

# Théorie des systèmes simples - 2<sup>eme</sup> partie

CNE HEIM <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Département Véhicules Aérospatiaux - poste 24045

18 mai 2006

Asservissement

Performances

Stabilité en BF

Marges de stabilité

Précision

Lieu d'Evans

Définition

Règles de construction

Exemples de construction

Correction

Effets

P

PD

Avance de phase

PI

PID

## Notion d'asservissement - Rappel de l'objectif

### Objectif

Commander un système précédemment analysé pour obtenir une sortie désirée

- ▶  $s_{desiree} = s_0 \Rightarrow$  problème d'asservissement
- ▶  $s_{desiree} = s(t) \Rightarrow$  problème de poursuite

## Commande en boucle ouverte

### Definition

Commande en boucle ouverte :  $E(p) = H^{-1}(p)S_{des}(p)$

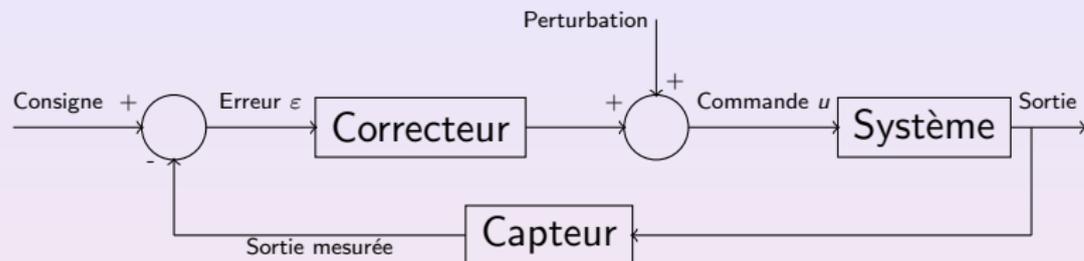
Détermination *a priori*, sans prise en compte du déroulement du processus

- ▶ faible tolérance aux perturbations
- ▶ faible tolérance aux erreurs/imperfections de modélisation

⇒ Utilisation pratique marginale

⇒ Commande en boucle fermée

## Structure de commande en boucle fermée



### Definition

Commande en boucle fermée : commande fonction de l'erreur  $\varepsilon$

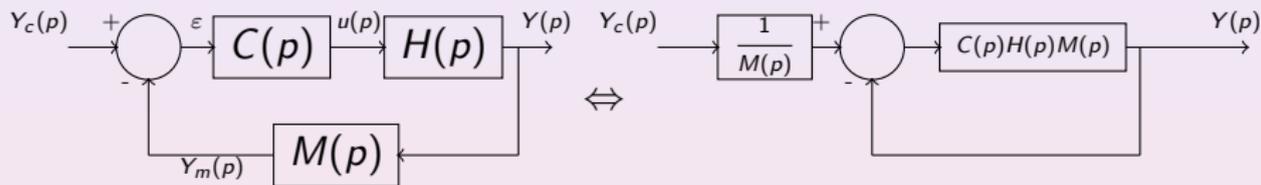
### Objectifs d'un asservissement

- ▶  $\frac{\text{Sortie}}{\text{Consigne}} \approx 1 \forall \omega$
- ▶  $\frac{\text{Sortie}}{\text{Perturbation}} \approx 0 \forall \omega$

## Remarques

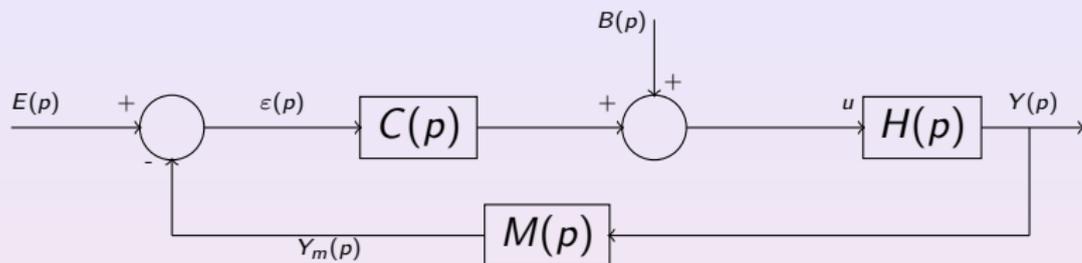
- ▶ On pilote désormais en CONSIGNE et plus en COMMANDE
- ▶ Les perturbations peuvent intervenir ailleurs que sur la commande (dans le système, sur la mesure...etc)
- ▶ Structure intuitive et reproduisant le comportement humain
- ▶ Suite du travail, synthétiser le correcteur qui génère la bonne commande

## Boucle fermée à retour unitaire



Ensemble Correcteur - Système - Capteur peut se ramener à système à retour unitaire

## Fonction de transfert en boucle fermée



Fonction de transfert en boucle fermée

$$FTBF(p) = \left( \frac{S(p)}{E(p)} \right)_{B=0} = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)M(p)}$$

$$\left( \frac{S(p)}{B(p)} \right)_{E=0} = \frac{H(p)}{1 + C(p)H(p)M(p)}$$

Réjection de perturbation  $\Leftarrow$  insertion de gain en amont de la perturbation

## Performances des systèmes asservis

- ▶ Performances d'un SLIC quelconque
  - ▶ Stabilité, quantifiée par marges de stabilité
  - ▶ Temps de réponse
  - ▶ Amortissement
  - ▶ Pulsation réduite, pulsation propre
- ▶  $\varepsilon = \text{Entrée} - \text{Sortie} = \text{Consigne} - \text{Réponse} \Rightarrow$  notion de précision

## Méthodes d'étude des systèmes asservis

Le système en boucle fermée est un SLIC de fonction de transfert  $FTBF(p)$

Deux approches possibles :

- ▶ Calcul et étude directe de la  $FTBF(p)$

## Méthodes d'étude des systèmes asservis

Le système en boucle fermée est un SLIC de fonction de transfert  $FTBF(p)$

Deux approches possibles :

- ▶ Calcul et étude directe de la  $FTBF(p)$ 
  - ▶ Avantage : Si  $C(p)$  est fixé, application directe des méthodes d'analyse vues suffisante pour étude de toutes les performances hormis la précision.

## Méthodes d'étude des systèmes asservis

Le système en boucle fermée est un SLIC de fonction de transfert  $FTBF(p)$

Deux approches possibles :

- ▶ Calcul et étude directe de la  $FTBF(p)$ 
  - ▶ Avantage : Si  $C(p)$  est fixé, application directe des méthodes d'analyse vues suffisante pour étude de toutes les performances hormis la précision.
  - ▶ Inconvénient :  $FTBF$  plus compliquée que  $FTBO \Rightarrow$  méthode calculatoire

## Méthodes d'étude des systèmes asservis

Le système en boucle fermée est un SLIC de fonction de transfert  $FTBF(p)$

Deux approches possibles :

- ▶ Calcul et étude directe de la  $FTBF(p)$ 
  - ▶ Avantage : Si  $C(p)$  est fixé, application directe des méthodes d'analyse vues suffisante pour étude de toutes les performances hormis la précision.
  - ▶ Inconvénient :  $FTBF$  plus compliquée que  $FTBO \Rightarrow$  méthode calculatoire
  - ▶ INCONVÉNIENT : Si plusieurs paramètres à déterminer dans  $C(p)$ , étude systématique de  $FTBF$  comportera une cascade de discussions selon valeurs choisies

## Méthodes d'étude des systèmes asservis

Le système en boucle fermée est un SLIC de fonction de transfert  $FTBF(p)$

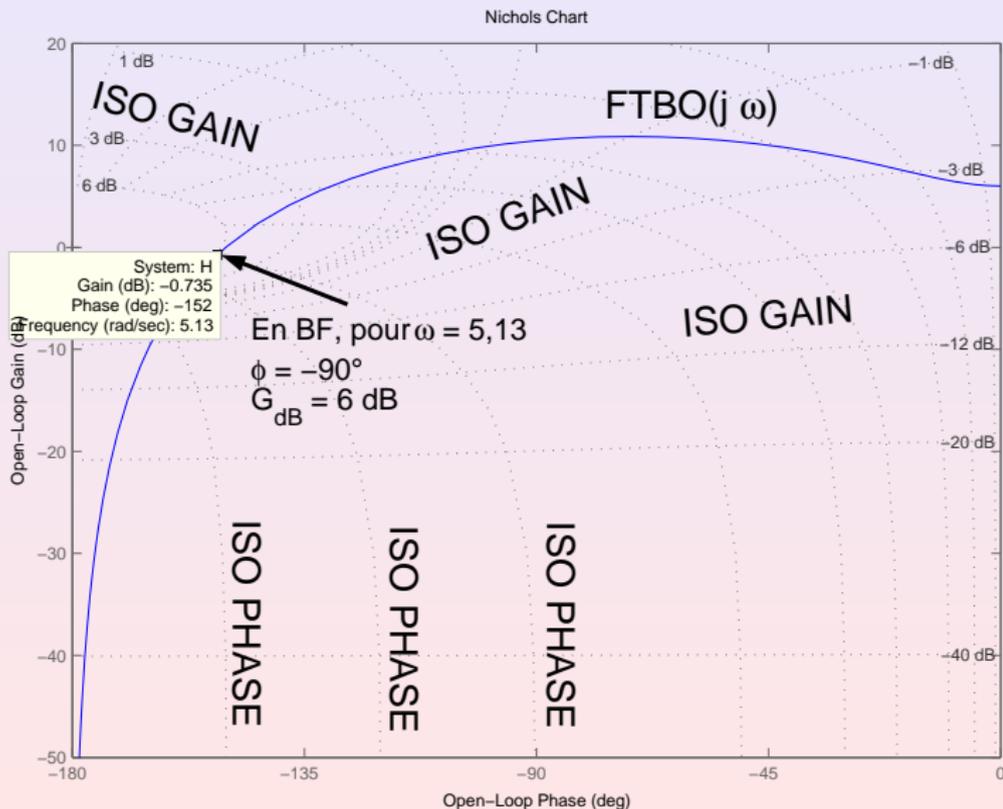
Deux approches possibles :

- ▶ Calcul et étude directe de la  $FTBF(p)$ 
  - ▶ Avantage : Si  $C(p)$  est fixé, application directe des méthodes d'analyse vues suffisante pour étude de toutes les performances hormis la précision.
  - ▶ Inconvénient :  $FTBF$  plus compliquée que  $FTBO \Rightarrow$  méthode calculatoire
  - ▶ INCONVÉNIENT : Si plusieurs paramètres à déterminer dans  $C(p)$ , étude systématique de  $FTBF$  comportera une cascade de discussions selon valeurs choisies
- ▶ Méthodes apportant des conclusions sur la boucle fermée  $FTBF(p)$  par l'intermédiaire de l'étude de la boucle ouverte

