

Soit l'équation $3x^2+1=y^2$ ($x ; y$) $\in \mathbb{N}^2$ (1)

$$3 \cdot 0^2 + 1 = 1 = 1^2$$

Donc (0 ; 1) est une solution particulière de (1)

On suppose que (a ; b) est un couple solution de (1). Montrons alors que (2a+b ; 3a+2b) est solution de (1)

$$\text{On a alors } 3(2a+b)^2+1=3(4a^2+4ab+b^2)+1=12a^2+12ab+3b^2+1$$

$$\text{Or (a ; b) est solution de (1) donc } 3a^2+1=b^2$$

$$\text{On a donc } 3(2a+b)^2+1=9a^2+12ab+3b^2+b^2=9a^2+4b^2+12ab=(3a+2b)^2$$

(2a+b ; 3a+2b) est donc solution de (1)

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par récurrence par :

$$U_0=0$$

$$V_0=1$$

$$U_{n+1}=2U_n+V_n$$

$$V_{n+1}=3U_n+2V_n$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(U_n ; V_n)$ est solution de (1) :

Initialisation :

Vérifions cette propriété pour $n=0$

(0 ; 1) est solution de (1)

La propriété est donc vraie au rang 0.

Caractère héréditaire :

Supposons que $(U_k ; V_k)$ est solution de (1) pour $k \in \mathbb{N}$:

Comme d'après l'hypothèse de récurrence $(U_k ; V_k)$ est solution de (1) alors

$(2U_k+V_k ; 3U_k+2V_k)$ est solution de (1)

$$\text{Or } U_{k+1}=2U_k+V_k \text{ et } V_{k+1}=3U_k+2V_k$$

Donc $(U_{k+1} ; V_{k+1})$ est solution de (1)

La propriété est donc vraie au rang $k+1$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(U_n ; V_n)$ est solution de (1)

Comme $U_{n+1}-U_n=V_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (U_n) est strictement croissante

On suppose qu'il existe $(k ; k' ; \alpha) \in \mathbb{R}^3$ tel que $kU_{n+1}+k'V_{n+1}=\alpha(kU_n+k'V_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow k(2U_n+V_n)+k'(3U_n+2V_n)=\alpha kU_n+\alpha k'V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow U_n(2k+3k')+V_n(k+2k')=\alpha kU_n+\alpha k'V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On procède par identification pour affirmer que

$$2k+3k'=\alpha k \text{ et } k+2k'=\alpha k'$$

$$\Leftrightarrow k'(2k+3k')=k(k+2k') \text{ et } k+2k'=\alpha k'$$

$$\Leftrightarrow 3k'^2=k^2 \text{ et } k+2k'=\alpha k'$$

$$\Leftrightarrow k=\sqrt{3}k' \text{ ou } k=-\sqrt{3}k' \text{ et } k+2k'=\alpha k'$$

$$\Leftrightarrow k=\sqrt{3}k' \text{ et } \alpha=2+\sqrt{3} \text{ ou } k=-\sqrt{3}k' \text{ et } \alpha=2-\sqrt{3}$$

Soient $X_n=\sqrt{3}U_n+V_n$ et $Y_n=-\sqrt{3}U_n+V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(X_n) est la suite géométrique de premier terme $X_0=\sqrt{3}U_0+V_0=1$ et de raison $2+\sqrt{3}$

(Y_n) est la suite géométrique de premier terme $Y_0=-\sqrt{3}U_0+V_0=1$ et de raison $2-\sqrt{3}$

Donc $X_n=(2+\sqrt{3})^n$ et $Y_n=(2-\sqrt{3})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$X_n+Y_n=2V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow V_n = [(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] / 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$X_n - Y_n = 2\sqrt{3}U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow U_n = [(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n] / 2\sqrt{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2+\sqrt{3} > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} ((2+\sqrt{3})^n) = +\infty$$

$$-1 < 2-\sqrt{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} ((2-\sqrt{3})^n) = 0$$

D'après les règles opératoires sur les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = +\infty$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k \leq n < U_{k+1}$:

$$U_0 = 0 \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } U_k \leq n$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = +\infty$ donc (U_n) est non majorée

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k' \in \mathbb{N}$ tel que $n < U_{k'}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Soit $E = \{U_k > n, k \in \mathbb{N}\}$

E est non vide car $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k > n$

Or comme $E \subset \mathbb{N}$, alors E admet un plus petit élément

Soit k l'entier tel que U_{k+1} soit le plus petit élément de E

Comme (U_n) est strictement croissante, $\forall k' \in \mathbb{N}$, tel que $k' \geq k+1, U_{k'} \geq U_{k+1} > n$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k'' \in \mathbb{N}$ tel que $U_{k''} \leq n$

Donc $\exists k''' \in \mathbb{N}$ tel que $k''' < k+1$

Par conséquent $k \in \mathbb{N}$

Comme (U_n) est strictement croissante, $U_k < U_{k+1}$ or U_{k+1} est le plus petit élément de E donc $U_k \notin E$

