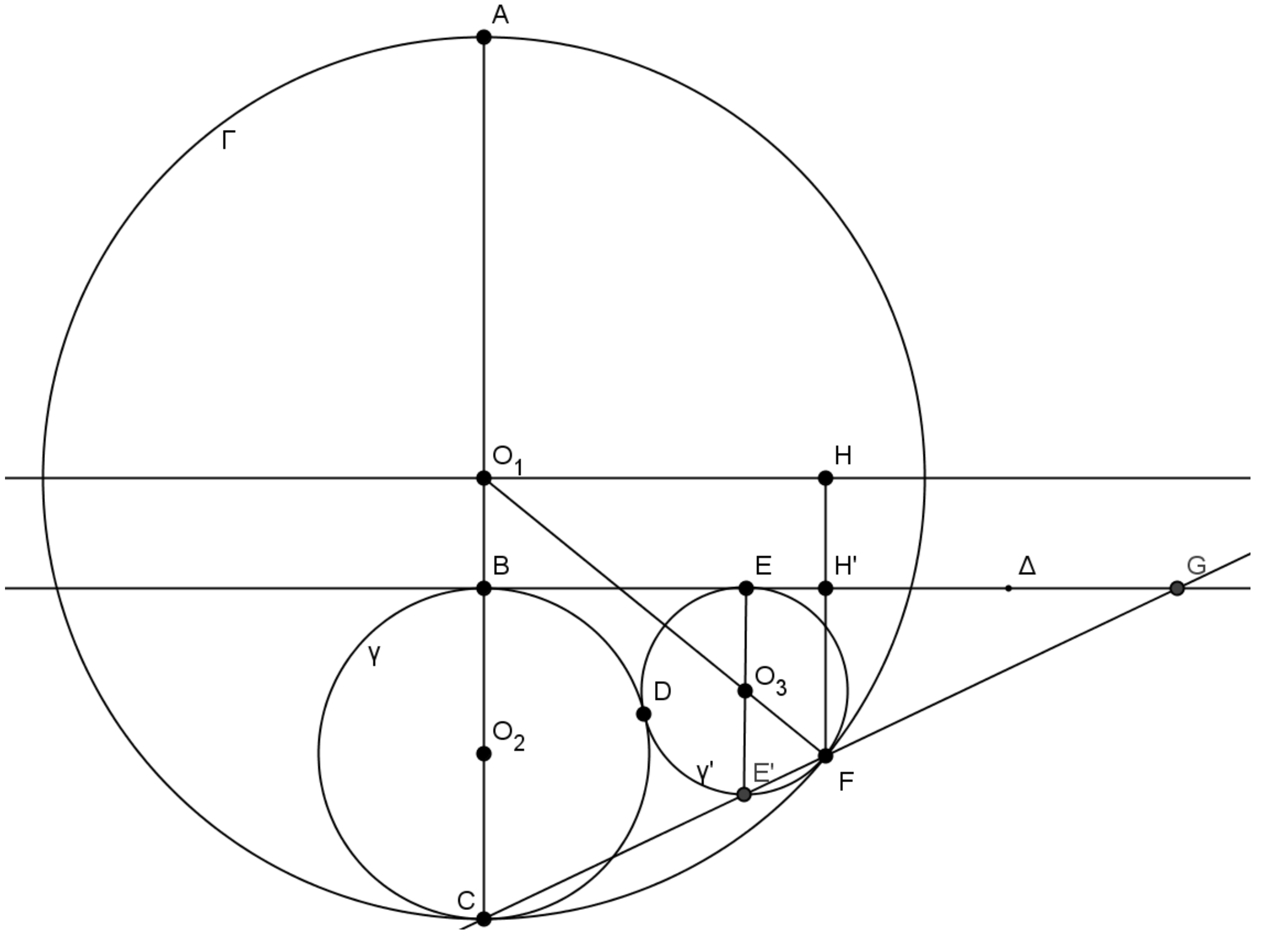
Correction concours général mathématiques 2010

Exercice 1



remarques préliminaires

Si 2 cercles de centre O et O' sont tangents en A , alors O,A et O' sont alignés

Donc O_2 D O_3 sont alignés et F O_3 O_1 sont alignés.