## Abaques de Nichols

- ▶ Dans diagramme de Black, tracé de la FT en BO
- ▶ Abaque de Nichols  $\Rightarrow$  Lecture de la phase et gain de la fonction de transfert en boucle fermée par retour unitaire
- ▶ Courbes iso-gain graduées en dB
- ▶ Valeur des iso-phase à lire sur axe des abscisses (Attention aux effets de zoom)

# Abaques de Nichols



## Abaques de Nichols - Exploitation

Permet de retrouver certaines performances du système en BF

- ▶ On relève sur abaques de Nichols
  - ▶  $G_{dB_{BF}}(0) \approx -4dB$

## Abaques de Nichols - Exploitation

Permet de retrouver certaines performances du système en BF

- ▶ On relève sur abaques de Nichols
  - ▶  $G_{dB_{BF}}(0) \approx -4dB$
  - ▶ Gain maximal en BF :  $G_{dB_{BF_{max}}} = 6dB$

## Abaques de Nichols - Exploitation

Permet de retrouver certaines performances du système en BF

- ▶ On relève sur abaques de Nichols
  - ▶  $G_{dB_{BF}}(0) \approx -4dB$
  - ▶ Gain maximal en BF :  $G_{dB_{BF_{max}}} = 6dB$
  - ▶ Gain maximal obtenu pour  $\omega_{r_{BF}} = 5,13rad/s$

## Abaques de Nichols - Exploitation

Permet de retrouver certaines performances du système en BF

- ▶ On relève sur abaques de Nichols
  - ▶  $G_{dB_{BF}}(0) \approx -4dB$
  - ▶ Gain maximal en BF :  $G_{dB_{BF_{max}}} = 6dB$
  - ▶ Gain maximal obtenu pour  $\omega_{r_{BF}} = 5,13rad/s$
- ▶ On en déduit
  - ▶ Facteur de surtension  $Q_{dB_{BF}} = G_{dB_{BF_{max}}} - G_{dB_{BF}}(0) = 10dB$

## Abaques de Nichols - Exploitation

Permet de retrouver certaines performances du système en BF

- ▶ On relève sur abaques de Nichols

- ▶  $G_{dB_{BF}}(0) \approx -4dB$
- ▶ Gain maximal en BF :  $G_{dB_{BF_{max}}} = 6dB$
- ▶ Gain maximal obtenu pour  $\omega_{r_{BF}} = 5,13rad/s$

- ▶ On en déduit

- ▶ Facteur de surtension  $Q_{dB_{BF}} = G_{dB_{BF_{max}}} - G_{dB_{BF}}(0) = 10dB$
- ▶  $Q_{BF} = \sqrt{10} = \frac{1}{2\xi_{BF}\sqrt{1-\xi_{BF}^2}} \Rightarrow \xi_{BF} = 0,1602$

## Abaques de Nichols - Exploitation

Permet de retrouver certaines performances du système en BF

- ▶ On relève sur abaques de Nichols

- ▶  $G_{dB_{BF}}(0) \approx -4dB$

- ▶ Gain maximal en BF :  $G_{dB_{BF_{max}}} = 6dB$

- ▶ Gain maximal obtenu pour  $\omega_{r_{BF}} = 5,13rad/s$

- ▶ On en déduit

- ▶ Facteur de surtension  $Q_{dB_{BF}} = G_{dB_{BF_{max}}} - G_{dB_{BF}}(0) = 10dB$

- ▶  $Q_{BF} = \sqrt{10} = \frac{1}{2\xi_{BF}\sqrt{1-\xi_{BF}^2}} \Rightarrow \xi_{BF} = 0,1602$

- ▶  $\omega_{r_{BF}} = \omega_{n_{BF}} \sqrt{1-2\xi_{BF}^2}$

## Stabilité en BF

Système considéré : système bouclé de fonction de transfert

$$FTBF(p) = \frac{\textit{Sortie}}{\textit{Consigne}}$$

Système stable ssi la partie de ses pôles est négative

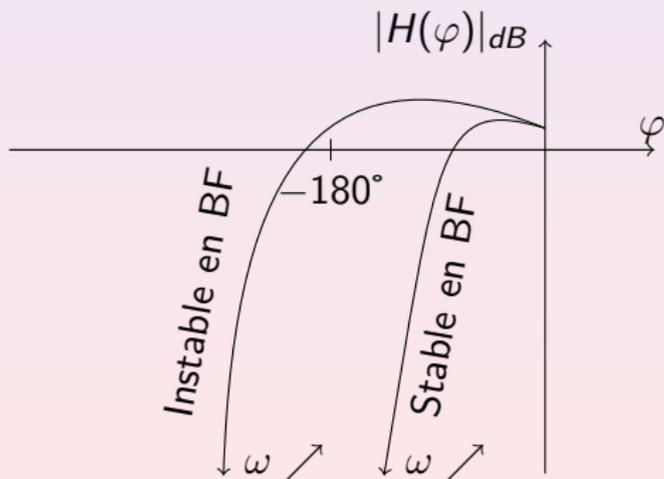
Deux approches pour étude de stabilité

- ▶ Calcul explicite de la  $FTBF(p)$  et examen du signe de ses pôles
  - ▶ par factorisation directe
  - ▶ par critère de Routh
- ▶ Critère du Revers  $\Rightarrow$  Etude de la  $FTBO \rightsquigarrow$  conclusion sur stabilité de la  $FTBF$

## Critère du Revers - Diagramme de Black

### Critère de stabilité

Un système stable en boucle ouverte est stable en boucle fermée si le point critique ( $\varphi = -180^\circ$ ,  $G_{dB} = 0$ ) est laissé à DROITE lorsqu'on parcourt le lieu de transfert dans le sens des  $\omega$  croissants



**ATTENTION**

Etude de la BO



Conclusion sur la BF

## Critère du Revers - traduction dans diagramme de Bode

### Critère de stabilité

- ▶ Tracer diagrammes de Bode en BO d'un système stable en BO
- ▶ Relever  $\omega_{0dB}$  tq  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0_{dB}$  et  $\omega_{\pi}$  tq  $\varphi(\omega_{\pi}) = -180^{\circ}$
- ▶ Le système est stable en BF si
  - ▶  $G_{dB}(\omega_{\pi}) < 0$
  - ▶  $\varphi(\omega_{0dB}) > -180^{\circ}$

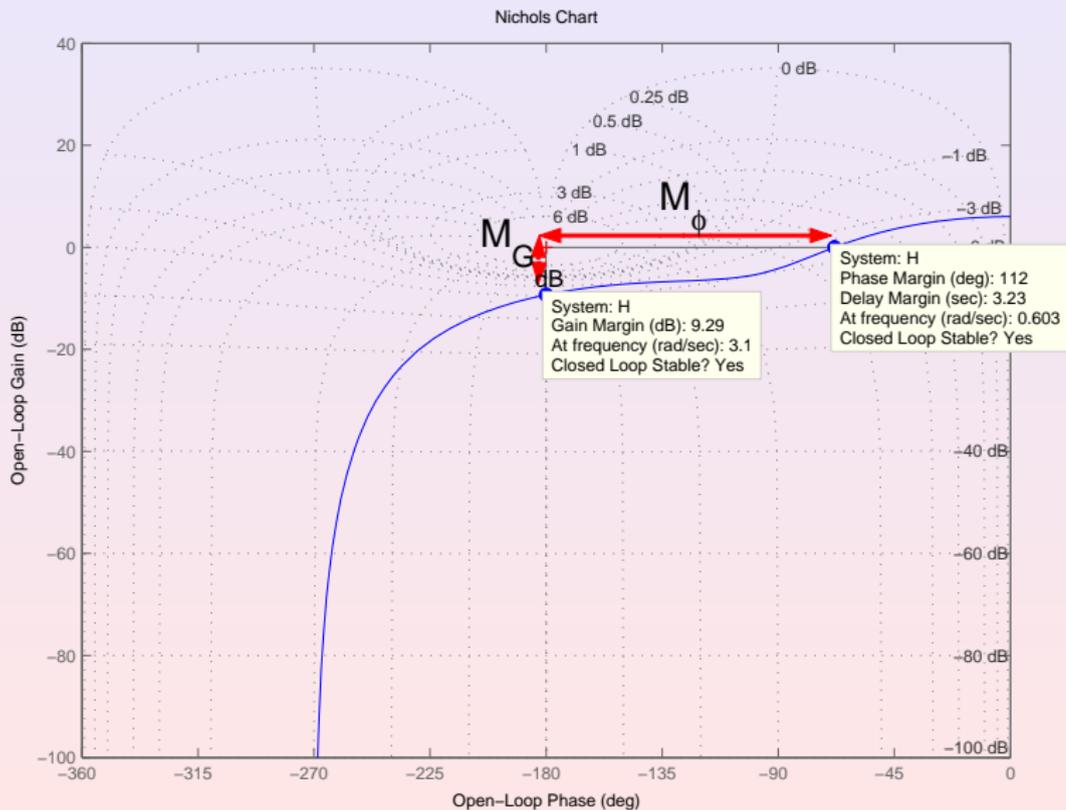
## Marges de stabilité

Marges de stabilité : quantification de la stabilité et de la robustesse aux perturbations et imperfections de modélisation

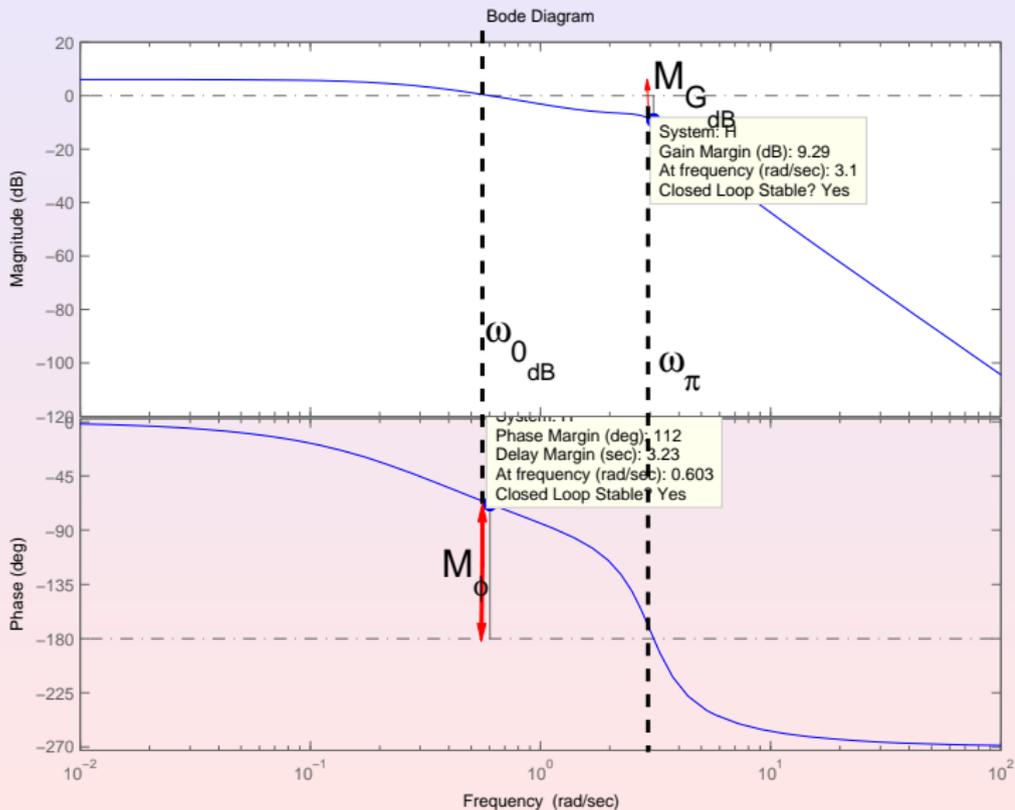
- ▶ Marge de gain : Gain que l'on peut ajouter en BO (à phase constante) avant de déstabiliser la BF.
- ▶ Marge de phase : Phase que l'on peut enlever en BO (à gain constant) avant de déstabiliser la BF.
- ▶ Marge de retard : retard avant déstabilisation (dû aux temps de traitement par exemple)

