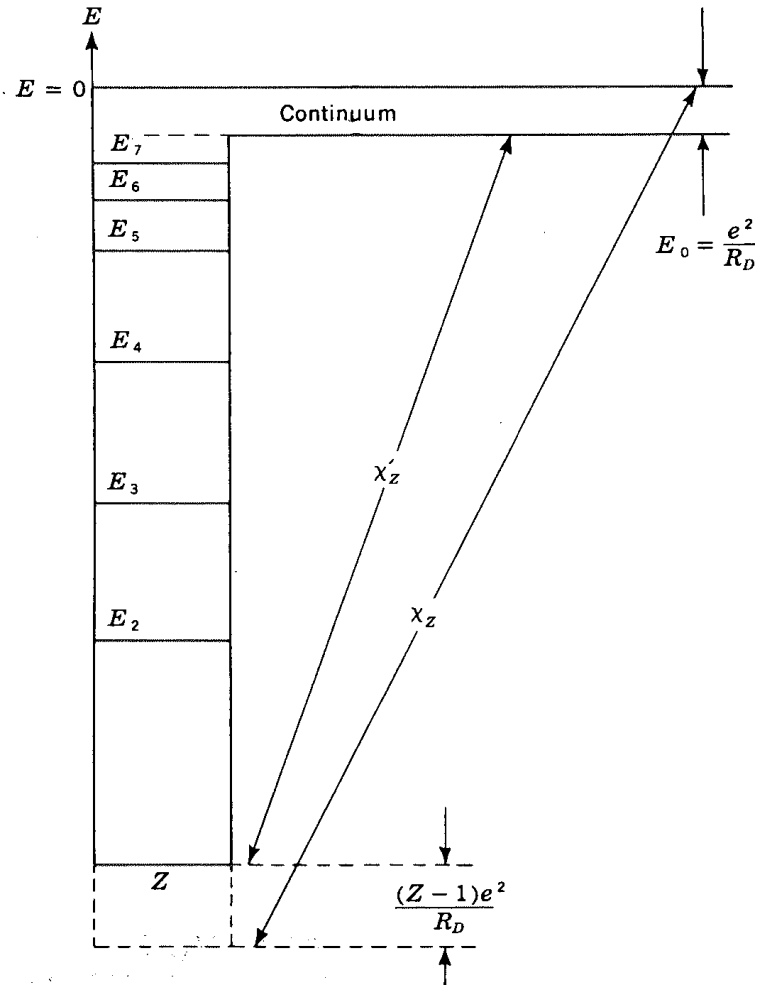


FIG. 6.1 – Potentiel d'ionisation effectif (noté χ'_Z sur cette figure). (Source : D. D. Clayton, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis, McGraw-Hill, 1968).

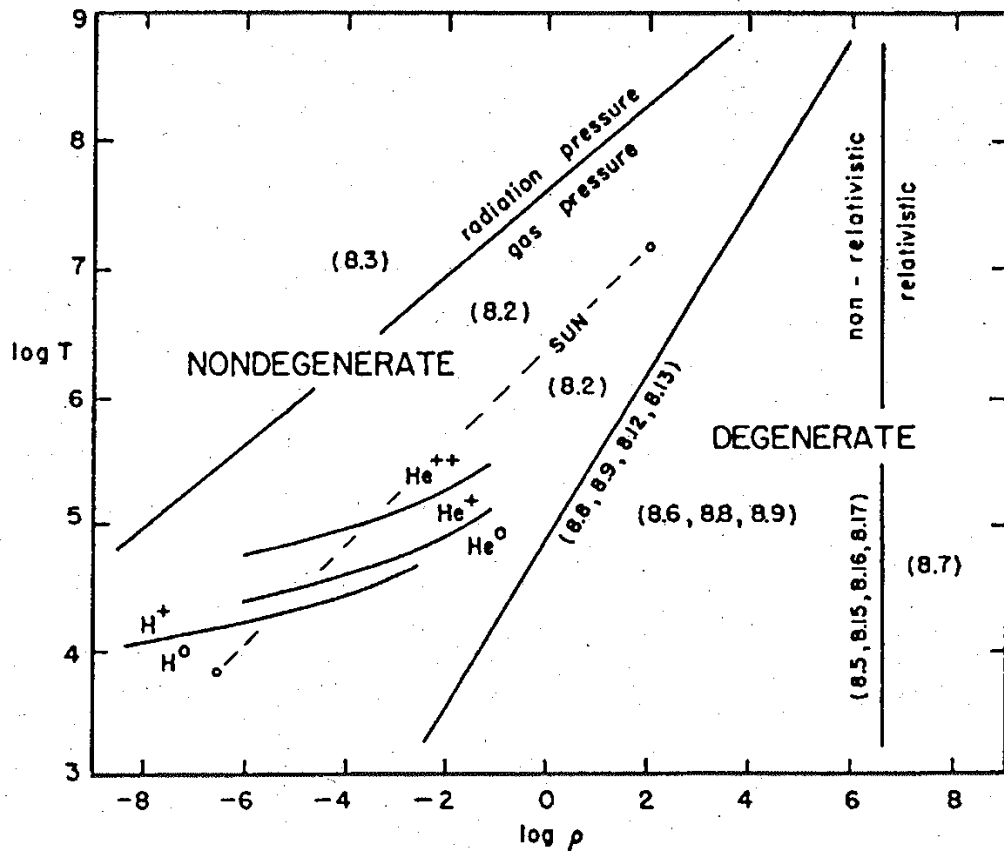


FIG. 6.2 – Diagramme $\log T$ vs $\log \rho$

Chapitre 7

Thermodynamique et structure interne des étoiles

On ne va pas ici retracer en détail ce qui a été vu au cours d'Introduction à l'astrophysique (4e semestre), ou qui sera vu au cours de Structure interne des étoiles (école doctorale), mais voir ou approfondir quelques aspects non abordés au premier et qui faciliteront l'accès au second¹.

7.1 Temps caractéristiques de l'évolution stellaire ; luminosité d'Eddington

L'évolution stellaire est gouvernée par différents phénomènes qui ont chacun leur durée caractéristique. Cette section a pour but d'en rappeler les principaux, ainsi que d'introduire la notion de luminosité limite d'Eddington, qui revêt une grande importance pour les étoiles chaudes.