(BO_2) et (EO_3) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à Δ

si $kk' \neq 1$, la composée d'une homothétie de rapport k et d'une homothétie de rapport k' est une homothétie de rapport kk'.

On notera par clarté R_1 (= R) , R_2 (= r) et R_3 = (r') les rayons des cercles de centre O_1 , O_2 et O_3 .

1. Soit H le projeté orthogonal de F sur la perpendiculaire à (AC) passant par O_1.
   (FH) coupe (BE) en H' . $FH < FO_1 = O_1C$, donc $FH' < BC$,
   donc BH'FC est un trapèze non parallélogramme et Δ et (CF) sont sécantes.

   remarque : de la même manière, on peut montrer que $R_3 < R_2$, donc $R_3 < R_2 < R_1$

2. Soit h l'homothétie de centre C qui transforme B en A. Son rapport est $\frac{AC}{BC} = \frac{R_1}{R_2}$
   L'image par h du cercle de diamètre [BC] est le cercle de diamètre [AC] , donc l'image de γ est Γ.

   Soit h' l'homothétie de centre F qui transforme O_1 en O_3. Son rapport est $\frac{O_3F}{O_1F} = \frac{R_3}{R_1}$
   L'image par h' du cercle de centre O_1 passant par F est le cercle de centre O_3 passant par F, donc l'image de Γ est γ'

3. Le rapport des rayons des deux cercles est $\frac{R_3}{R_2} \neq 1$, donc les deux rapports possibles des homothéties cherchées sont $\frac{R_3}{R_2}$ ou $-\frac{R_3}{R_2}$ .Par une homothétie , l'image d'une droite est une droite parallèle, donc l'image de (BC) est la droite (EO_3)

Il n'y a donc que deux possibilités :

i) O_2 a pour image O_3 , C a pour image E et le rapport de l'homothétie est $-\frac{R_3}{R_2}$

Soit Ω le centre de cette homothétie , $\overrightarrow{\Omega O_3} = -\frac{R_3}{R_2}\overrightarrow{\Omega O_2}$, ce qui définit Ω de manière unique comme barycentre de $\{(O_3,R_2)\ (O_2,R_3)\}$ donc Ω = D
On vérifie ensuite que cette homothétie transforme γ en γ'.

ii) Le rapport de l'homothétie est $\frac{R_3}{R_2}$, l'image de B est E et celle de O_2 et O_3

$\frac{R_1}{R_2} \times \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} \neq 1$, donc h' o h (h et h' homothéties de la question 2) est une homothétie de rapport $\frac{R_3}{R_2}$, et qui transforme γ en γ' (il suffit d'appliquer h puis h') .

L'image par h' o h de B est l'intersection de la parallèle à (BO_2) passant par O_3 et de γ ', c'est E car le rapport de h' o h est positif. L'image de O_2 est O_3 , donc h' o h est l'unique homothétie de rapport $\frac{R_3}{R_2}$ qui transforme γ en γ'.

Le centre de h est C , donc la droite (CF) est globalement invariante par h
Le centre de h' est F, donc (CF) est invariante par h' , donc (CF) est invariante par h' o h , donc elle contient le centre de h' o h

Le centre de h' o h est donc l'intersection de (CF) et (BE), c'est le point G .

remarque . On en déduit de plus que O_2 , D , O_3 et G sont alignés.

4. C,D et E sont alignés car E est l'image de C par l'homothétie de centre D et de rapport $-\frac{R_3}{R_2}$
Par l'homothétie h' , l'image de A est E , donc A,E et F sont alignés.
Par l'homothétie de centre G qui transforme γ en γ' , l'image de C est le point E' de (CG) diamétralement opposé à E sur γ' , et EE'F est un triangle rectangle , donc (EF) = (AF) est perpendiculaire à (E'F) = (CG)