$$M_{ret(s)} = \frac{M_{\phi(rad)}}{\omega_{0dB(rad/s)}}$$

# Marges de stabilité - Black



# Marges de stabilité - Bode



## Précision d'un système asservis - Notion de classe

### Definition

Soit  $H(p)$  la fonction de transfert d'un système

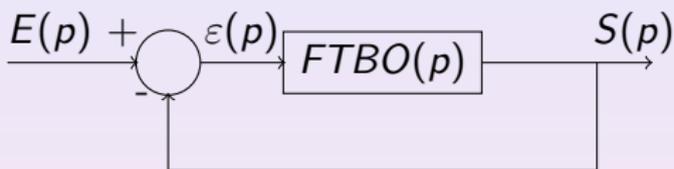
$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{(a_n p^{n-k} + a_{n-1} p^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} p + a_k) p^k}$$

Avec  $n < m$  et  $k \in [0..n]$

$$H(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{b_0}{a_k p^k}$$

$k$  est la classe du système : c'est le nombre d'intégrations du système

## Précision d'un système asservis



$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

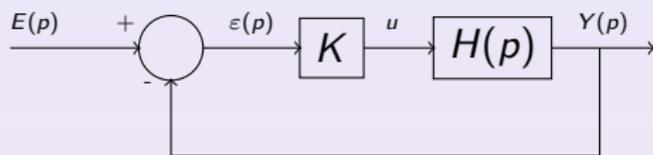
Entrée	$e(t)$	$E(p)$	Erreur
échelon	$e_0 U(t)$	$\frac{e_0}{p}$	position $\varepsilon_0$
rampe	$V_0 t$	$\frac{V_0}{p^2}$	traînage $\varepsilon_1$
accélération	$\gamma t^2$	$\frac{\gamma}{p^3}$	accélération $\varepsilon_2$

## Précision d'un système asservis - Récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0 $FTBO(p)_{p \rightarrow 0} \sim 0K$	Classe 1 $FTBO(p)_{p \rightarrow 0} \sim \frac{K_v}{p}$	Classe 2 $FTBO(p)_{p \rightarrow 0} \sim \frac{K_a}{p^2}$
$\frac{e_0}{p}$	$\varepsilon_0 = \frac{e_0}{1 + K}$	$\varepsilon_0 = 0$	$\varepsilon_0 = 0$
$\frac{V_0}{p^2}$	$\varepsilon_1 = \infty$	$\varepsilon_1 = \frac{V_0}{K_v}$	$\varepsilon_1 = 0$
$\frac{\gamma}{p^3}$	$\varepsilon_2 = \infty$	$\varepsilon_2 = \infty$	$\varepsilon_2 = \frac{\gamma}{K_a}$

# Lieu d'Evans

# Lieu d'Evans



## Definition

Lieu d'Evans : lieu des racines de la fonction de transfert en boucle fermée quand  $K$  varie.

## But

- ▶ Détermination de l'évolution du système avec le gain
- ▶ Détermination des comportements atteignables avec un tel type de correction
- ▶ Détermination du gain assurant un certain comportement

# Principe

$$\blacktriangleright FTBO = KH(p) = KK' \frac{\prod_{k=1}^m (p - z_k)}{\prod (p - p_i)} = \mathcal{K}_e \frac{N(p)}{D(p)}$$

$\blacktriangleright \mathcal{K}_e$  est le *gain d'Evans*

$$\blacktriangleright FTBF(p) = \frac{\mathcal{K}_e H(p)}{1 + \mathcal{K}_e H(p)} = \frac{\mathcal{K}_e N(p)}{D(p) + \mathcal{K}_e N(p)}$$

$\Rightarrow$  pôles de la FTBF = racines de  $D(p) + \mathcal{K}_e N(p)$

$\Rightarrow$  *Lieu d'Evans (dit aussi lieu des racines) est la courbe des racines du polynôme  $D(p) + \mathcal{K}_e N(p)$  paramétrée en  $\mathcal{K}_e$*

## Règles de construction

	$\mathcal{K}_e > 0$	$\mathcal{K}_e < 0$
Points de départ	$\{p_i\}_{i \in [1..n]}$	
Points d'arrivée	$\{z_k\}_{k \in [1..m]}$	
Point de concours des asymptotes	$\frac{\sum^n p_i - \sum^m z_k}{n - m}$	
Directions asymptotiques	$\frac{\pi + 2\lambda\pi}{n - m}$	$\frac{2\lambda\pi}{n - m}$
Nombre de points singuliers sur l'axe réel à droite d'un segment appartenant au lieu	impair	pair

## Règles de construction

- ▶ Lieu symétrique par rapport à l'axe réel
- ▶  $\exists$  règles pour angles de départ, d'arrivée, points de séparation...
- ▶ Allure à savoir déterminer manuellement avec règles énoncées
- ▶ Tracé précis avec Matlab (commande *rlocus*)

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

► Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

- ▶ Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  
 $\mathcal{K}_e = K/2 > 0$

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

- ▶ Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  
 $\mathcal{K}_e = K/2 > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -1 + i$  et  $p_2 = -1 - i$  et d'arrivée  $z_1 = -5$

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

- ▶ Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  
 $\mathcal{K}_e = K/2 > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -1 + i$  et  $p_2 = -1 - i$  et d'arrivée  $z_1 = -5$
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

- ▶ Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  
 $\mathcal{K}_e = K/2 > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -1 + i$  et  $p_2 = -1 - i$  et d'arrivée  $z_1 = -5$
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-5, +\infty[$

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

- ▶ Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  
 $\mathcal{K}_e = K/2 > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -1 + i$  et  $p_2 = -1 - i$  et d'arrivée  $z_1 = -5$
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-5, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $z_1 = -5$ ) à droite des points de  $S_2 = ] - \infty, -5[$

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

- ▶ Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  
 $\mathcal{K}_e = K/2 > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -1 + i$  et  $p_2 = -1 - i$  et d'arrivée  $z_1 = -5$
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-5, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $z_1 = -5$ ) à droite des points de  $S_2 = ]-\infty, -5[$
  - ▶ Donc  $S_2$  appartient au lieu et  $S_1$  non

## Exemple

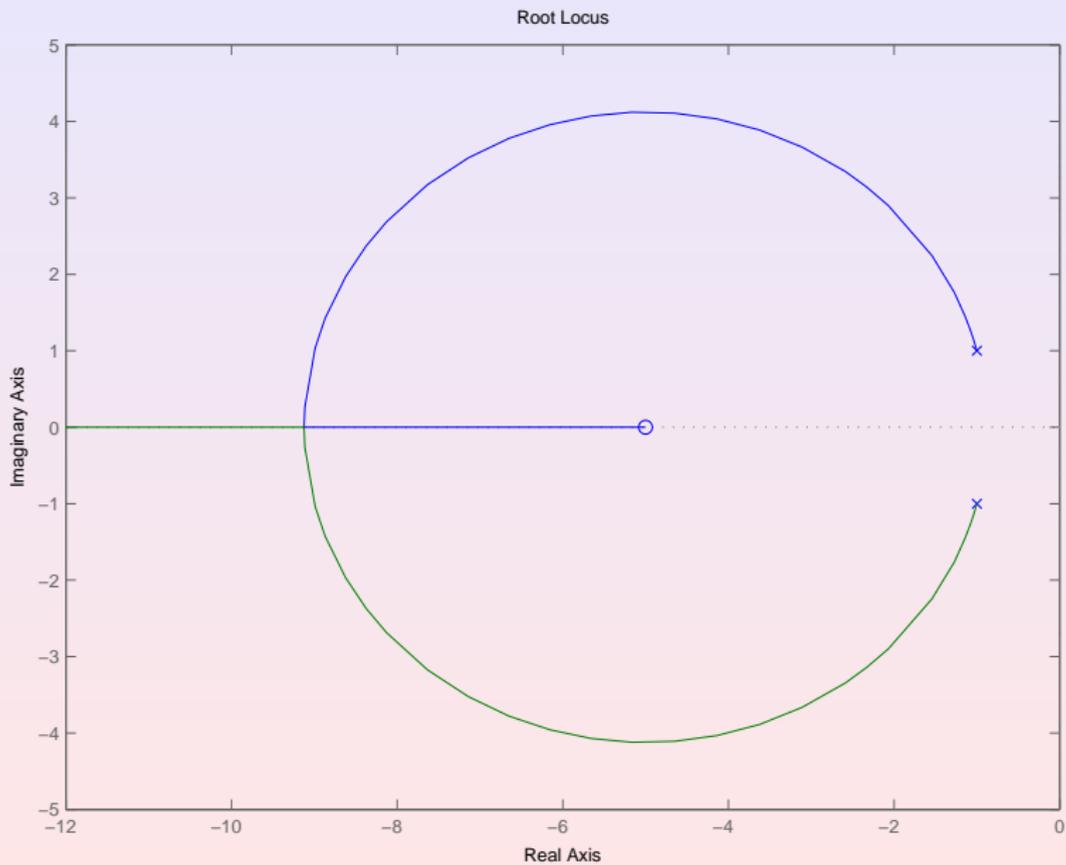
Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

- ▶ Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  
 $\mathcal{K}_e = K/2 > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -1 + i$  et  $p_2 = -1 - i$  et d'arrivée  $z_1 = -5$
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-5, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $z_1 = -5$ ) à droite des points de  $S_2 = ]-\infty, -5[$
  - ▶ Donc  $S_2$  appartient au lieu et  $S_1$  non
- ▶ Détermination des asymptotes : 2 pôles, 1 zéros  $\Rightarrow$  1 asymptote de direction  $\pi$  : c'est le segment  $S_2$ .