7.1.1 Le temps de chute libre (free-fall or dynamical time)

Cette notion s'applique lors de l'effondrement gravitationnel d'un nuage moléculaire, tant que ce nuage reste assez optiquement mince pour que la chaleur puisse être évacuée par radiation. Ainsi, il s'agit ici d'un effondrement *isotherme*. Cela revient à négliger la pression, autrement dit à admettre que

¹l'intersection avec les cours mentionnés n'est toutefois pas l'ensemble vide

$|dP/dr| \ll \rho G M_r / r^2$. L'équation du mouvement d'une masse-test située à distance r du centre du nuage supposé à symétrie sphérique se réduit ainsi à

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{G M_r}{r^2}$$

où M_r est la masse contenue à l'intérieur du rayon r . On s'intéresse à la manière dont évolue le rayon en fonction du temps, donc il s'agit d'intégrer l'équation ci-dessus. Comme la masse M_r reste constante au cours du collapse, on peut l'exprimer en fonction de la densité initiale ρ_0 , supposée *uniforme*, et du rayon initial r_0 .

On montrera en exercice que

$$t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{32} \frac{1}{G \rho_0} \right)^{1/2} \quad (7.1)$$

Il est intéressant de constater que ce temps caractéristique ne dépend *que* de la densité initiale du nuage. L'effondrement d'un nuage de densité parfaitement uniforme se fait de manière que la densité augmente à la même vitesse partout ; on parle alors **d'effondrement homologue**. Si, au début du collapse, le nuage est plus dense au centre qu'en périphérie, la densité centrale augmentera plus vite qu'ailleurs.

7.1.2 Le temps de Kelvin-Helmoltz

Il s'agit du temps caractéristique associé à la libération d'énergie gravitationnelle par rayonnement. Supposons qu'une étoile se contracte d'un état initial 1 à un état final 2, i.e. d'un rayon R_1 à un rayon R_2 , avec $R_2 < R_1$. Son énergie potentielle U va devenir plus négative, de même que son énergie totale $E = E_c + U$ (où E_c est la somme des énergies cinétiques des particules qui constituent l'étoile). Toutefois, le théorème du viriel² dit que, dans le cas d'un gaz parfait, l'énergie totale d'un système de particules en équilibre vaut la moitié de l'énergie potentielle :

$$2 E_c + U = 0 \iff E = \frac{1}{2} U$$

²voir par exemple Landau & Lifschitz, Mécanique, p. 36 de l'édition Mir, ou encore S. Chandrasekhar, Introduction to stellar structure, Dover, 1939, pp. 49 et suivantes. Le viriel est aussi introduit dans le cours Astrophysique III, ainsi que dans le cours de Structure interne des étoiles (école doctorale).

Cela implique que seule la moitié de la variation d'énergie potentielle va être rayonnée ; l'autre moitié se retrouve sous forme d'énergie cinétique des particules composant l'étoiles, c'est-à-dire sous forme d'énergie thermique.

Calculons donc l'énergie potentielle U d'une étoile sphérique. Pour une masse M_r et une couronne sphérique dM_r , on définit l'élément d'énergie potentielle dU par le travail qu'effectue la force de gravitation pour amener l'élément de masse dM_r de l'infini à r :

$$\begin{aligned} dU &= \int_r^\infty \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = - \int_r^\infty \frac{G M_{r'} dM_{r'}}{r'^2} dr' = -G M_r dM_r \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} \\ &= - \frac{G M_r dM_r}{r} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle totale s'obtient en intégrant sur la masse, et cela requiert, en toute rigueur, la connaissance du profil de densité en fonction de la profondeur. Sous l'hypothèse grossière, mais suffisante pour obtenir un ordre de grandeur, d'une densité uniforme, on peut écrire $M_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ et sortir ρ de l'intégrale, si bien que

$$U = - \int_0^M \frac{G M_r dM_r}{r} \sim - \frac{16\pi^2}{3} G \rho^2 \int_0^R r^4 dr = - \frac{16\pi^2}{15} G \rho^2 R^5 = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Pour estimer le temps de Kelvin–Helmoltz, il suffit de se souvenir que l'énergie rayonnée, qui équivaut forcément à la variation de l'énergie mécanique totale du système (au signe près), est égale à la moitié de la variation d'énergie potentielle :

$$-\Delta E = -(E_2 - E_1) = -\frac{1}{2}\Delta U \sim \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R}$$

où l'on a considéré que l'étoile a passé d'un rayon $R_1 = \infty$ à un rayon $R_2 = R$. Le temps de Kelvin–Helmoltz t_{KH} est donné par le rapport de cette énergie à la luminosité de l'étoile, supposée constante :

$$t_{KH} = \frac{|\Delta E|}{L} \sim \frac{3}{10} \frac{GM^2}{RL} \quad (7.2)$$

Rappelons que le facteur 3/10 ne vaut que pour une sphère homogène et qu'un facteur différent intervient pour une étoile réelle, mais cela n'affecte guère l'ordre de grandeur du résultat.

Pour le soleil, on a

$$t_{KH}^\odot \sim 10^7 \text{ ans} \quad (7.3)$$

On voit que cette durée est insuffisante pour expliquer celle des temps géologiques. Le soleil doit donc bénéficier d'une autre source d'énergie, qui est restée mystérieuse jusqu'à la découverte de l'efficacité des réactions de fusion nucléaire. Cependant, l'énergie gravitationnelle joue un rôle important dans certaines phases de l'évolution stellaire, notamment lors de la contraction de la proto-étoile.

7.1.3 Le temps nucléaire

C'est le temps obtenu en divisant l'énergie de fusion nucléaire disponible dans une étoile, par la luminosité de celle-ci.

$$t_{nucl} = \frac{E_{nucl}}{L}$$

avec la réserve de combustible nucléaire

$$E_{nucl} \sim X \cdot f \cdot \Delta M \cdot c^2$$

où X est la proportion de combustible dans l'étoile, f est la fraction de masse de la région de l'étoile où ont lieu les réactions nucléaires pertinentes et ΔM est le défaut de masse qui résulterait de la réaction, si elle impliquait la masse entière de l'étoile.

Pour le soleil, par exemple, où l'hydrogène fusionne en helium, on a $X \sim 0.70$, $f \sim 0.07$ et $\Delta M \simeq 0.007 M_{\odot}$, car la masse de 4 protons se monte à 4.032 UMA tandis que celle d'un noyau d'He ne vaut que 4.003 UMA, d'où un défaut de masse relatif de 0.007. On a donc pour le Soleil

$$t_{nucl}^{\odot} \simeq \frac{0.70 \cdot 0.07 \cdot 0.007 \cdot M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} \sim 1.61 \cdot 10^{17} \text{ s} \sim 5.1 \cdot 10^9 \text{ ans} \quad (7.4)$$

La véritable durée de vie du Soleil est plutôt de 10^{10} ans, selon des calculs détaillés, mais on voit que ce raisonnement simple nous donne un ordre de grandeur correct.