Dans le triangle AGC , on connaît donc 2 hauteurs (AF) et (BG) , qui se coupent en E.
(CE) est la troisième hauteur , elle est perpendiculaire à (AG).
I est le milieu de [BE] et O_2 de [BC] , donc (IO_2) // (EC) , donc (IO_2) est perpendiculaire à (AG) .
Dans le triangle AGO_2 , on a donc 2 hauteurs (IO_2) et (BG) qui se coupent en I
La troisième hauteur est donc (AI) , elle est perpendiculaire à (O_2O_3) donc à (GD)

(O_2I) est parallèle à (CD) déjà vu et (CD) est perpendiculaire à (BD) , car D appartient au cercle de diamètre [BC] , donc (O_2I) est perpendiculaire à (BD) et comme O_2 est équidistant de B et D , (O_2I) est la médiatrice de [BD] , donc IB = ID = IE
Donc (IO_3) est la médiatrice de [DE] , donc par symétrie par rapport à (IO_3) ,
$\widehat{O_3DI} = \widehat{O_3EI} = 90°$, donc (ID) est perpendiculaire à (O_3D) = (O_2O_3) donc (AI) et (ID) perpendiculaires à (O_2O_3) sont confondues

5. On en déduit facilement que les triangles ABI et GDI sont isométriques
$\widehat{AIB} = \widehat{DIG}$ (angles opposés par le sommet) , $\widehat{ABG} = \widehat{IDG} = 90°$ donc ils sont semblables avec un côté égal IB = ID , donc ils sont isométriques, donc AB = GD

6. Soit R_1 , R_2 et R_3 les rayons des cercles de centre O_1 , O_2 et O_3 .
G est le centre de l'homothétie de rapport $\frac{R_3}{R_2}$, donc $\overrightarrow{GO_3} = \frac{R_3}{R_2}\overrightarrow{GO_2}$

d'où $\overrightarrow{GO_3}\,(1 - \frac{R_3}{R_2}) = \frac{R_3}{R_2}\,\overrightarrow{O_2O_3}$, donc $GO_3 = \dfrac{\frac{R_3}{R_2}}{1 - \frac{R_3}{R_2}} \times (R_2 + R_3) = \dfrac{R_3R_2 + R_3^2}{R_2 - R_3}$

puis $GD = GO_3 + DO_3 = \dfrac{R_3R_2 + R_3^2}{R_2 - R_3} + R_3 = \dfrac{2\,R_2R_3}{R_2 - R_3}$

Or $AB = 2R_1 - 2R_2$, donc $2R_1 - 2R_2 = \dfrac{2\,R_2R_3}{R_2 - R_3}$

donc $2\,R_2R_3 = 2\,R_1R_2 - 2\,R_2^2 - 2\,R_1R_3 + 2\,R_2R_3$
donc $2\,R_1R_3 = 2\,R_1R_2 - 2\,R_2^2$
donc $R_3 = R_2 - \dfrac{R_2^2}{R_1} = R_2(1 - \dfrac{R_2}{R_1})$ soit avec les notation de l'énoncé $r' = r\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$

Exercice 2

1) avec n = 3 points , un seul triangle ABC donc t(3) = 1
avec n = 4 points A,B,C et D
on peut construire 4 triangles ABC , ABD , ACD et BCD et on vérifie que 2 triangles quelconques ont deux sommets en commun donc t(4) = 4

2) Avec n = 5 points A , B , C , D , E
Parmi les t(5) triangles construits , 2 pris au hasard ont au moins deux sommets en commun. On peut supposer ABC et ABD
Avec 5 sommets, on peut construire 10 triangles
ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE
Parmi les t(5) triangles construits , 2 quelconques ont 2 sommets en commun
Par exemple ABC et ABD . La construction de ces deux triangles élimine les triangles ACE , BCE , BDE et CDE , il reste ABC ABD ABE ACD et BCD
Si on choisit ABC , ABD et ABE , on doit éliminer ACD et BCD
Si on ne construit pas ABE , on peut construire ABC , ABD , ACD et BCD .