## Exemple

Lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{p+5}{2p^2+4p+4}$  ( $K > 0$ )

- ▶ Factorisation de H :  $H(p) = \frac{p+5}{2(p-(-1-i))(p-(-1+i))}$
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  
 $\mathcal{K}_e = K/2 > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -1 + i$  et  $p_2 = -1 - i$  et d'arrivée  $z_1 = -5$
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-5, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $z_1 = -5$ ) à droite des points de  $S_2 = ] -\infty, -5[$
  - ▶ Donc  $S_2$  appartient au lieu et  $S_1$  non
- ▶ Détermination des asymptotes : 2 pôles, 1 zéros  $\Rightarrow$  1 asymptote de direction  $\pi$  : c'est le segment  $S_2$ .
- ▶ Esquisse du tracé



## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-1, +\infty[$

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-1, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $p_3 = -1$ ) à droite des points de  $S_2 = ] - \infty, -1[$

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-1, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $p_3 = -1$ ) à droite des points de  $S_2 = ]-\infty, -1[$
  - ▶ Donc  $S_2$  appartient au lieu et  $S_1$  non

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-1, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $p_3 = -1$ ) à droite des points de  $S_2 = ]-\infty, -1[$
  - ▶ Donc  $S_2$  appartient au lieu et  $S_1$  non
- ▶ Détermination des asymptotes : 3 pôles, pas de zéros  $\Rightarrow$  3 asymptotes

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-1, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $p_3 = -1$ ) à droite des points de  $S_2 = ] - \infty, -1[$
  - ▶ Donc  $S_2$  appartient au lieu et  $S_1$  non
- ▶ Détermination des asymptotes : 3 pôles, pas de zéros  $\Rightarrow$  3 asymptotes
  - ▶ directions asymptotiques :  $\pm \frac{\pi}{3}$  et  $\pi$

## Exemple

Lieu d'Evans du système

$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

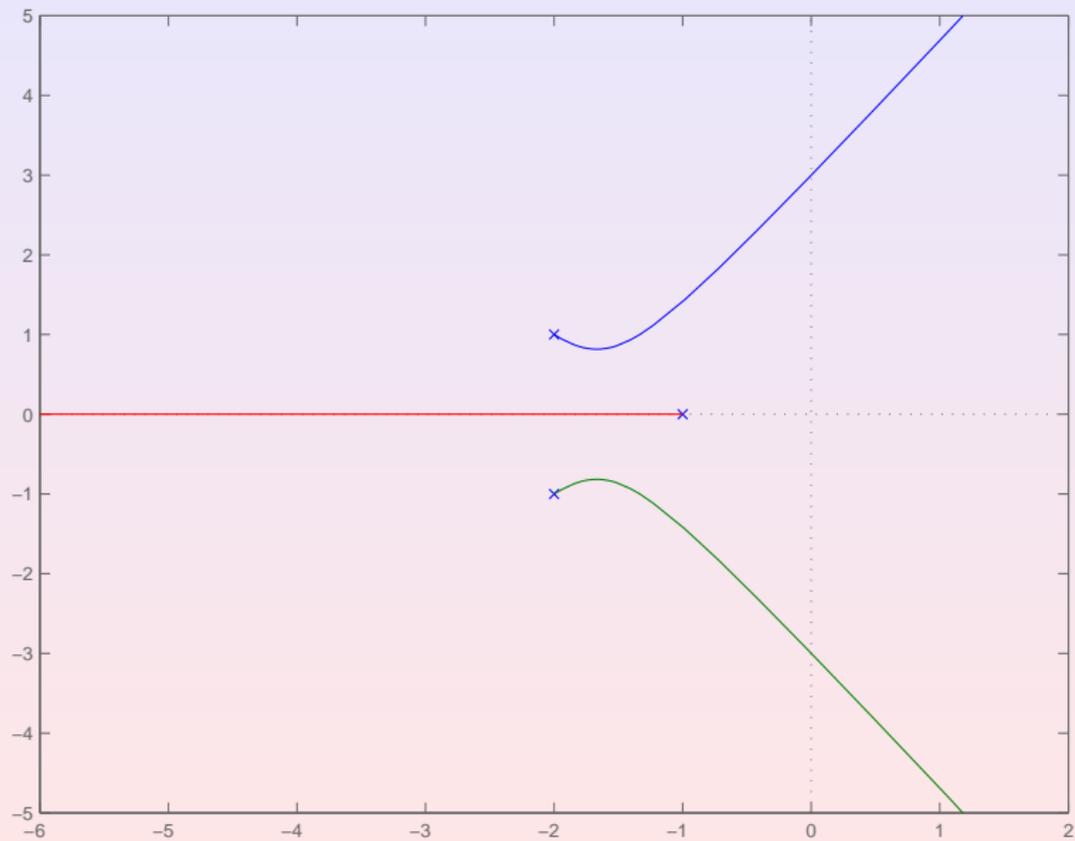
- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-1, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $p_3 = -1$ ) à droite des points de  $S_2 = ]-\infty, -1[$
  - ▶ Donc  $S_2$  appartient au lieu et  $S_1$  non
- ▶ Détermination des asymptotes : 3 pôles, pas de zéros  $\Rightarrow$  3 asymptotes
  - ▶ directions asymptotiques :  $\pm \frac{\pi}{3}$  et  $\pi$
  - ▶ point de concours :  $(\sum p_i)/3 = -5/3$

## Exemple

Lieu d'Evans du système

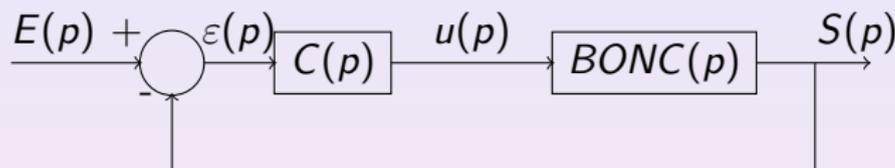
$$H(p) = \frac{1}{(p-(-1))(p-(-2+j))(p-(-2-j))} \quad (K > 0)$$

- ▶ Ecrire le gain d'Evans et déterminer son signe :  $\mathcal{K}_e = K > 0$
- ▶ Placer les points de départ  $p_1 = -2 + j$ ,  $p_2 = -2 - j$  et  $p_3 = -1$ . Pas de point d'arrivée
- ▶ Déterminer les portions de l'axe réel appartenant au lieu :
  - ▶ pas de point singulier à droite des points de  $S_1 = [-1, +\infty[$
  - ▶ 1 point singulier ( $p_3 = -1$ ) à droite des points de  $S_2 = ]-\infty, -1[$
  - ▶ Donc  $S_2$  appartient au lieu et  $S_1$  non
- ▶ Détermination des asymptotes : 3 pôles, pas de zéros  $\Rightarrow$  3 asymptotes
  - ▶ directions asymptotiques :  $\pm \frac{\pi}{3}$  et  $\pi$
  - ▶ point de concours :  $(\sum p_i)/3 = -5/3$
- ▶ Esquisse du tracé



# Correction

## Correction des systèmes



$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{C(p)BONC(p)}{1 + C(p)BONC(p)}$$

$BONC(p)$  fixée par physique du système, qualité des capteurs, des actionneurs...

### But de la correction

Déterminer  $C(p)$  pour générer la commande  $u(p)$  à donner au système pour obtenir les performances voulues

Rem : vérification de la faisabilité de  $u(p)$  indispensable

# Correction des systèmes

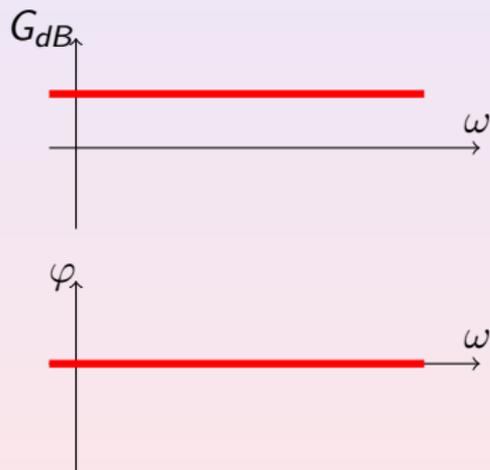
Performance cherchée	Action à réaliser	$C(p)$
Stabilité	↗ marge de gain	$ C(j\omega_\pi) _{dB} < 0$
	↗ marge de phase	$\arg(C(j\omega_{0dB})) > 0$
Précision	↗ gain statique	$C(j\omega)_{\omega \rightarrow 0} K > 1$
	↗ classe du système	$C(j\omega)_{\omega \rightarrow 0} \frac{\lambda}{p}, \frac{\lambda}{p^2}$
Amortissement	Ecarter BO des iso-gain élevées	Idem stabilité

## Effets correctifs

Effet	Effet sur BO (Black)	Effet sur BF
Proportionnel $K_p$	Translation verticale Gain statique ↗ pour $K_p > 1$	↘ erreur ↘ stabilité
Intégral $\frac{K_i}{p}$	Gain statique $\infty$ Translation horizontale $-90^\circ$	erreur = 0 ↘ stabilité
Dérivé $K_v p$	Gain statique = 0 Translation horizontale $+90^\circ$	erreur = 100% ↗ stabilité

# Correcteur proportionnel

$$C(p) = K$$



*Rem : c'est une autre formulation du problème vu avec lieu d'Evans*

## Correcteur proportionnel - Exemple

$$BONC(p) = \frac{200}{(p^2 + 10p + 100)(1 + 0,5p)}$$

### Spécifications

- ▶ BF stable
- ▶ précision améliorée

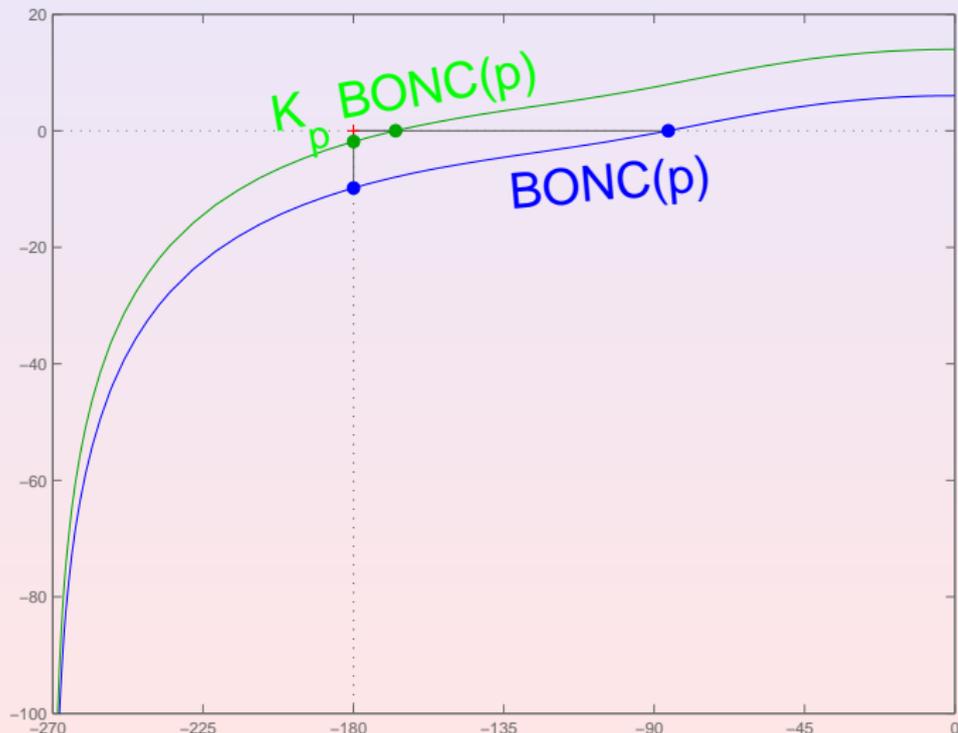
### Détermination du paramètre :