7.1.4 Période de rotation minimale d'une étoile

Il s'agit de la période correspondant à la vitesse équatoriale maximale possible, définie comme celle au-delà de laquelle l'étoile est brisée par la force centrifuge (*break-up velocity*). Un ordre de grandeur de cette vitesse

s'obtient en égalant les accélérations centripète et de gravité à la surface de l'étoile :

$$\frac{v_{eq,max}^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \implies v_{eq,max} = \sqrt{GM/R}$$

C'est la vitesse d'un satellite qui évoluerait sur une orbite rasante. La période correspondante est

$$P_{rot,min} = \frac{2\pi R}{v_{eq,max}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{(GM)^{1/2}} \propto \left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right)^{-1/2} \quad (7.5)$$

On voit qu'elle ne dépend que de la densité moyenne de l'étoile. Pour le Soleil, on obtient $v_{eq,max} \simeq 438$ km/s et $P_{rot,min} \simeq 10^4$ s \simeq 2h 47mn. Il faut garder à l'esprit qu'il ne s'agit que d'une approximation, car une étoile en rotation n'est plus sphérique mais ellipsoïdale, avec un rapport d'axes qui tend vers 3/2 lorsque $v_{eq} \rightarrow v_{eq,max}$, si l'enveloppe est radiative.

7.1.5 Luminosité d'Eddington

On avait vu que dans un intérieur stellaire, le gradient de pression radiative est relié au flux bolométrique par la relation 3.3, que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} \frac{L}{4\pi r^2}$$

où $\bar{\kappa}$ est l'opacité moyenne de Rosseland.

Imaginons une étoile très chaude, où la pression de radiation domine sur la pression gazeuse : on a $P_{rad} \rightarrow P$ (où P est la pression totale), si bien que la stabilité de cette étoile, gouvernée par l'équation hydrostatique

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \rho$$

va dépendre essentiellement de la pression de radiation. En identifiant le gradient de pression radiative avec celui de la pression totale, on obtient la luminosité maximale que peut avoir une étoile de masse donnée tout en restant stable :

$$L_{Ed} = 4\pi Gc \frac{M}{\bar{\kappa}} \quad (7.6)$$

Pour une luminosité supérieure à cette **limite d'Eddington**, il y a perte de masse dûe à la pression de radiation. Cette notion apparaît dans plusieurs contextes : novae, disques d'accrétion, phases tardives de l'évolution stellaire...

Par ailleurs, si l'on considère les seules étoiles de séquence principale, celles qui sont concernées par cette limite auront une température effective telle (~ 50000 K) que l'hydrogène au moins sera totalement ionisé dans leur atmosphère. Ainsi, la source majeure d'opacité sera la diffusion Thomson, dont on peut écrire le coefficient comme (voir exercices) :

$$\kappa_{Th} \simeq 0.2 \cdot (1 + X)$$

où $X \sim 0.7$ est la fraction de masse d'hydrogène. En introduisant cela dans 7.6, on trouve

$$L_{Ed} \simeq 1.5 \cdot 10^{38} \frac{M}{M_{\odot}} \text{ erg s}^{-1} \quad (7.7)$$

$$\simeq 3.8 \cdot 10^4 \frac{M}{M_{\odot}} L_{\odot} \quad (7.8)$$

Une étoile de $90 M_{\odot}$ sur la séquence principale a une luminosité environ trois fois plus faible que sa luminosité d'Eddington. L'étoile η Carinae, dont la masse est évaluée à $100 - 120 M_{\odot}$, a une luminosité très proche de la limite d'Eddington.

7.2 Milieu partiellement ionisé

L'ionisation est un processus essentiel en astrophysique, que ce soit dans le milieu interstellaire, les étoiles, les noyaux de galaxies, etc. L'ionisation partielle, en particulier, modifie beaucoup les fonctions thermodynamiques du milieu, par exemple C_p et C_v . Elle intervient de manière cruciale dans le mécanisme de pulsation des céphéides, par exemple. Cette section est d'ailleurs largement puisée dans l'article de N. Baker et R. Kippenhahn (1962, *Zeitschrift für Astrophysik* **54**, 114) qui est précisément consacré aux modèles de céphéides.

Question : *Pourquoi ?*

7.2.1 Taux d'ionisation et pression électronique dans un mélange gazeux

Dans la littérature, on étudie souvent l'ionisation partielle d'un milieu constitué seulement d'hydrogène pur. Cependant, ce traitement ne fait pas appa-

raître le couplage des ionisations des divers éléments, qu'il est pourtant indispensable de traiter si l'on veut construire des modèles réalistes. L'objet de cette section est de montrer comment l'on s'y prend dans le cas – encore simple – d'un mélange d'hydrogène et d'hélium (la théorie se généralise aisément à un plus grand nombre d'éléments partiellement ionisés).

Soit un mélange d' H et d' He partiellement ionisé. On définit les abondances numériques ν_i comme

$$\nu_i = \frac{\text{nombre d'atomes ou d'ions de l'élément } i}{\text{nombre total d'atomes ou d'ions}} \quad (7.9)$$

Ainsi, on aura naturellement $\sum_i \nu_i = 1$. Définissons aussi les proportions d'ionisation

$$X_i^s = \frac{\text{nombre d'atomes } i \text{ dans l'état d'ionisation } s}{\text{nombre d'atomes ou d'ions } i} \quad (7.10)$$

On aura donc pour E , le nombre d'électrons libres par atome ou ion (voir 6.5) :

$$E = \sum_i \nu_i \sum_{s=0}^{Z_i} s X_i^s \quad (7.11)$$

On s'en convainc en constatant que le produit $s X_i^s$ est le nombre, par atome ou ion i , d' e^- libérés par les ions i d'état d'ionisation S ; que $\sum_s \dots$ est le nombre, par atome ou ion i , d' e^- libérés par tous les ions i , tandis que $\nu_i \sum_s \dots$ est le même nombre, mais par atome ou ion (quel que soit son numéro atomique), etc.