En conclusion le plus grand nombre de triangles que l'on puisse construire avec 5 points est 4 donc t(5) = 4 .
Avec n = 6 points A , B , C , D , E , F , en procédant de même , on obtient t(6) = 4
Par exemple ABC , ABD , ABE et ABF

Soit P(n) la propriété : $\{1 \le t(3) \le 3 , 2 \le t(4) \le 4 , \ldots\ldots , n - 3 \le t(n-1) \le n - 1\}$. P(7) est vraie
Supposons que pour un certain entier $n \ge 7$, P(n) soit vraie
Pour n sommets $X_1 , \ldots , X_n$ avec $n \ge 7$, on part de 2 triangles ayant 2 sommets en commun X_1 et X_2 , $X_1X_2X_3$ et $X_1X_2X_4$
On peut constituer 4 groupes de triangles
Groupe 1 : $X_1X_2X_3$ et $X_1X_2X_4$
Groupe 2 : $X_1X_3X_4$ et $X_2X_3X_4$
Groupe 3 : $X_1X_2X_5$, $X_1X_2X_6$, ……… , $X_1X_2X_n$
Groupe 4 : triangles constructibles avec les n – 4 points X_5 , X_6 , ……. , X_n

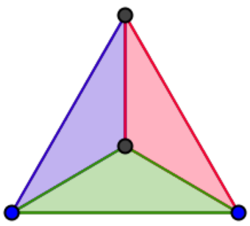
Pour construire des triangles répondant à la règle , on part des deux triangles du groupe 1
1^er^ choix : on choisit les triangles du groupe 2 , ce qui élimine tous les triangles du groupe 2 et on utilise tous les triangles du groupe 4 , ce qui donne 2 (groupe 1) + 2 (groupe 2) + $t(n-4)$ (groupe 4) , donc on obtient $4 + t(n-4)$ triangles .
et on a l'encadrement $n - 6 \leq t(n-4) \leq n - 4$, donc $n - 2 \leq 4 + t(n-4) \leq n$

2^ème^ choix : on ne choisit pas les triangles du groupe 2 , mais ceux du groupe 3
Si on choisit $X_1 X_2 X_5$, on doit éliminer tous les triangles du groupe 4 avec X_5 , et il restera la possibilité de construire $t(n-5)$ triangles du groupe 4
ce qui donnera (groupe 1) + 1(groupe 3) + $t(n-5) = 3 + t(n-5)$
Si on choisit k ($k \leq n - 7$) triangles du groupe 3 , on doit éliminer k sommets du groupe 4 , et il restera la possibilité de construire $t(n-4-k)$ triangles du groupe 4
ce qui donnera $2 + k + t(n-4-k)$ triangles constructibles avec n sommets
mais $2 + k + t(n-4-k) \leq 2 + k + n - 4 - k = n - 2$
Si on choisit $k \in \{n-6 , n-5 ; n-4\}$, on ne peut plus construire de triangles dans le groupe 4 , donc le nombre total de triangles constructibles est au mieux $k + 2 \leq n - 4 + 2 = n - 2$
donc P(n+1) est vraie , donc pour tout n , $t(n) \leq n$

De plus c'est la première méthode qui donne le plus de triangles pour tout n ;
donc $t(n) = 4 + t(n-4)$
Puis on montre par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$
$t(4k) = 4k$, $t(4k+1) = 4k$, $t(4k+2) = 4k$, $t(4k+3) = 4k + 1$

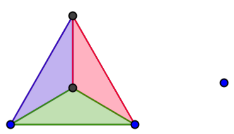
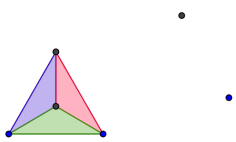
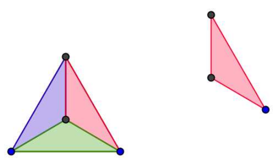
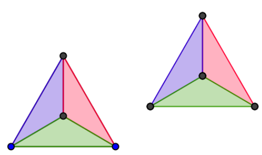
3) On rajoute ensuite la condition sur le non-recoupement des triangles

Avec 4 sommets , on obtient 3 triangles qui ne se recoupent pas



donc $u(4) = 3$

On ne peut plus rajouter de triangles à cette figure sinon les triangles supplémentaires auraient un seul point commun avec des triangles déjà construits .