- ▶ Supérieur à 1 pour augmenter la précision
- ▶ Valeur bornée par l'effet déstabilisant
- ▶ Valeur déterminée par lieu d'Evans, critère de Routh ou marge de gain

$$C(p) = 2,5$$

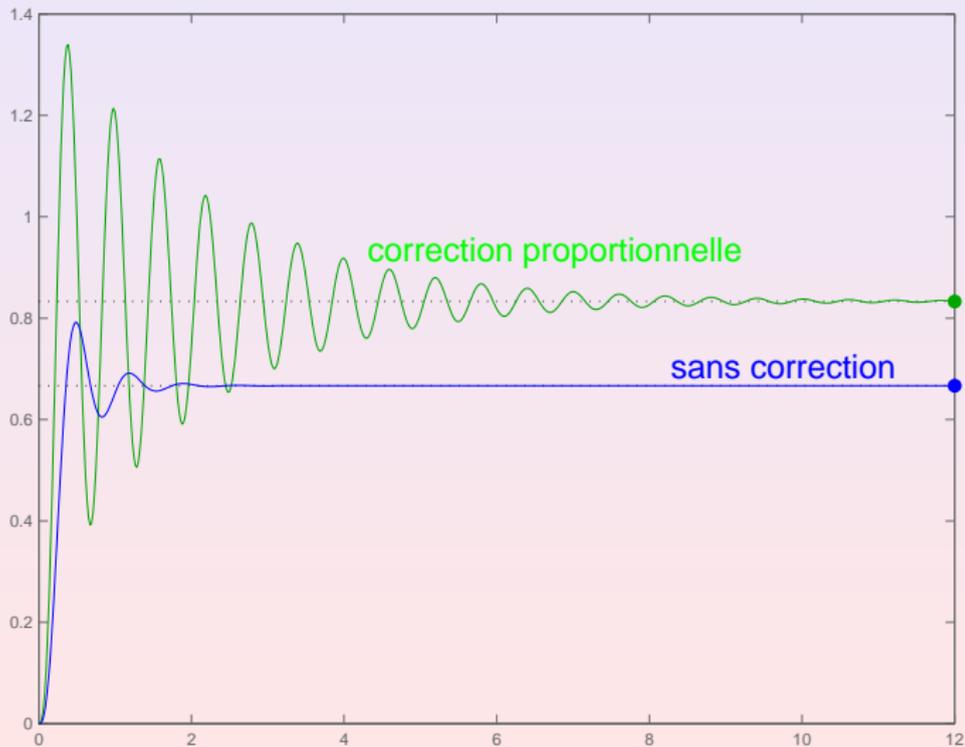
# Correcteur proportionnel - Exemple

## Diagramme de Black des BO et BOC



# Correcteur proportionnel - Exemple

## Réponses indicielles unitaires



## Correcteur proportionnel - Exemple

### Performances comparées

BF non corrigée

$$M_G = 9,8_{dB}$$

$$M_\varphi = 94^\circ$$

$$M_R = 0,436$$

$$T_R = 0,95s$$

$$\varepsilon\% = 33,3$$

$$D\% = 19$$

BF correction proportionnelle

$$M_G = 1,9_{dB}$$

$$M_\varphi = 13^\circ$$

$$M_R = 0,023$$

$$T_R = 5,24s$$

$$\varepsilon\% = 16,6$$

$$D\% = 61$$

Précision atteignable bornée, forte dégradation de la stabilité

## Correcteur proportionnel-dérivé

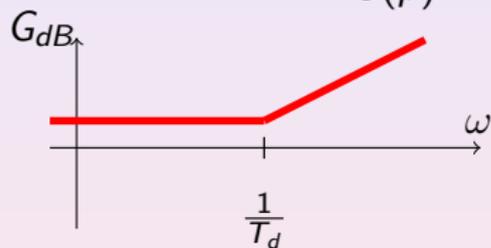
$$C(p) = K_p + K_v p = K_p(1 + T_d p)$$

- ▶ BF : Effet Proportionnel
  - ▶ diminution de l'erreur par augmentation du gain statique
- ▶ HF : Effet Dérivé
  - ▶ stabilisation par ajout de phase à partir d'une pulsation en amont de  $\omega_{0dB}$

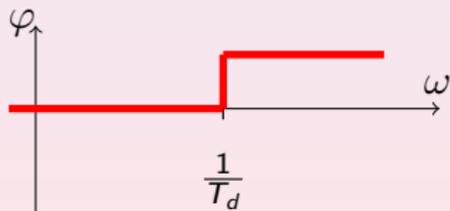
Transition entre les deux effets à la pulsation  $\omega_d$  à choisir

# Correcteur proportionnel-dérivé - Bode

$$C(p) = K_p + K_v p = K_p(1 + T_d p)$$



$$\omega_d = \frac{1}{T_d}$$



$$C(j\omega) = \begin{cases} K_p & \text{pour } \omega \ll \omega_d \\ K_p(1 + j) & \text{pour } \omega = \omega_d \\ j\omega K_p T_d & \text{pour } \omega \gg \omega_d \end{cases}$$

## Correcteur proportionnel-dérivé - Exemple

$$BONC(p) = \frac{200}{(p^2 + 10p + 100)(1 + 0,5p)}$$

### Spécifications

- ▶ BF stable
- ▶  $\varepsilon\% < 5$

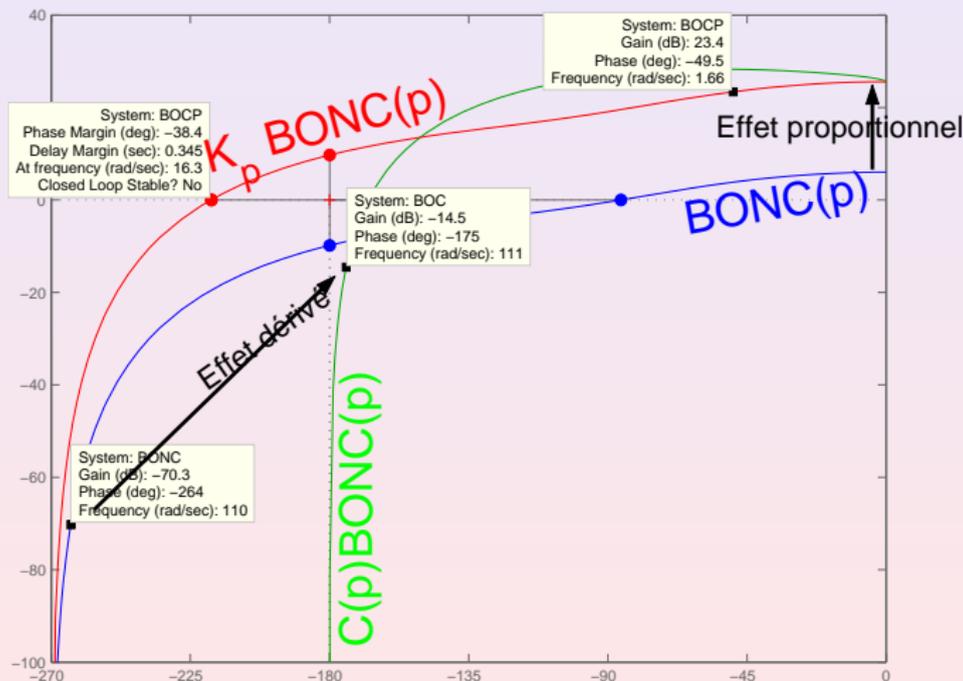
### Détermination des paramètres :

- ▶  $\varepsilon\% = 5 \Rightarrow K_p BONC(0) = 19$
- ▶  $\omega_{0dB} = 16 \text{ rad/s}$  sur la BO corrigée par le gain
- ▶ Effet dérivateur voulu à partir de  $\omega_d \ll \omega_{0dB} \Rightarrow$  choix de  $\omega_d = \frac{1}{T_d} = 1,66 \Rightarrow T_d = 0,6$

$$C(p) = 9,5(1 + 0,6p)$$

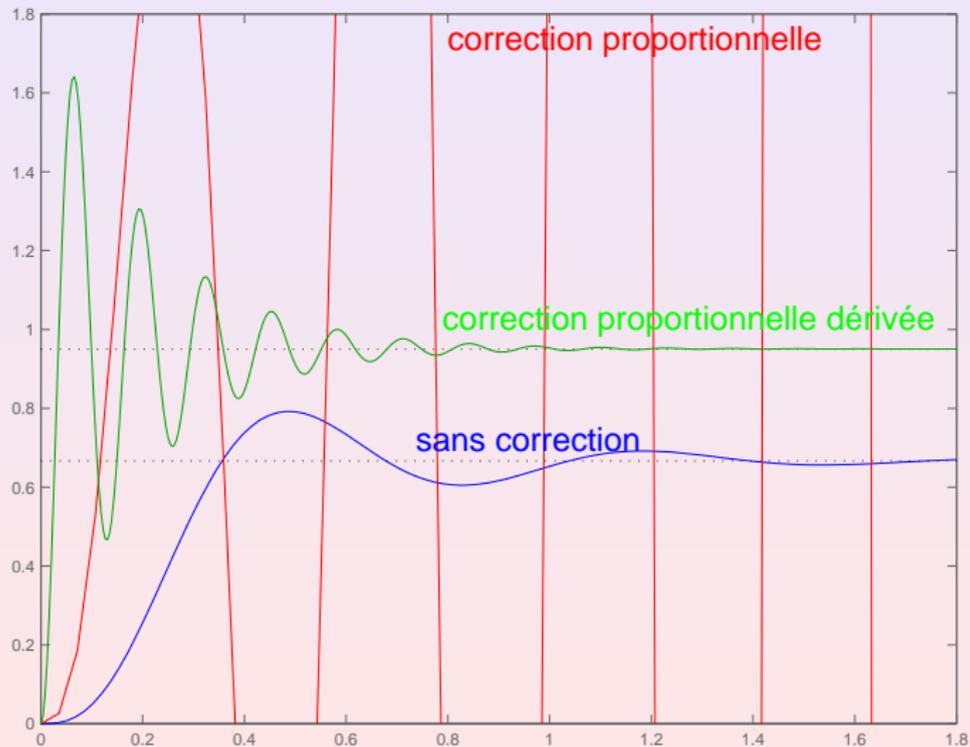
# Correcteur proportionnel-dérivé - Exemple