On définit encore

$$Y_i^s = \sum_{r=s+1}^{Z_i} X_i^r \quad (7.12)$$

comme le nombre d'atomes i dans les états d'ionisation supérieurs à s , relativement au nombre d'atomes ou d'ions de l'élément i . On peut voir que E s'écrit alors

$$E = \sum_i \sum_{s=0}^{Z_i-1} \nu_i Y_i^s \quad (7.13)$$

Revenons au mélange d'H et d'He :

élément 1 : H, H^+
 élément 2 : He, He^+, He^{++}

Les quantités vues ci-dessus deviennent (N désignant les concentrations) :

$$X_1^1 = \frac{N(H^+)}{N(H)+N(H^+)} \quad X_2^1 = \frac{N(He^+)}{N(He)+N(He^+)+N(He^{++})} \quad X_2^2 = \frac{N(He^{++})}{N(He)+N(He^+)+N(He^{++})}$$

$$Y_1^0 = X_1^1 \quad Y_2^0 = X_2^1 + X_2^2 \quad Y_2^1 = X_2^2$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons les quantités ci-dessus par $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ respectivement. Dès lors,

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \nu_i \sum_s Y_i^s = \nu_1 X_1 + \nu_2 (X_2 + X_3) + \nu_2 X_3 \\ &= \nu_1 X_1 + \nu_2 (X_2 + 2X_3) \end{aligned}$$

Comme X_1 est la proportion d'H ionisé et $1 - X_1$ celle d'H neutre, l'équation de Saha (voir 4.8) nous donne le rapport

$$\frac{X_1 P_e}{(1 - X_1) P_g} = K_1 \quad (7.14)$$

où

$$K_1 = \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{\beta P h^3} \omega_1 e^{-I_1/kT} \quad (7.15)$$

et

$$\omega_1 = 2 \frac{U_{H^+}}{U_H} \quad (7.16)$$

Rappelons que P est la pression totale, et que le produit βP est la pression gazeuse. Notons aussi que l'équation de Saha écrite sous cette forme a été établie sous l'hypothèse du gaz parfait et néglige donc les effets des interactions électrostatiques. Finalement, on a au total les 4 équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_1}{1-X_1} \frac{E}{1+E} &= K_1 \\ \frac{X_2}{1-X_2-X_3} \frac{E}{1+E} &= K_2 \\ \frac{X_3}{X_2} \frac{E}{1+E} &= K_3 \\ \nu_1 X_1 + \nu_2 (X_2 + 2X_3) &= E \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 4 \text{ équations couplées} \\ \text{avec } X_1, X_2, X_3 \text{ et } E \\ \text{comme inconnues} \end{array} \quad (7.17)$$

Les termes K_i sont identiques à K_1 , aux potentiels d'ionisation et aux fonctions de partition près :

$$I_1 = 13.598 \text{ eV} \quad I_2 = 24.587 \text{ eV} \quad I_3 = 54.416 \text{ eV}$$

et

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2 \frac{U_H^+}{U_H} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ \omega_2 &= 2 \frac{U_{He}^+}{U_{He}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4 \\ \omega_3 &= 2 \frac{U_{He}^{++}}{U_{He}^+} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

Ces équations s'appliquent aux milieux où la pression est faible (couches extérieures des étoiles, milieu interstellaire...). Dans les couches profondes des étoiles, tous les éléments sont complètement ionisés par effets électrostatiques (ionisation par effet de pression pour $[\log T - 0.123 \log P] > 4.09$).

Les quatre équations ci-dessus sont résolues par méthode itérative : on suppose d'abord que seul H contribue à E , etc.

7.2.2 Fonctions thermodynamiques

Le calcul des fonctions thermodynamiques (C_p , C_v , ∇_{ad} etc.) fait intervenir l'expression de $P(\rho, T)$ et celle de $U(P, T)$, qui est l'énergie interne par unité de masse. L'énergie interne est la somme de l'énergie cinétique d'agitation thermique, de l'énergie d'ionisation pour les divers degrés d'ionisation de chaque élément, et de l'énergie du rayonnement :

$$\begin{aligned}U &= \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_H} + \frac{1}{\mu_0 m_H} \sum_i \nu_i \sum_{s=0}^{Z_i-1} Y_i^s I_i^s + \frac{aT^4}{\rho} \\ &= \frac{3}{2} \frac{RT}{\mu} + \frac{R}{\mu_0 k} \sum_i \nu_i \sum_{s=0}^{Z_i-1} Y_i^s I_i^s + \frac{3(1-\beta)}{\beta} \frac{RT}{\mu}\end{aligned}$$

La seconde équation s'obtient en exprimant la pression de radiation en fonction de la pression gazeuse, compte tenu de $P_{gaz} = \beta(P_{gaz} + P_{rad})$. En regroupant les termes, on a

$$U = \frac{R}{\mu_0} \left\{ \left[\frac{3}{2} + \frac{3(1-\beta)}{\beta} \right] (1+E) T + \frac{1}{k} \sum_i \nu_i \sum_{s=0}^{Z_i-1} Y_i^s I_i^s \right\} \quad (7.18)$$

Les diverses fonctions thermodynamiques du gaz partiellement ionisé ont été calculées par *Baker et Kippenhahn* (1962, *Zeitschrift für Astrophysik*, **54**, 114). En exprimant $U(T, P)$, on a

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (7.19)$$

car on considère ici les quantités *par unité de masse*, si bien que $\rho = m/V = 1/V$ et donc $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$. Il suffit alors de partir du premier principe de la thermodynamique pour obtenir C_p .

$$C_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_\rho = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \quad (7.20)$$

Baker & Kippenhahn montrent alors que (leur equation A27) :

$$C_p = \frac{R}{\mu_0} \left\{ \left[\frac{5}{2} + \frac{4(1-\beta)(4+\beta)}{\beta^2} \right] (1+E) + \sum_i \frac{\nu_i}{G_i} \phi_i^2 \right\} \quad (7.21)$$

avec

$$\phi_i = \frac{5}{2} + \frac{4(1-\beta)}{\beta} + \frac{I_i}{kT} \quad (7.22)$$

et

$$G_i = \frac{1}{Y_i(1-Y_i)} + \frac{\nu_i}{E(1+E)} \quad (7.23)$$

(équations A19 et A23 respectivement de Baker & Kippenhahn 1962). C_p étant connue, il est possible d'obtenir C_v à l'aide d'une généralisation de la relation entre ces deux quantités (qui pour un gaz parfait est $C_p - C_v = R/\mu$). L'intérêt de ces expressions est qu'elles peuvent se généraliser au cas de mélanges quelconques. Dans un milieu partiellement ionisé, les chaleurs spécifiques peuvent être plus de 30 fois supérieures à celles de la matière non ionisée. En effet, dans un tel milieu, un apport de chaleur tend à augmenter le degré d'ionisation, tandis que la température varie peu.

On peut vérifier qu'à la limite d'un milieu neutre où la pression de radiation est négligeable, on retrouve bien

$$C_v = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu_0} \quad (7.24)$$

puisque $C_p - C_v = R/\mu$, tandis qu'à la limite d'un milieu complètement ionisé

$$C_v = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu_0} (1 + E) = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} \quad (7.25)$$

puisque $\mu = \mu_0/(1 + E)$. Dans le cas de l' H , la chaleur spécifique du milieu ionisé sera deux fois plus élevée que celle du milieu neutre.