 Avec un 5^ème^ point à partir de cette figure, on ne peut construire de triangles supplémentaires $u(5) = 3$	 Avec un 6^ème^ point , on a encore $u(6) = 3$	 Avec un 7^ème^ point $u(7) = 4$	 Avec un 8^ème^ point $u(8) = 6$

4) A la condition de ne pas pourvoir faire mieux pour n = 5,6,7 ou 8 , on pourrait ensuite montrer par récurrence que
$u(4k) = u(4k+1) = u(4k+2) = 3k$ et $u(4k+3) = 3k + 1$

Exercice 3

1. a. la probabilité qu'il n'y ait pas compatibilité est 6abc
(pour les 6 cas ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA)
donc la probabilité qu'il y ait compatibilité est p = 1 – 6abc

b. minorer p revient à majorer abc
$abc = a(1 - a - c)c = ac - a^2c - ac^2$
Soit c un réel donné $\in [0;1]$
On pose $\phi(x) = cx - cx^2 - c^2x$ de dérivée $\phi'(x) = -2cx + c - c^2$ fonction affine qui s'annule pour $x = \frac{1-c}{2}$. On en déduit le tableau de variation de ϕ sur [0;1]

x	0		$\frac{1-c}{2}$		1
$\phi'(x)$		+	0	–	
$\phi(x)$	0	$\nearrow$	$\phi(\frac{1-c}{2})$	$\searrow$	$-c^2$

donc $abc = \phi(a) \leq \phi\left(\frac{1-c}{2}\right)$

$$\phi\left(\frac{1-c}{2}\right) = c\left(\frac{1-c}{2}\right) - c\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - c^2\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{c^3 - 2c^2 + c}{4}$$

Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - \frac{1}{3})(x - 1)$ (avec Δ)

On en déduit le tableau de variation de f

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

donc $f(c) \leq \frac{4}{27}$, donc $\phi\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{f(c)}{4} \leq \frac{1}{27}$ et donc $abc = \phi(a) \leq \phi\left(\frac{1-c}{2}\right) \leq \frac{1}{27}$, donc $6\,abc \leq \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$,
donc $1 - 6abc \geq 1 - \frac{2}{9}$, ce qui donne finalement $p \geq \frac{7}{9}$

2. Etude du premier scénario

(a) Les cas où la descendance est A et les parents compatibles se produit lorsque les parents sont : AAA , AAB , ABA , BAA , AAC , ACA , CAA ce qui donne pour probabilité

$$a_n^3 + 3a_n^2b_n + 3a_n^2c_n = a_n^2(a_n + 3b_n + 3c_n) \text{ et avec } b_n + c_n = 1 - a_n$$
$$= a_n^2(a_n + 3(1 - a_n)) = a_n^2(3 - 2a_n)$$

La probabilité que la descendance soit de type A sachant que les 3 parents sont compatibles est donc $a_{n+1} = \frac{P(\text{descendance est A} \cap \text{parents compatibles})}{P(\text{parents compatibles})} = \frac{a_n^2(3 - 2a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$

De même pour b_{n+1} et c_{n+1}.

(b) Soit $f(x) = x^2(3-2x) = 3x^2 - 2x^3$ de dérivée $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1-x)$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

Soit P(n) " $0 < c_n < b_n < a_n < 1$ " pour n entier naturel
P(0) est vraie par hypothèse

Supposons que pour un certain entier naturel n , P(n) soit vraie
$0 < c_n < b_n < a_n < 1$, donc f étant croissante sur [0;1] , $0 < f(c_n) < f(b_n) < f(a_n) < 1$
donc en divisant par $1 - 6a_nb_nc_n$, on obtient $0 < c_{n+1} < b_{n+1} < a_{n+1} < 1$

On a montré par récurrence que pour tout naturel n , $0 < c_n < b_n < a_n < 1$

donc pour tout n , $a_n + b_n + c_n > 3c_n$, donc $3c_n < 1$ et $c_n < \dfrac{1}{3}$

et $a_n + b_n + c_n < 3a_n$, donc $1 < 3a_n$ et $a_n > \dfrac{1}{3}$

$2b_n < a_n + b_n = 1 - c_n < 1$, donc $b_n < \dfrac{1}{2}$

(c) $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n} - \dfrac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n} = \dfrac{3(a_n^2 - b_n^2) - 2(a_n^3 - b_n^3)}{1-6a_nb_nc_n}$