## Diagramme de Black des BO et BOC



# Correcteur proportionnel-dérivé - Exemple

## Réponses indicielles unitaires



## Correcteur proportionnel-dérivé - Exemple

### Performances comparées

BF non corrigée

$$M_G = 9,8_{dB}$$

$$M_\varphi = 94^\circ$$

$$M_R = 0,436$$

$$T_R = 0,95s$$

$$\varepsilon\% = 33,3$$

$$D\% = 19$$

BF correction proportionnelle-dérivée

$$M_G = +\infty$$

$$M_\varphi = 12,6^\circ$$

$$M_R = 0,004$$

$$T_R = 0,59s$$

$$\varepsilon\% = 5$$

$$D\% = 73$$

Permet réponse stable avec meilleure précision que correction proportionnelle

## Correcteur proportionnel-dérivé

- ▶ stabilisation par prise en compte de la vitesse
- ▶ fonction dérivée non causale  $\Rightarrow$  on réalise

$$C(p) = K_p + \frac{K_v p}{1 + \tau p} \text{ avec } \tau \ll 1$$

- ▶ correcteur avec  $\tau$  quelconque  $\Rightarrow$  correcteur à avance de phase

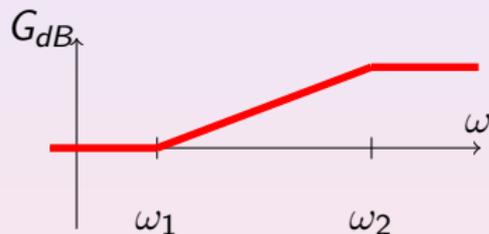
## Correcteur à avance de phase

$$C(p) = \frac{1 + \alpha\tau p}{1 + \tau p} \quad (\alpha > 1)$$

- ▶ Avance de phase : ajout maîtrisé de phase sur la plage  $\omega \in \left[ \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\alpha\tau} \right]$
- ▶ Eventuellement précédé d'une correction proportionnelle

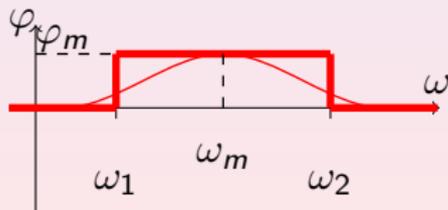
## Correcteur à avance de phase - Bode

$$C(p) = \frac{1 + \alpha\tau p}{1 + \tau p} \quad (\alpha > 1)$$



$$\omega_1 = \frac{1}{\alpha\tau}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\tau}$$



$$\begin{cases} \varphi_m = \arcsin\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right) \\ \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} \end{cases}$$

## Correcteur à avance de phase - Exemple

$$BONC(p) = \frac{5/2}{p(1 + 5p)(1 + 0,15p)}$$

### Spécifications

- ▶  $M_{\varphi_{cor}} = 45^\circ$
- ▶ Précision inchangée

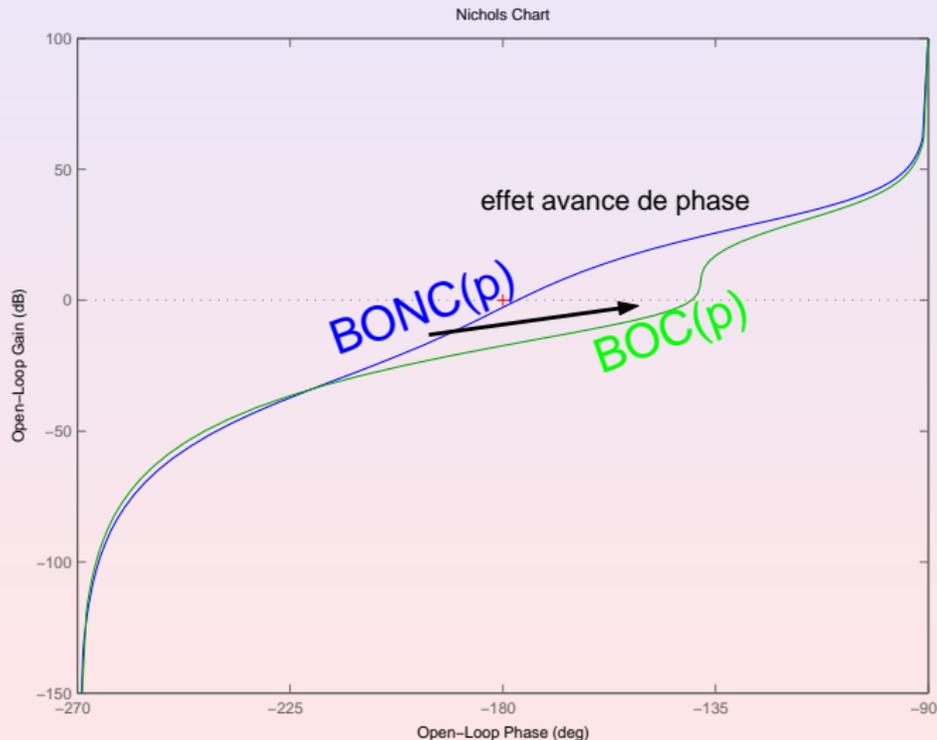
### Détermination des paramètres :

- ▶ Sans correction,  $M_\varphi = 10^\circ$  à  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .  $\Rightarrow$  apport de phase nécessaire  $\Delta\varphi = \varphi_m = 35^\circ \rightsquigarrow \alpha$
- ▶ phase à apporter vers pulsation de résonance  $\omega_r \approx 1,5 \text{ rad/s} \rightsquigarrow \tau$

$$C(p) = \frac{1 + 1,21p}{1 + 0,21p}$$

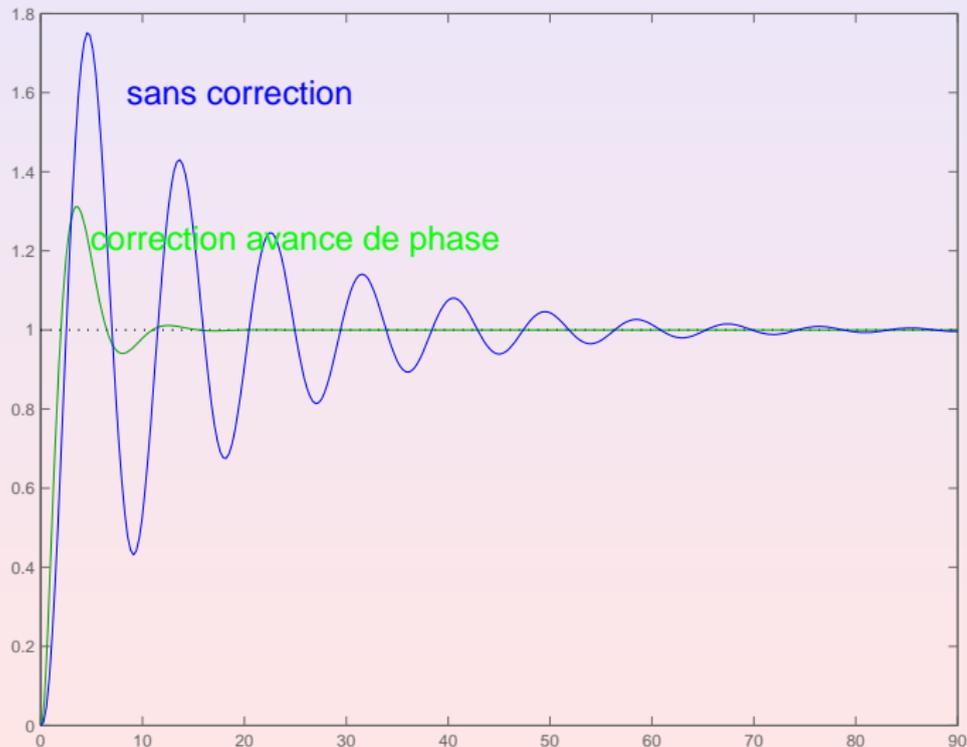
# Correcteur à avance de phase - Exemple

## Diagramme de Black des BO et BOC



# Correcteur à avance de phase - Exemple

## Réponses indicielles unitaires



## Correcteur à avance de phase - Exemple

### Performances comparées

BF non corrigée

$$M_G = 8,8_{dB}$$

$$M_\varphi = 10^\circ$$

$$M_R = 0,258$$

$$T_R = 46s$$

$$\varepsilon\% = 0$$

$$D\% = 75$$

BF correction à avance de phase

$$M_G = 23,4_{dB}$$

$$M_\varphi = 42^\circ$$

$$M_R = 0,892s$$

$$T_R = 8,8s$$

$$\varepsilon\% = 0$$

$$D\% = 31$$

## Correcteur proportionnel-intégral

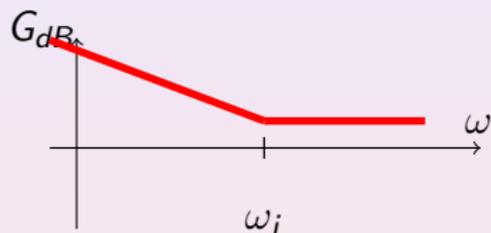
$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

- ▶ BF : Effet Intégral
  - ▶ annulation de l'erreur par augmentation de la classe du système
- ▶ HF : Effet Proportionnel
  - ▶ éviter l'effet déstabilisant de l'intégration autour du point critique
  - ▶ diminuer l'erreur de rang suivant

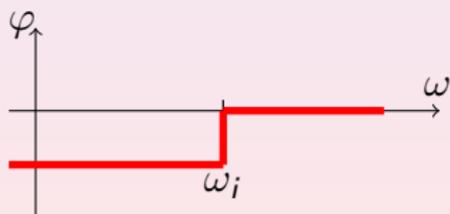
Transition entre les deux effets à la pulsation  $\omega_j$  à choisir

# Correcteur proportionnel-intégral - Bode

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$



$$\omega_i = \frac{1}{T_i}$$



$$C(j\omega) = \begin{cases} \frac{K_p}{j\omega T_i} & \text{pour } \omega \ll \omega_i \\ K_p(1 - j) & \text{pour } \omega = \omega_i \\ K_p & \text{pour } \omega \gg \omega_i \end{cases}$$