7.3 Chaleurs spécifiques et exposants adiabatiques dans un milieu quelconque

7.3.1 Rappels et définitions

Pour une transformation adiabatique dans le cas particulier du gaz parfait, on a par unité de masse (voir cours de physique générale) :

$$PV^\gamma = \text{const.} \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{const.} \quad \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{const.}$$

$$PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const.}$$

Dans le cas de transformations adiabatiques pour un milieu dont l'équation d'état est plus générale, on écrira par analogie les expressions suivantes :

$$\frac{P}{\rho^{\Gamma_1}} = \text{const.} \quad \frac{T}{\rho^{\Gamma_3-1}} = \text{const.} \quad (7.26)$$

$$PT^{\frac{\Gamma_2}{1-\Gamma_2}} = \text{const.} \quad (7.27)$$

où les Γ_i sont définis par

$$\Gamma_1 \equiv \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{ad} \quad \Gamma_3 - 1 \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_{ad} \quad \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_{ad} \equiv \frac{1}{\nabla_{ad}} \quad (7.28)$$

Ces "gammas" sont très utiles en structure stellaire ; ils interviennent dans de nombreux problèmes : par exemple, Γ_2 apparaît dans le contexte de l'instabilité convective, tandis que Γ_1 et Γ_3 interviennent dans la théorie des pulsations.

Notons que seuls deux des trois Γ_i sont indépendants ; en effet, on établit facilement l'identité

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} \quad (7.29)$$

Les Γ_i ne sont égaux à C_p/C_v que dans le cas du gaz parfait. On aura des expressions de Γ_i qui dépendent de l'équation d'état du milieu considéré.

Relations entre les Γ_i et les chaleurs spécifiques : Considérons l'énergie interne $U = U(T, \rho)$. La première loi de la thermodynamique donne

$$\delta Q = dU + P dV = \underbrace{C_v dT}_{\text{partie isotherme}} + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \right] d\rho}_{\text{partie adiabatique}} \quad (7.30)$$

où δQ est la chaleur fournie au système par unité de masse. En effet, on a

$$dU = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_T d\rho \quad (7.31)$$

Si la transformation est adiabatique, $\delta Q = 0$ et donc

$$\Gamma_3 - 1 \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_{ad} = \frac{\frac{P}{\rho} - \rho \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_T}{C_v T} \quad (7.32)$$

On a en outre la relation thermodynamique suivante :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_T = \frac{P}{\rho^2} - \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \quad (7.33)$$

Donc

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{1}{\rho C_v} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \quad (7.34)$$

Écrivons l'équation d'état sous la forme générale

$$d \ln \rho = \alpha d \ln P - \delta d \ln T \quad (7.35)$$

avec

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_T \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P \quad (7.36)$$

Lorsque ρ est constant, $d \ln \rho = 0$ et donc

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho = \frac{\delta}{\alpha}$$

Cela implique

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{1}{\rho C_v} \frac{P}{T} \frac{\delta}{\alpha}$$

et

$$C_v = \frac{P\delta}{\rho T \alpha} \frac{1}{\Gamma_3 - 1} \quad (7.37)$$

On obtient ainsi une relation entre $\Gamma_3 - 1$ et C_v .

La relation entre Γ_1 et Γ_3 découle de l'expression générale pour l'équation d'état. On a

$$d \ln \rho = \alpha d \ln P - \delta d \ln T \quad (7.38)$$

d'où

$$\Gamma_1 \equiv \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{ad} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_{ad} \quad (7.39)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} (\Gamma_3 - 1) \quad (7.40)$$

La chaleur spécifique C_p est obtenue par

$$\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \equiv \nabla_{ad} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_{ad} = \frac{P\delta}{C_p \rho T}$$

Cette dernière égalité est à démontrer en exercice. Donc on a

$$C_p = \frac{P\delta}{\rho T} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \quad (7.41)$$

En divisant les expressions pour C_p et C_v , on a

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \alpha (\Gamma_3 - 1) \quad (7.42)$$

qui devient, en utilisant $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1}$

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} = \alpha \Gamma_1 \quad (7.43)$$

On vérifie immédiatement que si $\delta = \alpha = 1$ on a $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Gamma_2 = \gamma$.

Marche à suivre pour calculer les fonctions thermodynamiques :
Il faut connaître

$$\left. \begin{array}{l} P(\rho, T) \\ U(\rho, T) \end{array} \right\} \text{physique du milieu considéré}$$

On cherche en premier α et δ

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_T \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P$$

Ensuite C_v

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\rho$$

L'expression (7.37) nous fournit $\Gamma_3 - 1$, alors que 7.40 donne Γ_1 et 7.29 donne $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}$.

La chaleur spécifique C_p s'obtient par l'expression 7.41. Finalement, l'équation 7.43 fournit γ .

7.3.2 Mélange de gaz parfait et de rayonnement

Il s'agit de calculer α , δ , C_v , $\Gamma_3 - 1$, Γ_1 , $\Gamma_2 / (\Gamma_2 - 1)$, C_p et γ d'après la marche à suivre. L'équation d'état s'écrit

$$P = \frac{1}{3} a T^4 + \frac{k}{\mu m_H} \rho T \quad (7.44)$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{\mu m_H P}{kT} - \frac{1}{3} \frac{\mu m_H a T^3}{k}$$

Cherchons les paramètres α et δ :

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_T = \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = \frac{P}{\rho} \frac{\mu m_H}{kT} = \frac{P}{P_g} \equiv \frac{1}{\beta}$$

$$\delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P = - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

$$\delta = \frac{T}{\rho} \frac{P}{\frac{kT^2}{\mu m_H}} + \frac{T}{\rho} \frac{aT^2}{k/\mu m_H} = \frac{P}{P_g} + \frac{3 P_{rad}}{P_g} \frac{P}{P} = \frac{1}{\beta} + \frac{3(1 - \beta)}{\beta} = \frac{4}{\beta} - 3$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \quad \delta = \frac{4}{\beta} - 3 \quad \frac{\delta}{\alpha} = 4 - 3\beta \quad (7.45)$$

Ecrivons l'expression de l'énergie interne, en désignant par c_v et c_p les chaleurs spécifiques du seul gaz parfait, avec $\gamma_g = c_p/c_v$:

$$U = \frac{aT^4}{\rho} + \underbrace{c_v T}_{\frac{c_p - c_v}{c_v} T} = \frac{c_p - c_v}{c_v} T = \frac{k/\mu m_H}{\gamma_g - 1} T$$

De là, on tire C_v , la chaleur spécifique à $V = \text{const}$ du mélange :

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_\rho = \frac{4a T^3}{\rho} + \frac{k/\mu m_H}{\gamma_g - 1} \quad (7.46)$$