Or $1 - 6a_nb_nc_n < 1$, donc $\dfrac{1}{1-6a_nb_nc_n} > 1$

donc $a_{n+1} - b_{n+1} > 3(a_n^2 - b_n^2) - 2(a_n^3 - b_n^3) = 3(a_n - b_n)(a_n + b_n) - 2(a_n - b_n)(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2)$

donc $\dfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} > 3(a_n + b_n) - 2(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2) = 3(a_n + b_n) - 2[(a_n + b_n)^2 - a_nb_n]$

$= 3(1 - c_n) - 2[(1 - c_n)^2 - a_nb_n]$
$= 1 + c_n - 2c_n^2 + 2a_nb_n$

or a_n et $b_n > c_n$ donc $2a_nb_n > 2c_n^2$

donc $\dfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} > 1 + c_n - 2c_n^2 + 2c_n^2 > 1 + c_n > 1$, donc $(a_n - b_n)$ est croissante

De même $\dfrac{a_{n+1} - c_{n+1}}{a_n - c_n} > 1 + b_n - 2b_n^2 + 2a_nc_n = 1 + b_n(1 - 2b_n) + 2a_nc_n > 1$ car $b_n < \dfrac{1}{2}$
donc la suite $(a_n - c_n)$ est croissante

(d) On en déduit que la suite $v_n = a_n - b_n + a_n - c_n$ est croissante

Or $v_n = 3a_n - 1$, donc $a_n = \dfrac{v_n + 1}{3}$ et (a_n) est croissante

La suite (a_n) est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente de limite A

$(a_n - b_n)$ est croissante et majorée par 1 , donc convergente , donc $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ est convergente comme somme de suites convergentes , de limite B

De même on montre que la suite (c_n) est convergente de limite C

Les relations de récurrence montrent en utilisant $\lim A_n = \lim A_{n+1} = A$

que $\begin{cases} A = \dfrac{A^2(3-2A)}{1-6ABC} \\ B = \dfrac{B^2(3-2B)}{1-6ABC} \\ C = \dfrac{C^2(3-2C)}{1-6ABC} \end{cases}$ et la relation $a_n + b_n + c_n = 1$ entraîne $A + B + C = 1$

Supposons $C \neq 0$, alors $C(3 - 2C) = 1 - 6ABC \geq \dfrac{7}{9}$ d'après 1)b)

d'où après simplification $18C^2 - 27C + 7 \leq 0$ soit $C \in [\dfrac{1}{3} ; \dfrac{7}{6}]$ (avec Δ)

Or pour tout n , $c_n < \dfrac{1}{3}$, donc $C \leq \dfrac{1}{3}$, donc $C = \dfrac{1}{3}$ et $A + B = \dfrac{2}{3}$

On remplace C par $\dfrac{1}{3}$ dans le système, $\begin{cases} A(1 - 2AB) = A^2(3 - 2A) \\ B(1 - 2AB) = B^2(3 - 2B) \end{cases}$

Pour tout n , $a_n > \dfrac{1}{3}$, donc $A \neq 0$, donc $1 - 2A(\dfrac{2}{3} - A) = A(3 - 2A)$

puis $12 A^2 - 13 A + 1 = 0$ ce qui donne $A = 1$ ou $A = \dfrac{1}{12}$

$A = 1$ donne $B = -\dfrac{1}{3}$ et $A = \dfrac{1}{12}$ impossible car $A \geq \dfrac{1}{3}$

On vient de montrer par l'absurde que $C = 0$, donc $A = A^2(3 - 2A)$

$A \neq 0$ donc $1= A(3 - 2A) \Leftrightarrow 2A^2 - 3A + 1 = 0 \Leftrightarrow A = 1$ ou $A = \dfrac{1}{2}$