## Correcteur proportionnel-intégral - Exemple

$$BONC(p) = \frac{200}{(p^2 + 10p + 100)(1 + 0,5p)}$$

### Spécifications

- ▶ Conserver les marges de stabilité
- ▶  $\varepsilon\% = 0$

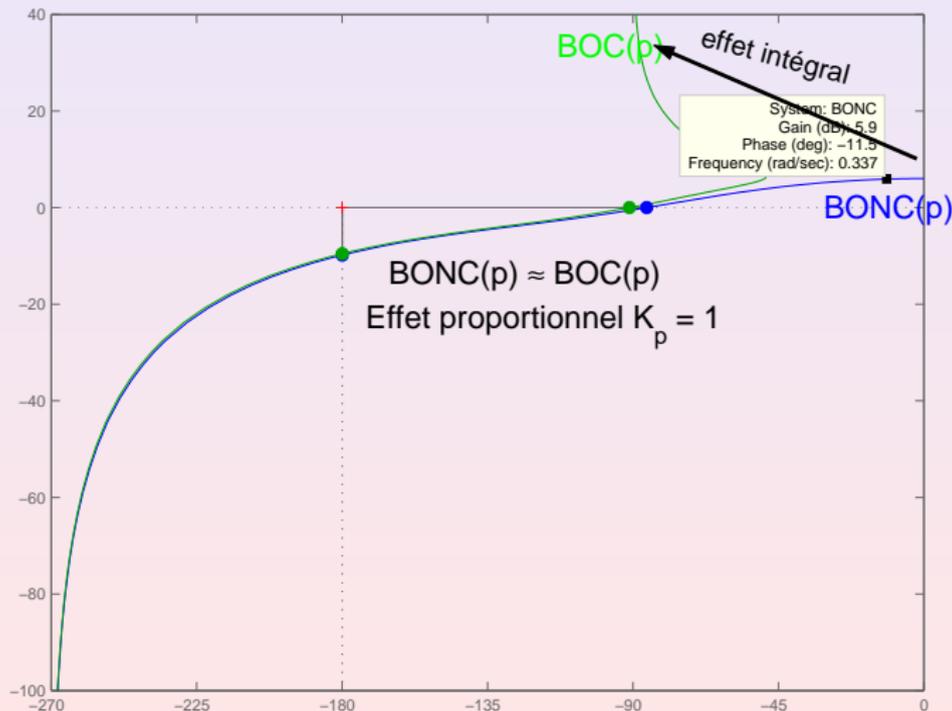
### Détermination des paramètres :

- ▶  $\omega_{0dB} = 3,77 rad/s$  sur la BO non corrigée
- ▶ Mêmes marges  $\Rightarrow$  effet intégrateur voulu à partir de  
 $\omega_i \ll \omega_{0dB} \Rightarrow$  choix de  $\omega_i = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_i = 3$

$$C(p) = 1 + \frac{1}{3p}$$

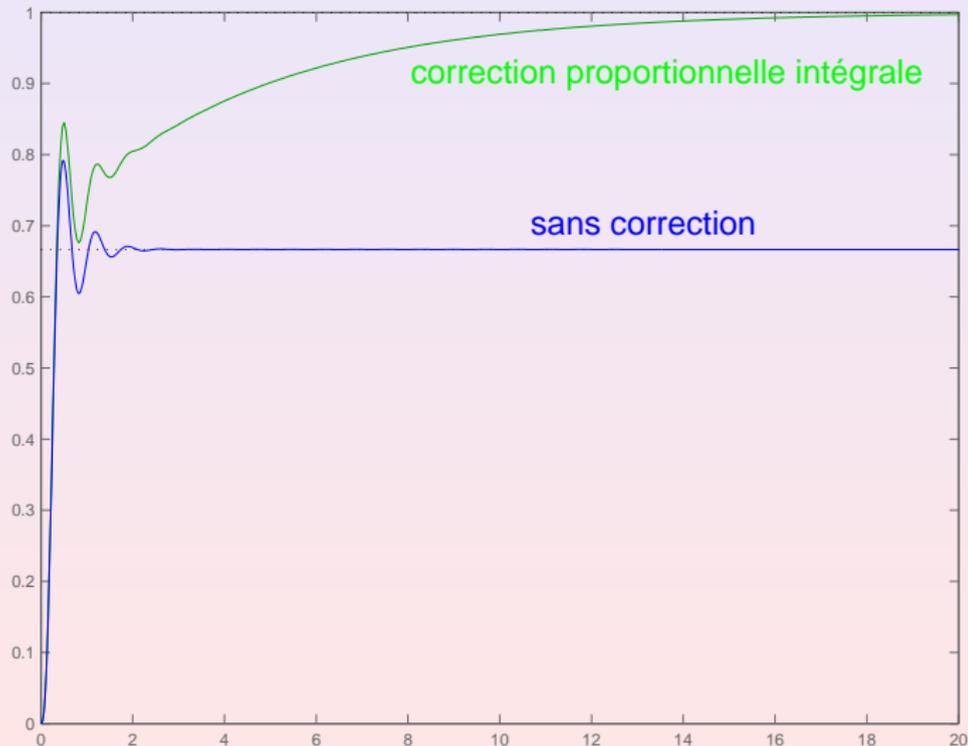
# Correcteur proportionnel-intégral - Exemple

## Diagramme de Black des BO et BOC



# Correcteur proportionnel-intégral - Exemple

Réponses indicielles unitaires



## Correcteur proportionnel-intégral - Exemple

### Performances comparées

BF non corrigée

$$M_G = 9,8_{dB}$$

$$M_\varphi = 94^\circ$$

$$M_R = 0,436$$

$$T_R = 0,95s$$

$$\varepsilon\% = 33,3$$

$$D\% = 19$$

BF correction PI

$$M_G = 9,53_{dB}$$

$$M_\varphi = 89^\circ$$

$$M_R = 0,409$$

$$T_R = 7,92s$$

$$\varepsilon\% = 0$$

$$D\% = 0$$

## Correcteur proportionnel-intégral - influence du gain

A  $T_i$  fixé

▶  $\varepsilon_p = 0 \forall K_p$

▶ en modifiant  $K_p \Rightarrow$  nouveau compromis : stabilité /  $\varepsilon_v$

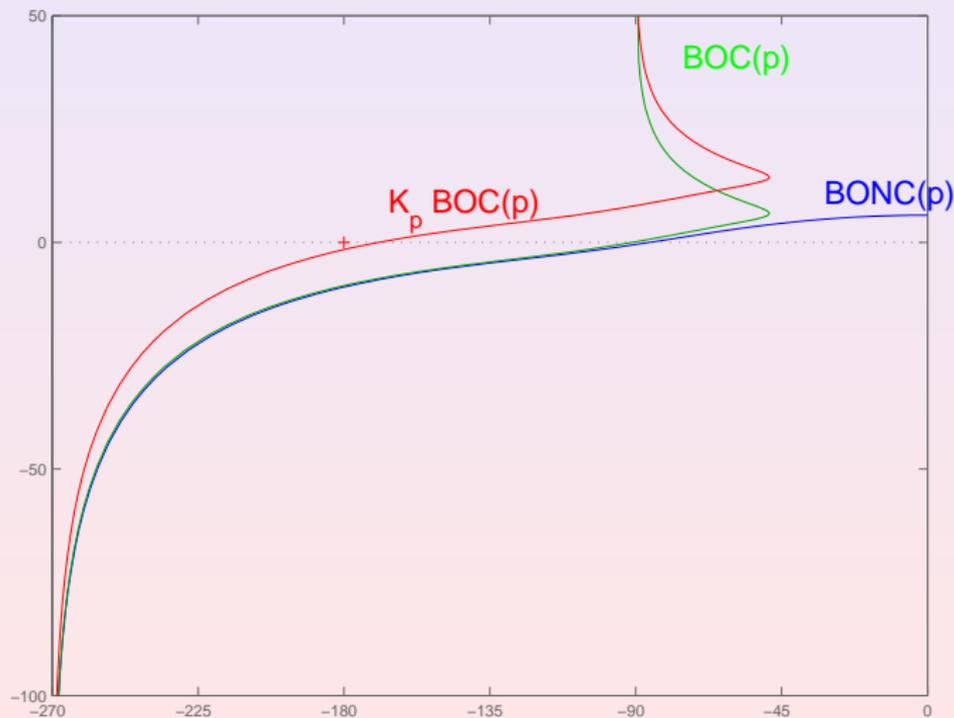
Exemple :

Choix de  $K_p = 2,5$  proche de la limite de stabilité

$$C_2(p) = 2,5 \left( 1 + \frac{1}{3p} \right)$$

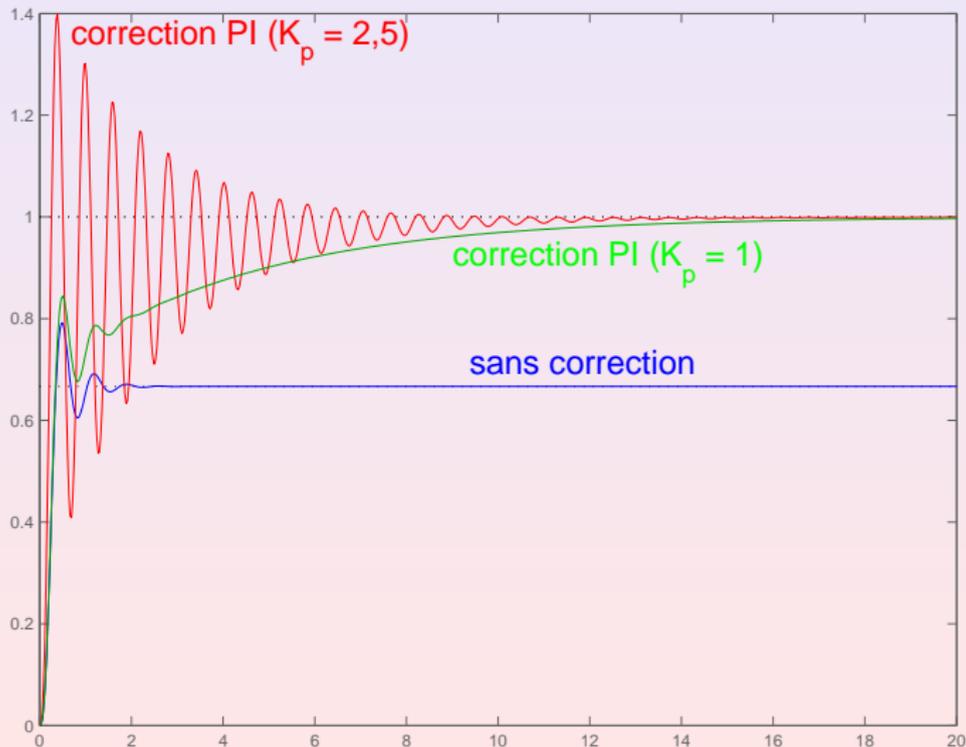
## Correcteur proportionnel-intégral - influence du gain