Question : *Montrer que*

$$C_v = \frac{k/\mu m_H}{\gamma_g - 1} \left(\frac{\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)}{\beta} \right) \quad (7.47)$$

Pour un gaz monoatomique, $\gamma_g = 5/3$. Il s'ensuit que

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_H} \quad \text{et} \quad C_v = c_v \frac{8 - 7\beta}{\beta} \quad (7.48)$$

On obtient ensuite $\Gamma_3 - 1$ à l'aide de l'équation 7.37 :

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{P}{\rho T} \frac{\delta/\alpha}{C_v} = \frac{(4 - 3\beta)(\gamma_g - 1)}{\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)} \quad (7.49)$$

Pour un gaz monoatomique, $(\gamma_g - 1) = 2/3$ donc

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{8 - 6\beta}{24 - 21\beta} \quad (7.50)$$

Par 7.40 $\Gamma_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} (\Gamma_3 - 1)$ on calcule

$$\Gamma_1 = \beta + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma_g - 1)}{\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)} \quad (7.51)$$

Pour un gaz monoatomique,

$$\Gamma_1 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{3(8 - 7\beta)} \quad (7.52)$$

Ensuite, on calcule $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{1}{\nabla_{ad}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} &= \frac{[\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)] \left[\beta + \frac{(4 - 3\beta)^2(\gamma_g - 1)}{\beta + 12(\gamma_g - 1)(1 - \beta)} \right]}{(4 - 3\beta)(\gamma_g - 1)} \\ &= \frac{\beta^2 + 12\beta(\gamma_g - 1)(1 - \beta) + (4 - 3\beta)^2(\gamma_g - 1)}{(4 - 3\beta)(\gamma_g - 1)} \end{aligned}$$

Pour un gaz monoatomique avec $\gamma_g = 5/3$, on a

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{1}{\nabla_{ad}} = \frac{-3\beta^2 - 24\beta + 32}{2(4 - 3\beta)} \quad (7.53)$$

On vérifie aisément que pour $\beta \rightarrow 1$ (gaz parfait), $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \rightarrow \gamma_g$. tandis que pour $\beta \rightarrow 0$, c'est-à-dire pour un gaz dominé par la pression de radiation, on a à la limite $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 4/3$.

Dans le cas général, les Γ_i prennent des valeurs intermédiaires entre $5/3$ et $4/3$.

Le rapport $\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}$ du mélange s'obtient par 7.43 :

$$\gamma = \frac{\Gamma_1}{\beta} = \alpha \Gamma_1 = 1 + \frac{(4 - 3\beta)^2(\gamma_g - 1)}{\beta^2 + 12\beta(\gamma_g - 1)(1 - \beta)} \quad (7.54)$$

et pour un gaz monoatomique, il vaut

$$\gamma = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{3\beta(8 - 7\beta)} \quad (7.55)$$

Finalement, C_p s'obtient par

$$C_p = \gamma C_v = \alpha \Gamma_1 C_v = \frac{1}{\beta} \Gamma_1 C_v \quad (7.56)$$

On trouve après simplification

$$C_p = \frac{1}{\beta^2} \frac{k/\mu m_H}{\gamma_g - 1} [4(\beta^2 + 4\gamma_g - 4) - 3\beta(-4 + 4\gamma_g + \beta\gamma_g)] \quad (7.57)$$

$$\text{Pour } \gamma = \frac{5}{3}, \quad C_p = \frac{k}{\beta^2 \mu m_H} \frac{3}{2} \left[\frac{32}{3} - 8\beta - \beta^2 \right]$$

$$\text{et si } \beta = 1, \quad C_p = \frac{5}{2} \frac{k}{\mu m_H}$$

On note que l'augmentation relative de P_{rad} accroît les chaleurs spécifiques, tandis que les $\Gamma_i \rightarrow 4/3$; c'est un facteur d'instabilités stellaires.

7.4 Pulsations stellaires

Parmi tous les types d'étoiles variables connues jusqu'ici, les étoiles pulsantes en constituent la majorité. Elles ont revêtu historiquement et revêtent encore une importance toute particulière, à cause de la relation entre la luminosité intrinsèque moyenne des céphéides et leur période de pulsation, relation qui permet une estimation précise des distances intergalactiques.

7.4.1 Relation période–densité

On peut établir aisément, à l'aide d'un modèle simple, une relation essentielle entre la période de pulsation et la densité moyenne d'une étoile. On considère la pulsation comme une **onde de pression**, donc comme une **onde acoustique**; sa vitesse est alors

$$c_s = \sqrt{\gamma P_g/\rho}$$

La période de pulsation P est assimilée au temps de traversée de l'étoile de rayon R par cette onde. En considérant qu'il s'agit d'une onde stationnaire dont le noeud est au centre de l'étoile et le ventre à la surface³, la longueur d'onde correspond à 4 rayons stellaires, donc :

$$P \sim \frac{4R}{c_s}$$

³analogie du tuyau d'orgue : la base du tuyau correspondrait au centre de l'étoile, son embouchure à la surface

Il reste à exprimer la pression gazeuse P_g en fonction de la densité moyenne de l'étoile. On en obtient un ordre de grandeur à partir de l'équation d'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dP_g}{dr} = -g\rho = -\frac{GM_r}{r^2}\bar{\rho} \Rightarrow \frac{P_g - 0}{R} \sim \frac{GM}{R^2}\bar{\rho} \Rightarrow P_g \sim \frac{GM}{R}\bar{\rho}$$

La période P vaut alors

$$P \sim \frac{4R}{\sqrt{\gamma P_g/\bar{\rho}}} = \frac{4}{\sqrt{\gamma G}} \underbrace{\left(\frac{R^3}{M}\right)^{1/2}}_{\propto \bar{\rho}^{-1/2}}$$

et nous avons finalement la relation simple

$$P\bar{\rho}^{1/2} = \text{constante} \quad (7.58)$$

Notons qu'il existe des pulsations **radiales** et **non radiales**. Les pulsations radiales peuvent être considérées comme des *ondes stationnaires*, qui peuvent présenter des harmoniques :

- Fondamentale : 1 noeud au centre de l'étoile, 1 ventre à la surface
- 1^{ère} harmonique : 1 noeud au centre, 1 ventre dans l'enveloppe, 1 noeud dans l'enveloppe, 1 ventre à la surface
- etc.

7.4.2 Physique des pulsations

Soit un élément de volume de gaz dans une étoile pulsante. Le premier principe de la thermodynamique nous dit que

$$\delta Q^\curvearrowright = dU + \delta\tau^\curvearrowright$$

où $\delta\tau^\curvearrowright$ est l'élément de travail fourni par le système. Donc sur un cycle entier,

$$\oint \delta Q^\curvearrowright = \underbrace{\oint dU}_0 + \tau^\curvearrowright$$

puisque l'énergie interne n'a pas changé après un cycle, si la pulsation est stable et strictement périodique.