La solution $A = B = \dfrac{1}{2}$ est impossible car la suite $(a_n - b_n)$ est croissante

donc pour tout n , $a_n - b_n \geq a_0 - b_0$ et par passage à la limite , $A - B \geq a_0 - b_0 > 0$
soit $A > B$

Il reste donc la solution $A = 1$ et $B = 0$ et on vérifie que $(1,0,0)$ est solution du système

3. Etude du second scénario

(a) Les cas où la descendance est A et les parents compatibles se produit lorsque les parents sont : AAA , ABB , BBA , BAB , ACC , CCA , CAC ce qui donne pour probabilité

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 3a_n(b_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n^3 + 3b_n(a_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n} \ ; \ c_{n+1} = \frac{c_n^3 + 3c_n(a_n^2 + b_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

on a $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 1$ (propriété des probabilités)

(b) On considère la propriété P(n) : "$1 > a_n > b_n > c_n > 0$"
P(0) est vraie par hypothèse

Supposons P(n) vraie pour un certain entier naturel n

$a_{n+1} - b_{n+1}$ est du signe de $a_n^3 + 3a_nb_n^2 + 3a_nc_n^2 - b_n^3 - 3b_na_n^2 - 3b_nc_n^2$

$= (a_n - b_n)^3 + 3a_nc_n^2 - 3b_nc_n^2$

$= (a_n - b_n)^3 + 3c_n^2(a_n - b_n) > 0$ car $a_n > b_n$

de même $b_{n+1} - c_{n+1}$ est du signe $(b_n - c_n)^3 + 3a_n^2(b_n - c_n) > 0$ car $b_n > c_n$

donc $a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1} > 0$ (car a_n , b_n et $c_n > 0$)
et l'égalité $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 1$ entraîne $1 > a_{n+1}$

donc P(n+1) est vraie

(c) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n}$

posons $a_n = a$, $b_n = b$ et $c_n = c$, $a + b + c = 1$

majorons le dénominateur

$1 - 6abc = 1 - 6a(1 - a - c)c = 1 - 6ac + 6a^2c + 6ac^2$

Comparons avec $1 - 6c^2 + 12c^3 = 1 - 6c^2 + 6c^3 + 6c^3$

$1 - 6abc - (1 - 6c^2 + 12c^3) = 6c^2 - 6ac + 6a^2c - 6c^3 + 6ac^2 - 6c^3$

$= 6c(c - a) + 6c(a^2 - c^2) + 6c^2(a - c)$

$= 6c(c - a)[1 - (a + c) - c]$

$= 6c(c - a)(b - c) < 0 \qquad$ car $0 < c < b < a$

donc $1 - 6a_nb_nc_n \leq 1 - 6c_n^2 + 12c_n^3 = g(c_n)$

minorons le numérateur

$$c^2 + 3a^2 + 3b^2 = c^2 + 3a^2 + 3(1 - a - c)^2$$
$$= 4c^2 + 6a^2 - 6a - 6c + 6ac + 3$$

donc $c^2 + 3a^2 + 3b^2 - \left(\frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2\right) = \frac{3}{2}c^2 + 6a^2 - 6a - 3c + 6ac + \frac{3}{2}$

$$= \frac{3}{2}c^2 - 3c + \frac{3}{2} + 6a(a + c - 1)$$
$$= \frac{3}{2}(c - 1)^2 + 6a(c - 1) + 6a^2$$
$$= \frac{3}{2}[(c - 1)^2 + 4a(c - 1) + 4a^2]$$
$$= \frac{3}{2}[(c - 1) + 2a]^2 \geq 0$$

donc $c^2 + 3a^2 + 3b^2 \geq \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2$

en revenant aux notations $c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2 \geq f(c_n)$

On a montré que $c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2 \geq f(c_n) > 0$ (calculer Δ de f)

et $0 < \frac{7}{9} \leq 1 - 6a_nb_nc_n \leq g(c_n)$,

donc $\dfrac{1}{1 - 6a_nb_nc_n} \geq \dfrac{1}{g(c_n)}$

donc par produit des inégalités , $\dfrac{c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n} \geq \dfrac{f(c_n)}{g(c_n)}$ donc $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \geq \dfrac{f(c_n)}{g(c_n)}$