Diagramme de Black des BONC, BOC et  $K_p$ BOC



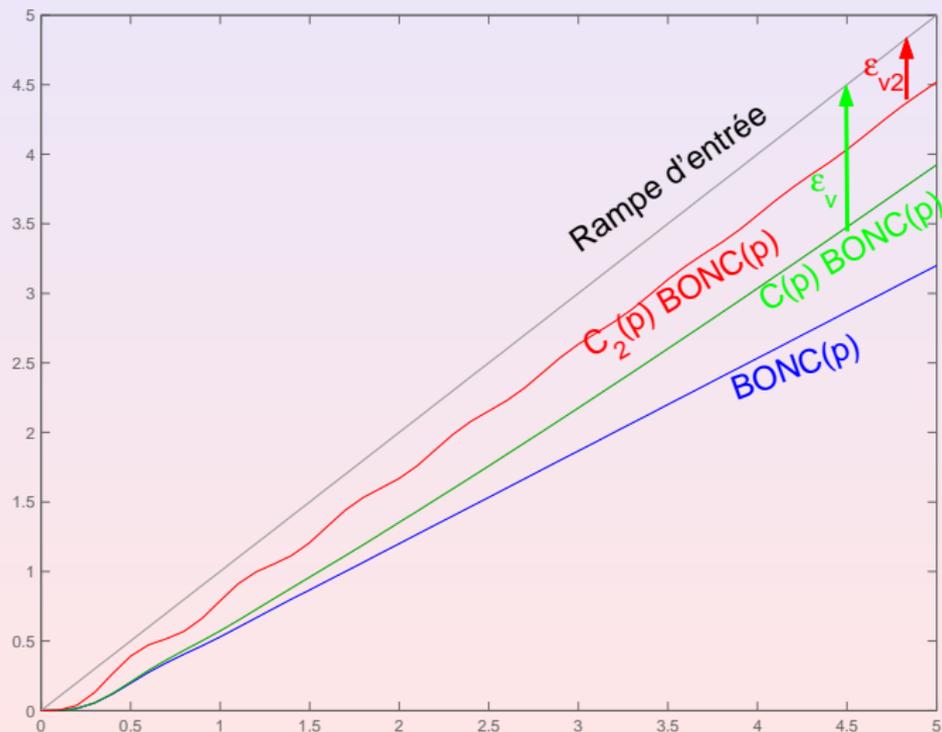
# Correcteur proportionnel-intégral - influence du gain

## Réponses indicielles unitaires



# Correcteur proportionnel-intégral - influence du gain

## Réponses en vitesse



# Correcteur proportionnel-intégral - Exemple

## Performances comparées

BF non corrigée

$$M_G = 9,8_{dB}$$

$$M_\varphi = 94^\circ$$

$$M_R = 0,436$$

$$T_R = 0,95s$$

$$\varepsilon_{p\%} = 33,3$$

$$D\% = 19$$

$$\varepsilon_{v\%} = +\infty$$

BF correction PI

$$K_p = 1$$

$$M_G = 9,5_{dB}$$

$$M_\varphi = 89^\circ$$

$$M_R = 0,409$$

$$T_R = 7,92s$$

$$\varepsilon_{p\%} = 0$$

$$D\% = 0$$

$$\varepsilon_{v\%} = 21,6$$

BF correction PI

$$K_p = 2,5$$

$$M_G = 1,6_{dB}$$

$$M_\varphi = 11^\circ$$

$$M_R = 0,019s$$

$$T_R = 6,8s$$

$$\varepsilon_{p\%} = 0$$

$$D\% = 40$$

$$\varepsilon_{v\%} = 9,6$$

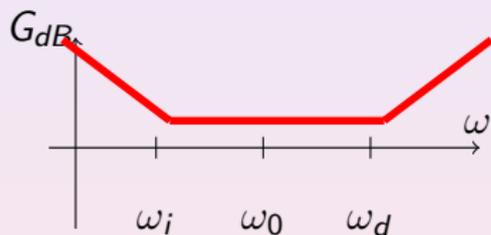
## Correcteur proportionnel-intégral-dérivé

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_v p = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

- ▶ BF : Effet Intégral
  - ▶ annulation de l'erreur par augmentation de la classe du système
- ▶ HF : Effet Dérivé
  - ▶ éviter l'effet déstabilisant autour du point critique
- ▶  $\forall \omega$  : Effet Proportionnel
  - ▶ ddl supplémentaire pour jouer sur stabilité, rapidité, précision de rang suivant

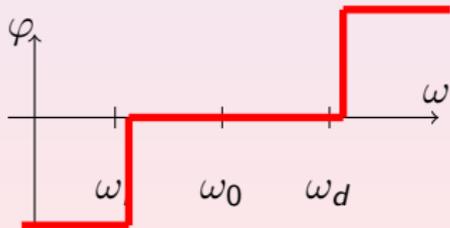
# Correcteur proportionnel-intégral-dérivé - Bode

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_v p = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$



$$\omega_i = \frac{1}{T_i} \quad \omega_d = \frac{1}{T_d}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}} \quad \varphi(\omega_0) = 0$$



$$C(j\omega) = \begin{cases} \frac{K_p}{j\omega T_i} & \text{pour } \omega \ll \omega_i \\ K_p & \text{pour } \omega_i \ll \omega \ll \omega_d \\ j\omega K_p T_d & \text{pour } \omega \gg \omega_d \end{cases}$$

## Correcteur proportionnel-intégral-dérivé - Exemple

$$BONC(p) = \frac{200}{(p^2 + 10p + 100)(1 + 0,5p)}$$

### Spécifications

- ▶  $\varepsilon\% = 0$
- ▶ Améliorer la stabilité

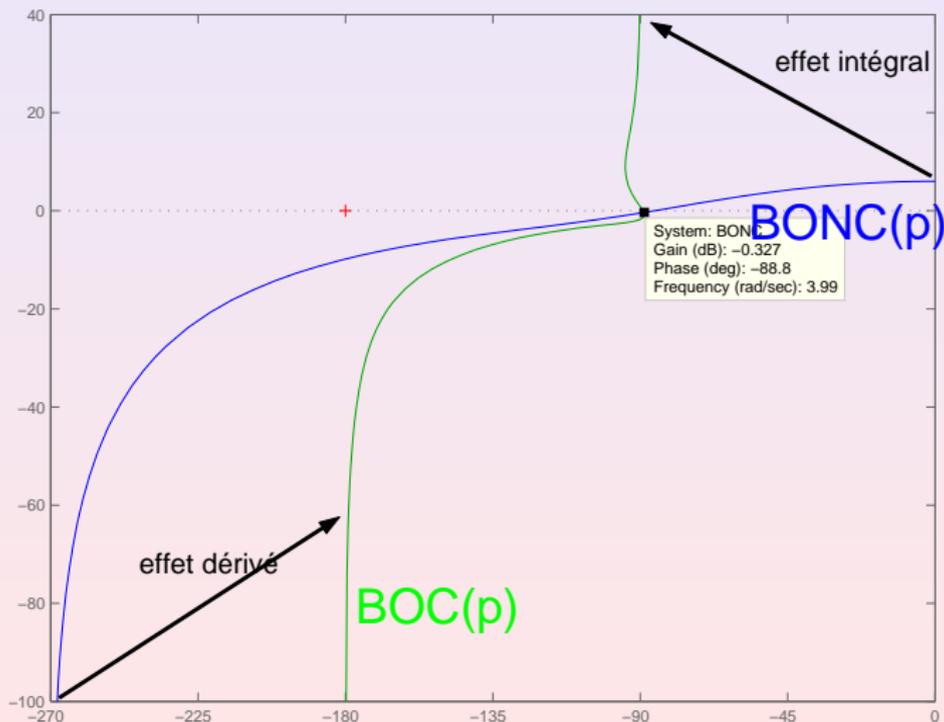
### Détermination des paramètres :

- ▶ choix de la pulsation pivot  $\omega_0 = 4\text{rad/s}$  sur la BO non corrigée
- ▶ Réglage classique :  $T_d = \frac{T_i}{4} \rightsquigarrow T_i = 0,5, T_d = 0,125$

$$C(p) = 1 + \frac{2}{p} + \frac{p}{8}$$

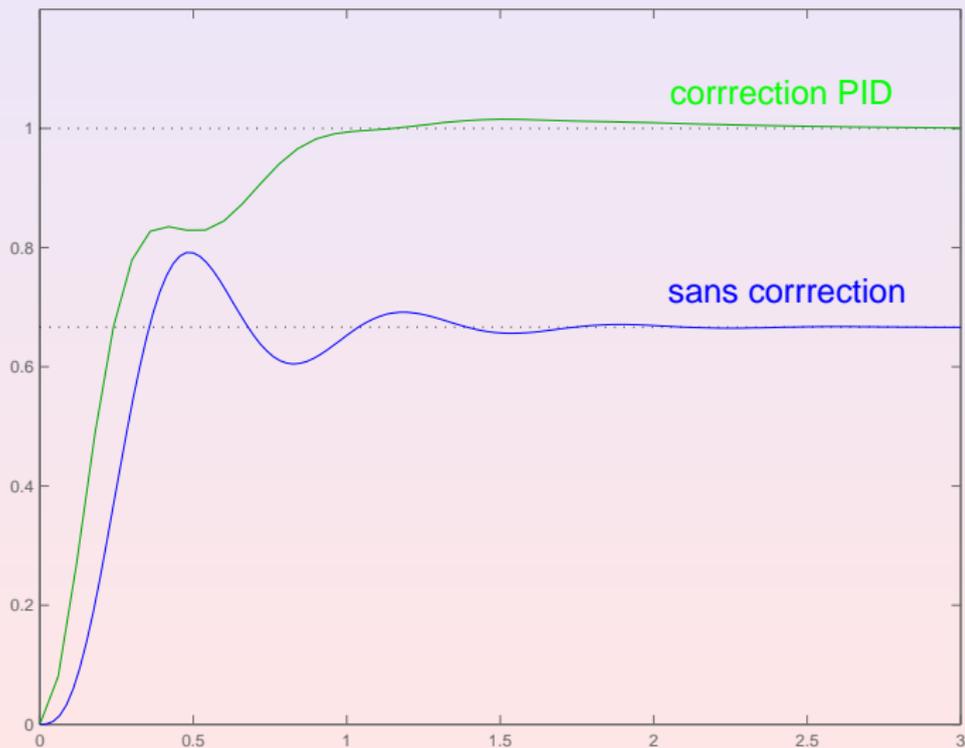
# Correcteur proportionnel-intégral-dérivé - Exemple

Diagramme de Black des BO et BOC



# Correcteur proportionnel-intégral-dérivé - Exemple

## Réponses indicielles unitaires



## Correcteur proportionnel-intégral-dérivé - Exemple

### Performances comparées

BF non corrigée

$$M_G = 9,8_{dB}$$

$$M_\varphi = 94^\circ$$

$$M_R = 0,436$$

$$T_R = 0,95s$$

$$\varepsilon\% = 33,3$$

$$D\% = 19$$

BF correction PID

$$M_G = +\infty$$

$$M_\varphi = 91^\circ$$

$$M_R = 0,42$$

$$T_R = 0,802s$$

$$\varepsilon\% = 0$$

$$D\% = 1,5$$