Par conséquent, on voit que si l'élément de volume absorbe de la chaleur durant un cycle, il doit nécessairement fournir un travail $\tau \nearrow > 0$. C'est cela qui permet d'entretenir la pulsation. La chaleur doit être absorbée au bon moment, toutefois. Pour voir cela, invoquons le 2^e principe de la thermodynamique; ce dernier dit que pour tout cycle réversible, l'entropie finale est égale à l'entropie initiale :

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q \swarrow}{T} = 0$$

(remarquons que dans un milieu isotherme, $\oint \delta Q \swarrow = 0 \Rightarrow \tau \nearrow = 0$ puisque $\oint dU = 0$). Soit $T = T_0 + \Delta T$ avec $\Delta T \ll T_0$; on a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \oint \frac{\delta Q \swarrow}{T_0 + \Delta T} = \oint \frac{\delta Q \swarrow}{T_0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T_0}} \approx \oint \frac{\delta Q \swarrow}{T_0} \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right) \\ &\Rightarrow \oint \delta Q \swarrow = \oint \delta Q \swarrow \frac{\Delta T}{T_0} = \tau \nearrow \end{aligned}$$

Donc, **pour que $\tau \nearrow > 0$, il faut que $\delta Q \swarrow > 0$ quand $\Delta T > 0$** : la chaleur doit être absorbée à haute température et évacuée à basse température
N.B. Dans un moteur, on fait varier l'apport de chaleur : $\delta Q \swarrow > 0$ pendant la compression, $\delta Q \swarrow = 0$ pendant l'expansion. Dans le cas d'une étoile, l'apport de chaleur est en général constant, mais c'est le *taux d'évacuation de la chaleur* qui varie, via la variation d'opacité (cas du "mécanisme κ ").

Dans une étoile, certaines couches absorbent de la chaleur et d'autres en perdent, si bien que la condition de pulsation s'écrit

$$\tau = \int_0^M \oint \frac{\Delta T}{T_0} \delta Q \swarrow dM_r > 0 \quad (7.59)$$

Il y a au moins deux mécanismes qui permettent cela :

1. **Le mécanisme ε** , lié à la production d'énergie nucléaire : compression $\Rightarrow T \nearrow \Rightarrow \varepsilon \propto T^\nu \nearrow$. Le critère est satisfait, mais les pulsations sont amorties par perte d'énergie radiative, si bien qu'on ne connaît à ce jour aucun exemple dans la nature de pulsations clairement animées par ce mécanisme.
2. **Le mécanisme κ** : en général, $\rho \nearrow \Rightarrow T \nearrow$ et $\kappa \propto \rho T^{-3.5} \searrow$, donc le milieu devient plus transparent et l'énergie sort : $\Delta T > 0$,

$\delta Q < 0 \rightarrow$ pas de pulsations. Mais, dans le cas des étoiles pulsantes, $\rho \nearrow \Rightarrow \kappa \nearrow$. Dans la zone d'ionisation partielle du He II, $\rho \nearrow$ et $T \nearrow$ (dans une moindre mesure), mais κ augmente aussi ! la majeure partie de l'énergie est consacrée à ioniser le milieu, qui est en état d'ionisation partielle. L'énergie rayonnante des couches profondes est absorbée :

$$\Delta T \gtrsim 0, \quad \delta Q > 0 \quad \text{pulsations possibles}$$

L'énergie retenue est libérée mécaniquement, donc le rayon augmente.

Notion de bande d'instabilité : Il est important de voir que la condition de pulsation 7.59 n'est pas satisfaite de manière unanime par l'ensemble des couches de l'étoile, mais seulement grâce à la contribution des couches situées au voisinage d'une profondeur donnée. Dans le cas des céphéides, c'est la profondeur qui correspond à l'ionisation partielle du He II. Or, cette couche doit être située à une profondeur appropriée, sans quoi les pulsations ne pourront pas se maintenir, et cela définit, dans le diagramme HR, ce que l'on appelle la **bande d'instabilité** :

- Etoile trop rouge (froide) : zone d'ionisation partielle trop profonde \rightarrow amortissement des pulsations dans les couches supérieures
- Etoile trop bleue (chaude) : zone d'ionisation trop superficielle

Entre ces deux régions "stables" du diagramme HR, on a une bande quasi verticale où la pulsation peut se manifester, et qui traverse tout le diagramme, depuis les supergéantes jaunes (céphéides) jusqu'aux naines blanches, en passant par la branche horizontale (étoiles RR Lyrae, qui appartiennent à la Population II) et la séquence principale (étoiles δ Scuti, de type spectral A).

7.4.3 Pulsations adiabatiques : modèle à une zone

Pour discuter certaines propriétés des pulsations, on examine ici le modèle dit à une zone, c'est-à-dire une étoile constituée d'une masse ponctuelle M et d'un milieu de rayon R sans masse mais capable d'exercer une pression P , et surmonté d'une seule couche oscillante de masse m (voir Fig. 7.1). Comme il n'y a plus équilibre hydrostatique, il faut partir de l'équation de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$, c'est-à-dire

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = \underbrace{-\frac{GMm}{R^2}}_{\text{force de gravité}} + \underbrace{4\pi R^2 P}_{\text{force de pression}} \quad (7.60)$$

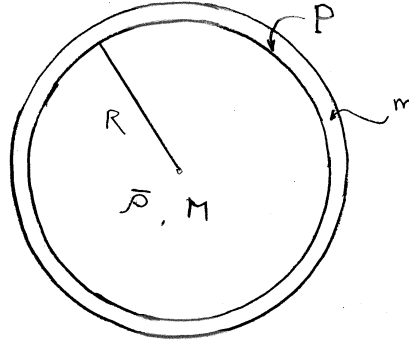


FIG. 7.1 – Modèle à une zone

On linéarise cette équation afin de pouvoir en trouver une solution analytique, en considérant les pulsations comme de petites perturbations.

