Entraînement au Concours Général

Guillaume BARASTON

9 mai 2009

Table des matières

1 Algèbre

1.1 Suite récurrente linéaire d'ordre 4

Soit (a_n) la suite définie par : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ et :

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, a_n est multiple de n.

1.2 Autour d'une identité remarquable

On pourra être amené à utiliser le résultat suivant appellé *principe de la descente infinie de Fermat* : Il n'existe aucune suite infinie strictement décroissante d'entiers positifs.

1. Montrer que pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a la relation suivante :
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2\right)$$
2. Montrer que le nombre
$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$
est un entier.
3. Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ vérifiant :
$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$$

1.3 Olympiade Internationale de Mathématiques 1974

Déterminer tous les 5-uplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de réels strictement positifs vérifiant le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \end{cases}$$

1.4 Racines réelles d'un polynôme

Soit f un polynôme à coefficients réels. Montrer que les racines de f sont toutes réelles si et seulement si f *ne peut pas* s'écrire sous la forme

$$f^2 = g^2 + h^2$$

où g et h sont des polynômes à coefficients réels tels que $\deg h \neq \deg g$.

1.5 Putnam 1971

Déterminer tous les polynômes P tels que pour tout réel x :

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$$

1.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux n-uplets de réels. Soit P le trinôme du second degré suivant :

$$P(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Montrer l'inégalité suivante, en déterminant son cas d'égalité :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}$$

1.7 Puissances en escalier

Montrer que le nombre

$$3^{4^5} + 4^{5^6}$$

peut s'exprimer comme le produit de deux entiers naturels dont l'un d'eux est strictement supérieur à 10^{2009}.

1.8 Olympiade de l'Asie du Pacifique 1996

Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

1.9 Equations dans les réels

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante :

$$\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^3 - 3x = \sqrt{\frac{y+1}{2}} \end{cases}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) = 1$$

2 Analyse

2.1 Somme des inverses de carrés d'entiers naturels

On veut démontrer l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On admettra qu'un polynôme P de degré n à coefficients réels ou complexes admet au plus n racines (*théorème d'Alembert-Gauss*) et que si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont les racines, supposées distinctes, de P, avec λ le coefficient de x^n dans P, alors on dispose de la relation suivante :

$$P(x) = \lambda(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

1. Montrer que S_n converge.
2. On définit $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Préciser son ensemble de définition et montrer que $\cot' = -\frac{1}{\sin^2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que, pour tout $t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$P_n(\cot^2 t) = \frac{\sin(2n+1)t}{(\sin t)^{2n+1}}$$

4. Montrer que les racines de P_n sont les réels

$$x_k = \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

   avec $1 \leq k \leq n$ et qu'elles sont distinctes deux à deux.
5. Montrer que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(2n-1)}{3}$
6. Montrer que pour tout $t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\cot^2 t < \frac{1}{t^2} < 1 + \cot^2 t$$

7. En déduire la limite de S_n.

2.2 Fonction convexe, concave

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. La fonction est dite *convexe sur I* si et seulement si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in [0\,;1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Une fonction est dite *concave sur I* lorsque l'inégalité est renversée.

2.2.1 Interprétation géométrique

Nous allons tâcher d'interpréter géométriquement la notion de convexité. Pour cela, on fixe $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et note F_λ et C_λ, respectivement, les points de coordonnées $(\lambda x + (1-\lambda)y, f(\lambda x + (1-\lambda)y))$ et $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$.

1. Quelle est la position de F_λ par rapport à C_λ?
2. Déterminer le lieu du point F_λ lorsque λ parcourt $[0\,;1]$.
3. Soient $F_0(x, f(x))$ et $F_1(y, f(y))$. Montrer que le point C_λ parcourt le segment $[F_0F_1]$ lorsque λ parcourt $[0\,;1]$.
4. Conclure.

2.2.2 Inégalité de convexité généralisée

Soit f une fonction convexe sur I, (x_n) une famille de réels de I et λ_i, $1 \leq i \leq n$, des réels appartenant à $[0\,;1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Montrer l'inégalité suivante :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Lorsque f est concave, l'inégalité est renversée.

2.2.3 Propriétés

Monotonie des pentes des cordes

Montrer que f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si,

$$\forall a \in I,\ g\ :\ x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est croissante (resp. décroissante).

Fonctions convexes dérivables

Montrer que f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si, f' est croissante (resp. décroissante) sur I.