D'où $U_k \leq n$

Il en résulte que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k \leq n < U_{k+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier k distinct de $U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ solution de (1)

Donc $\exists h \in \mathbb{N}$ tel que $U_h < k < U_{h+1}$

Montrons que si $(2a+b; 3a+2b)$ est solution de (1) alors $(a; b)$ est solution de (1) avec $a \geq 0$

On a alors $3(2a+b)^2 + 1 = (3a+2b)^2$

$$\Leftrightarrow 3(4a^2 + 4ab + b^2) + 1 = 9a^2 + 4b^2 + 12ab$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 + 12ab + 3b^2 + 1 = 9a^2 + 4b^2 + 12ab$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 1 = b^2$$

$(a; b)$ est donc solution de (1)

On pose $A = 2a+b$ et $B = 3a+2b$

On a alors :

$$b = A - 2a$$

$$\text{Donc } B = 3a + 2(A - 2a) = 3a + 2A - 4a = -a + 2A \Leftrightarrow a = 2A - B$$

$$\text{Aussi } b = A - 2(2A - B) = A - 4A + 2B = 2B - 3A$$

Donc si $(a; b)$ est solution de (1) alors $(2a-b; -3a+2b)$ est solution de (1) avec $2a-b \geq 0$

Soient $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par récurrence par :

$$K_0 = k$$

$$K'_0 = \sqrt{3k^2 + 1}$$

$$K_{n+1} = 2K_n - K'_n$$

$$K'_{n+1} = -3K_n + 2K'_n$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \geq 0$, $(K_n; K'_n)$ est solution de (1) :

Initialisation :

Vérifions cette propriété pour $n=0$

$(k; \sqrt{3k^2 + 1})$ est solution de (1)

La propriété est donc vraie au rang 0.

Caractère héréditaire :

Supposons que $(K_k; K'_k)$ est solution de (1) pour $k \in \mathbb{N}$ et $K_{k+1} \geq 0$:

Comme d'après l'hypothèse de récurrence $(K_k; K'_k)$ est solution de (1) alors $(2K_k - K'_k; -3K_k + 2K'_k)$ est solution de (1) comme $2K_k - K'_k \geq 0$

Donc $(K_{k+1}; K'_{k+1})$ est solution de (1)

La propriété est donc vraie au rang $k+1$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \geq 0$, $(K_n; K'_n)$ est solution de (1)

$\exists h \in \mathbb{N}$ tel que $U_h < k < U_{h+1}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $h \geq n$, $U_{h-n} < K_n < U_{h-n+1}$:

Initialisation :

Vérifions cette propriété pour $n=0$

$$U_h < k < U_{h+1}$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Caractère héréditaire :

Supposons que $U_{h-n} < K_n < U_{h-n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $h \geq n+1$

On raisonne par l'absurde et on suppose que $K_{n+1} \geq U_{h-n}$

Soit $f : x \mapsto 2x + \sqrt{3x^2 + 1}$

Dérivabilité :

$x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, alors $x \mapsto \sqrt{3x^2 + 1}$ est dérivable lorsque $3x^2 + 1 \in]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

On a donc $f'(x) = 2 + 3x/\sqrt{3x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$\forall x \in]-\infty; 0]$, $f'(x) = 2 - 3(-x)/\sqrt{3(-x)^2 + 1}$

On pose $X = -x > 0$

Pour tout $X \in \mathbb{R}^+$, $4(3X^2 + 1) - 9X^2 = 12X^2 + 4 - 9X^2 = 3X^2 + 4 > 0$

$$\Leftrightarrow 4(3X^2+1) > 9X^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3X^2+1} > 3X \text{ comme } X > 0 \text{ et } \sqrt{3X^2+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 > 3X/\sqrt{3X^2+1} \text{ comme } 1/\sqrt{3X^2+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) > 0$$

Donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

Il en résulte que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(K_{n+1}) \geq f(U_{h-n})$

$$\Leftrightarrow K_n \geq U_{h-n+1}$$

Ce qui est absurde

On raisonne par l'absurde et on suppose que $K_{n+1} \leq U_{h-n-1}$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(K_{n+1}) \leq f(U_{h-n-1})$

$$\Leftrightarrow K_n \leq U_{h-n}$$

Ce qui est absurde

Donc $U_{h-n-1} < K_{n+1} < U_{h-n}$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $h \geq n$, $U_{h-n} < K_n < U_{h-n+1}$

Par conséquent pour $h=n$, $U_{h-h} < K_h < U_{h-h+1}$

$$\Leftrightarrow 0 < K_h < 1$$

Ce qui est absurde comme K_h est solution de (1)

L'ensemble des solutions de (1) est donc $\{(U_n; V_n) | n \in \mathbb{N}\}$

Soit $\{[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n]/2\sqrt{3}; [(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]/2 \mid n \in \mathbb{N}\}$