A l'équilibre, $R = R_0$, $P = P_0$ et $\frac{GMm}{R_0^2} = 4\pi R_0^2 P_0$, puisqu'alors la force de pression équilibre la force de gravité. Sous l'hypothèse de petites perturbations δR et δP , on a

$$R = R_0 + \delta R \quad P = P_0 + \delta P$$

qui, introduits dans 7.60, donne

$$\begin{aligned} m \frac{d^2(\delta R)}{dt^2} &= -\frac{GMm}{R_0^2} + 2\frac{GMm}{R_0^3}\delta R + 4\pi R_0^2 P_0 + 8\pi R_0 P_0 \delta R + 4\pi R_0^2 \delta P \\ &= 2\frac{GMm}{R_0^3}\delta R + 8\pi R_0 P_0 \delta R + 4\pi R_0^2 \delta P \end{aligned}$$

après avoir posé

$$\frac{1}{(R_0 + \delta R)^2} = \frac{1}{R_0^2 \left(1 + \frac{\delta R}{R_0}\right)^2} \simeq \frac{1}{R_0^2} \left(1 - 2\frac{\delta R}{R_0}\right)$$

et après avoir laissé tomber les termes quadratiques.

Invoquons maintenant l'adiabaticité des pulsations : $P V^\gamma = \text{const.}$, d'où

$$P R^{3\gamma} = \text{const} \Rightarrow \delta P R^{3\gamma} + 3\gamma R^{3\gamma-1} \delta R = 0 \Rightarrow \frac{\delta P}{P_0} = -3\gamma \frac{\delta R}{R_0}$$

On peut donc éliminer δP et l'on obtient

$$\begin{aligned} m \frac{d^2(\delta R)}{dt^2} &= \left[2 \frac{GMm}{R_0^3} + \underbrace{8\pi R_0 P_0}_{\frac{2GMm}{R_0}} - \underbrace{4\pi \cdot 3\gamma P_0 R_0}_{\frac{GMm}{R_0} 3\gamma} \right] \delta R \\ &= \frac{GMm}{R_0^3} (4 - 3\gamma) \delta R \end{aligned}$$

On reconnaît là l'équation du mouvement harmonique

$$\frac{d^2(\delta R)}{dt^2} + \underbrace{(3\gamma - 4) \frac{GM}{R_0^3}}_{\omega^2} \delta R = 0 \quad (7.61)$$

La solution générale en est

$$\delta R = A \exp \left[\pm i \sqrt{3\gamma - 4} \frac{GM}{R_0^3} \right] \quad (7.62)$$

On a alors les deux types possibles de solution :

- Si $\gamma > 4/3$, solution sinusoïdale (non amortie dans le modèle adiabatique mais rapidement amortie en réalité!)
- Si $\gamma < 4/3$, croissance exponentielle traduisant une **instabilité dynamique**

En réalité, cette instabilité est *nécessaire* au moins dans une couche de l'étoile pour produire les pulsations de grande amplitude observées. Dans quel milieu le γ permet-il cette instabilité ?

- Gaz parfait non ionisé, ou complètement ionisé : $\gamma = \Gamma_1 = 5/3 > 4/3$, stabilité
- Milieu dominé par la pression de radiation : $\Gamma_1 = 4/3$, à la limite de la stabilité
- Milieu partiellement ionisé : $\Gamma_1 \sim 1.13 - 1.21 < 4/3$, instabilité \rightarrow pulsations !

On voit ici l'importance des Γ calculés dans la section précédente. Remarquons toutefois que ce modèle ne dit rien de l'amplitude des pulsations, et permettrait à une étoile constituée de gaz parfait d'osciller indéfiniment, sans avoir besoin du mécanisme κ . La courbe de lumière d'une telle étoile serait sinusoïdale, alors que les observations montrent des courbes fortement anharmoniques. Seule une analyse non adiabatique, prenant en compte l'étoile

entière et le mécanisme κ , permet une analyse de l'amplitude et de la forme des pulsations.

Période de pulsation : On pourrait penser que la période calculée à l'aide d'un modèle aussi primitif n'a pas de sens, mais en réalité l'expression de la période adiabatique donne une valeur très proche de la valeur réelle.

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{(3\gamma - 4)\frac{GM}{R_0^3}}} = \frac{2\pi}{[(3\gamma - 4)\frac{4\pi}{3}G\bar{\rho}]^{1/2}}$$

puisque $\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R_0^3}$, ou encore

$$P = \left[\frac{3\pi}{(3\gamma - 4)G\bar{\rho}} \right]^{1/2} \quad (7.63)$$

On retrouve la relation $P \cdot \bar{\rho}^{1/2} = \text{const}$ trouvée précédemment, et que l'on écrit généralement sous la forme

$$P = Q \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_\odot} \right)^{-1/2} \quad (7.64)$$

où Q est la **constante de pulsation**. Cette constante dépend du type de pulsation (fondamentale ou harmonique) et du type d'étoile (céphéide classique, δ Scuti, Mira...).

7.4.4 Relation période–luminosité des céphéides

On a

$$P = Q \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_\odot} \right)^{-1/2} = Q \frac{R^{3/2}}{M^{1/2}}$$

avec M, R en unités solaires. Or, on a une relation masse–luminosité du type⁴

$$L \propto M^n \Rightarrow M \propto L^{1/n}$$

⁴On établit aisément, à partir des équation de structure interne, une relation masse–luminosité qualitative pour les étoiles de séquence principale, mais il ne s'agit pas ici de la même relation, puisque les céphéides sont des supergéantes. Néanmoins, il existe pour les céphéides une relation monotone et quasi univoque entre L et M , puisqu'on reste confiné dans la bande d'instabilité.

avec, typiquement, $n \sim 3.3$. De plus,

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \Rightarrow R^{3/2} \propto \left(\frac{L}{T_{\text{eff}}^4} \right)^{3/4} = \frac{L^{3/4}}{T_{\text{eff}}^3}$$

Finalement,

$$P \propto Q \frac{L^{-1/2n} \cdot L^{3/4}}{T_{\text{eff}}^3}$$

ou

$$\log P = \log Q - 3 \log T_{\text{eff}} + \underbrace{\left(0.75 - \frac{1}{2n} \right)}_{0.5985 \text{ si } n=3.3} \log L + \text{const}$$

ce qui donne, compte tenu du fait que $\log L = -0.4M_{\text{bol}} + \text{const}'$ (où M_{bol} est la magnitude absolue bolométrique),

$$\log P \simeq \log Q - 3 \log T_{\text{eff}} - 0.24M_{\text{bol}} + \text{constante} \quad (7.65)$$

Comme il y a une relation $B.C. \leftrightarrow T_{\text{eff}}$ très étroite, on peut établir une relation $P \leftrightarrow M_V$ (où M_V est la magnitude absolue visuelle). La relation $T_{\text{eff}} \leftrightarrow (B - V)_0$ permet d'affiner encore la relation période – luminosité en relation période – luminosité – couleur ($P - M_V - (B - V)_0$), dite aussi relation PLC.

Rappelons que la relation période-luminosité fut découverte en 1912 par Miss Henrietta Leavitt, qui étudiait les céphéides du Petit Nuage de Magellan, et cela bien avant que l'on comprenne la cause physique des pulsations.