

SUJET NATIONAL - BAC STI - 2000

Exercice commun aux options, juin 2000

Génie Mécanique, Génie Civil, Génie Electrotechnique

C) PROBLEME COMMUN 3 : (sur 12 points)

FONCTIONS RATIONNELLES – ASYMPTOTE – TANGENTE – AIRE - PRIMITIVES

Partie A indépendante de B et C

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1, +\infty[$. On donne ci-dessous son tableau de variation.

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$2,5$	$+\infty$

De plus on admet que, pour tout x élément de $]1, +\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + \frac{b}{x-c}$ où a, b, c sont trois nombres réels (avec a et b non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir des indications fournies par le tableau de variation de f .

On appelle (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

- a. Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite D asymptote à la courbe (C) - Donner une équation de D.
b. En déduire la valeur de c .

Pour les questions suivantes, on prendra $c = 1$. On a donc : $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$

- Le tableau de variation nous fournit les coordonnées d'un point particulier de (C). En déduire une relation entre les nombres réels a et b .
- Calculer la dérivée f' de la fonction (on rappelle que a et b sont des constantes). Utiliser le tableau de variation pour trouver une deuxième relation entre a et b .
- Déterminer les nombres réels a et b à partir des deux questions précédente.

Partie B indépendante de A

On admet pour les parties **B** et **C** que la fonction f de la partie **A** est définie par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$

1. Montrer que la droite D' d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote la courbe (C) .
2. a. Résoudre, par le calcul, sur l'intervalle $]1, +\infty[$ l'équation $f(x) = 3$.
b. Résoudre sur l'intervalle $]1, +\infty[$ l'inéquation $f(x) > 3$
(on précisera la méthode utilisée).
3. Quelle est la dérivée de la fonction f ?
Écrire une équation de la droite T_1 tangente à (C) au point M d'abscisse 2.
Écrire une équation de la droite T_2 , tangente à (C) au point N d'abscisse 5.
4. Construire les droites D , D' , T_1 et T_2 , et la courbe C .
5. Calculer les coordonnées du point d'intersection P de T_1 et T_2 .
6. Calculer l'aire du triangle MNP . On donnera le résultat en cm^2 .

Partie C indépendante de A

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]1, +\infty[$
2. On appelle (A) l'aire (en cm^2) de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Calculer la valeur exacte de (A) (en cm^2) puis son arrondi à 1 mm^2 .

3. Justifier, par le calcul, que (A) représente moins des $\frac{3}{4}$ de l'aire du triangle MNP .