1) Soit P le point de lancement et A le point d'arrivée du vaisseau ; le transfert d'Hohmann s'effectue suivant l'orbite elliptique de périgée P, d'apogée A, de foyer S (soleil) et de grand axe :

$$AP = 2a = R_1 + R_2 \; ; \tag{1}$$

on a (Fig. 6-16) :

$$SP = R_1 = a(1-e) \quad \text{et} \quad SA = R_2 = a(1+e)\,,$$

donc :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1-e}{1+e}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{e = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}} = \mathbf{0{,}21.}$$

• Le paramètre de l'orbite de transfert d'Hohmann est :

$$p = a(1-e^2) = \frac{R_2 + R_1}{2}\left[1 - \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right)^2\right],$$

ou

$$\boxed{p = \frac{2\,R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = \mathbf{1{,}82 \times 10^8\ km.}$$

• La constante des aires de l'orbite de transfert est :

$$C = \frac{|\boldsymbol{\sigma}_S|}{m} = SP \cdot v_1 = R_1 \cdot v_1 \; ;$$

où v_1, vitesse du vaisseau en P sur l'orbite juste après son lancement, est donnée par l'expression de l'énergie totale sur l'ellipse de transfert :

$$E = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{R_1} + \frac{1}{2}mv_1^2, \quad \text{soit} \quad v_1 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a}\right)} \; ;$$

ou, d'après (1) :

$$v_1 = \sqrt{2\,GM \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right)}. \tag{2}$$

La constante des aires est donc :

$$\boxed{C = \sqrt{2\,GM\,\frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}}} = \mathbf{4{,}9 \times 10^{15}\ m^2 \cdot s^{-1}.}$$

2) La durée τ du voyage Terre-Mars, entre P et A, est égale à la demi-période orbitale du vaisseau : $\tau = T/2$.

D'après la troisième loi de Kepler, on a :

$$\left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{vaisseau}} = \left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{Terre}}, \quad \text{soit} \quad \frac{(2\,\tau)^2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^3} = \frac{1}{(R_1)^3},$$

car la période de rotation de la terre autour du soleil est un an ; on en déduit :

$$\boxed{\tau_{(\text{années})} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1 + R_2}{2\,R_1}\right)^{3/2}} = \mathbf{0{,}71\ année}\ \text{ou}\ \mathbf{260\ jours.}$$

3) *a*) La vitesse V_1 de la terre sur son orbite circulaire de rayon R_1 est telle que :

$$\frac{GMm}{(R_1)^2} = \frac{mV_1^2}{R_1}, \quad \text{donc} \quad \boxed{V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}}. \tag{3}$$

L'accroissement de vitesse à communiquer au vaisseau lors du lancement est, d'après (2) et (3) :

$$\boxed{v_1 - V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}\left[\sqrt{\frac{2\,R_2}{R_1 + R_2}} - 1\right]} = \mathbf{2{,}99\ km/s}.$$

b) De même, la vitesse V_2 de Mars sur son orbite circulaire de rayon R_2 est :

$$V_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}\ ; \tag{4}$$

et la vitesse v_2 à l'apogée A sur l'orbite d'Hohmann est donnée par la loi des aires : $C = R_1\, v_1 = R_2\, v_2$; soit, d'après (2) :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\,GM}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}}\ ;$$

(on peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de l'énergie, comme pour v_1).

L'accroissement de vitesse à communiquer au satellite en A pour passer de l'orbite elliptique à l'orbite circulaire de rayon R_2 est donc :

$$\boxed{V_2 - v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}\left[1 - \sqrt{\frac{2\,R_1}{R_1 + R_2}}\right]} = \mathbf{2{,}68\ km/s}.$$

4) L'augmentation de l'énergie mécanique totale au cours de ce voyage est :

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}\,m v_2^2 - \frac{GMm}{R_2}\right) - \left(\frac{1}{2}\,m v_1^2 - \frac{GMm}{R_1}\right)\ ;$$

soit, d'après (3) et (4) : $\boxed{\Delta E = GMm\,\dfrac{R_2 - R_1}{2\,R_1\,R_2}} = \mathbf{1{,}55 \times 10^{11}\ J}.$

5) Pendant la durée τ de ce transfert, la planète Mars M tourne autour du soleil S, d'un angle :

$$\theta = 2\,\pi \cdot \frac{\tau}{T_{\text{Mars}}}\ ;$$

où la période T_{Mars} de la planète Mars est donnée par la loi de Kepler :

$$\left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{Mars}} = \left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{vaisseau}}, \quad \text{soit} \quad \frac{T^2_{\text{Mars}}}{(R_2)^3} = \frac{(2\,\tau)^2}{\left(\dfrac{R_1 + R_2}{2}\right)^3},$$

donc :

$$\frac{\tau}{T_{\text{Mars}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1 + R_2}{2\,R_2}\right)^{3/2}\ ;$$

on en déduit : $\theta = \pi \cdot \left(\dfrac{R_1 + R_2}{2\,R_2}\right)^{3/2}$.

La position relative Terre-Mars au moment du lancement est donc telle que $\widehat{TSM} = \pi - \theta$, soit :

$$\boxed{\widehat{TSM} = \pi\left[1 - \left(\frac{R_1 + R_2}{2\,R_2}\right)^{3/2}\right]}.$$

Application numérique : $\widehat{TSM} = \pi/4 =$ **45 degrés**.