(d) Soit $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2f(x)}{2g(x)} = \dfrac{5x^2 - 6x + 3}{24x^3 - 12x^2 + 2}$

Etudions $t(x) = 2f(x) - 2g(x)$
$$= 5x^2 - 6x + 3 - 24x^3 + 12x^2 - 2 = -24x^3 + 17x^2 - 6x + 1 \text{ sur } [0;1]$$

$t'(x) = -72x^2 + 34x - 6$ de discriminant $\Delta < 0$, donc $t'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

x	0	$\frac{1}{3}$	0
t '(x)		–	
t(x)	1	0	–12

donc pour tout $x \in [0;\frac{1}{3}]$, $t(x) \geq 0$, donc $5x^2 - 6x + 3 \geq 24x^3 - 12x^2 + 2$

donc $24x^3 - 12x^2 + 2$ étant > 0 sur $[0;\frac{1}{3}]$ (dérivée et variation évidente)

on en déduit que sur $[0;\frac{1}{3}]$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$

Or on sait depuis 2) b) que $1 > a_n > b_n > c_n > 0$ entraîne que $0 < c_n < \frac{1}{3}$

donc $\frac{f(c_n)}{g(c_n)} \geq 1$, donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 1$ et la suite (c_n) est croissante

La suite (c_n) est donc croissante et majorée par $\frac{1}{3}$, donc elle est convergente vers $C \neq 0$

(car $c_n \geq c_0 > 0$ entraîne par passage à la limite C, $\geq c_0 > 0$)

$C \in [0;\frac{1}{3}]$, donc d'après l'étude de t , $\frac{f(C)}{g(C)} \geq 1$

Mais $\frac{C_{n+1}}{C_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$ entraîne par passage à la limite : $1 \geq \frac{f(C)}{g(C)}$ (f et g continues)

donc $\frac{f(C)}{g(C)} = 1$, donc $t(C) = 0$, donc $C = \frac{1}{3}$.

De $a_n + b_n + c_n = 1$, on déduit que la suite $(a_n + b_n)$ a pour limite $\frac{2}{3}$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{a_n^3 + 3a_nb_n^2 + 3a_nc_n^2 + b_n^3 + 3b_na_n^2 + 3b_nc_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

$$= \frac{a_n^3 + b_n^3 + 3a_nb_n(a_n + b_n) + 3c_n^2(a_n + b_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

$$= \frac{(a_n + b_n)(a_n^2 - a_nb_n + b_n^2) + 3a_nb_n(a_n + b_n) + 3c_n^2(a_n + b_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

donc $\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} = \frac{a_n^2 - a_nb_n + b_n^2 + 3a_nb_n + 3c_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n}$

$\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 + 3c_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n}$

posons $v_n = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_n + b_n}$, $\lim v_n = 1$

posons $u_n = (a_n + b_n)^2 + 3c_n^2$, $\lim u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$

et $1 - 6a_nb_nc_n = \frac{u_n}{v_n}$, donc $a_nb_n = \frac{1 - \frac{u_n}{v_n}}{6c_n}$, donc $\lim a_nb_n = \frac{1 - \frac{7}{9}}{2} = \frac{1}{9}$

On a donc $\lim (a_n + b_n) = \frac{2}{3}$ et $\lim a_nb_n = \frac{1}{9}$

On en déduit successivement $\lim (a_n + b_n)^2 = \frac{4}{9}$ et $\lim 4a_nb_n = \frac{4}{9}$

Or $(a_n - b_n)^2 = (a_n + b_n)^2 - 4a_nb_n$ donc $\lim (a_n - b_n)^2 = 0$, donc $\lim a_n - b_n = 0$

De $\lim a_n + b_n = \frac{2}{3}$ et $\lim a_n - b_n = 0$, on déduit $\lim a_n + b_n + a_n - b_n = \frac{2}{3}$

donc $\lim 2a_n = \frac{2}{3}$, donc $\lim a_n = \frac{1}{3}$ et enfin $\lim b_n = \frac{1}{3}$