2.2.4 Applications

Inégalité

Soit f une fonction convexe sur I. Montrer que pour tous réels $a < b < c$ de I, on a l'inégalité suivante :

$$f(a - b + c) \leq f(a) - f(b) + f(c)$$

Olympiade de Chine 1989

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n > 1$, des réels dans l'intervalle $]0\,;1[$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$

Inégalité arithmético-géométrique

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels positifs. Montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Inégalité de Nesbitt

Soient a, b et c des réels positifs. Montrer l'inégalité suivante :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

2.3 Olympiade d'Australie 1990

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x, y :

$$\begin{cases} f(2x) = f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right)\right) \\ f(x^2 - y^2) = (x+y)f(x-y) + (x-y)f(x+y) \end{cases}$$

2.4 Olympiade de Croatie 1996

Soit $t \in]-1\,;1[$ un réel fixé. On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout réel x :

$$\begin{cases} f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2 \\ \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Soit f une solution éventuelle. Montrer l'égalité suivante :

$$f(x) - f(tx) = \frac{x^2}{1-t^2}$$

2. En déduire que pour tout entier naturel $n > 0$,

$$f(x) - f(t^n x) = x^2 \frac{1 - t^{2n}}{\left(1-t^2\right)^2}$$

3. En déduire que f est de la forme

$$f(x) = \frac{x^2}{\left(1-t^2\right)^2}$$

2.5 Inéquation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

2.6 Limite d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable en a tel que $f(a) \neq 0$. Evaluer [1]

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n$$

2.7 Equation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}$ vérifiant pour tous entiers naturels non nuls x et y :

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}$$

1. Rappel : 1^∞ est une forme indéterminée ...

3 Arithmétique

3.1 Concours Général 1992

Déterminer le chiffre des unités de la partie entière du nombre

$$\frac{10^{1992}}{10^{83}+7}$$

3.2 Propriétés du triangle rectangle

On admettra le résultat suivant, qui porte le nom de *formule de Héron* :
Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle, A son aire et p son demi-périmètre. Alors on dispose de la relation suivante :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1. Déterminer une relation liant le périmètre d'un triangle, le rayon de son cercle inscrit à son aire.
2. (*Olympiade chinoise*). Montrer que si le rayon du cercle inscrit à un triangle à côtés entiers est 1, alors ce triangle est rectangle.
3. Montrer que si un triangle rectangle a ses côtés entiers, alors il en est de même pour le rayon de son cercle inscrit.

3.3 Olympiade des Etats-Unis 1973

Montrer que les racines cubiques de trois nombres premiers distincts ne peuvent pas être trois termes (non nécessairement consécutifs) d'une progression arithmétique.

3.4 Valuation p-adique

Si p est un nombre premier et n un entier non nul, la valuation p-adique de n est le plus grand entier k tel que p^k divise n. On la note $v_p(n)$. Si $n = 0$, alors $v_p(n) = +\infty$ pour tout p.

3.4.1 Propriétés

Montrer les assertions suivantes :

1. m et n sont des entiers tels que m divise n si et seulement si $v_p(m) \leq v_p(n)$ pour tout p.
2. pour tout p : $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

3.4.2 Olympiade d'Autriche 2002

Soit $a \geq 5$ un entier impair fixé. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation suivante :

$$x^{\lfloor x \rfloor} = \frac{a}{2}$$

avec $\lfloor y \rfloor$ la partie entière du réel y, c'est-à-dire l'unique entier n satisfaisant :

$$y - 1 < n \leq y$$

3.5 Somme de 3 carrés

Soient a, b et c des entiers non nuls tels que $a \neq c$ et vérifiant :

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$$

Montrer qu'alors $a^2 + b^2 + c^2$ ne peut être un nombre premier.

3.6 Olympiade de Russie 1981

Résoudre dans $\mathbb{Z}^4$ le système suivant :

$$\begin{cases} ac - 2bd = 3 \\ ad + bc = 1 \end{cases}$$

3.7 Somme de puissances

Soient a, b et p des entiers naturels premiers. Résoudre l'équation suivante :

$$a^b + b^a = p$$

3.8 Variante du Grand Théorème de Fermat

Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs vérifiant :

$$x^x + y^y = z^z$$

3.9 Olympiade de St Petesbourg 1997

Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs vérifiant :

$$2x^x + y^y = 3z^z$$

3.10 Olympiade du Viêt-Nam 2005

Résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation suivante :

$$\frac{x! + y!}{n!} = 3^n$$

3.11 Equation de Pell-Fermat

On s'intéresse dans cet exercice, d'une part à la résolution dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation suivante :

$$ax^2 - dy^2 = \pm 1$$

où a et d sont des entiers naturels donnés, et d'autre part, à ses applications.

3.11.1 Résolution de l'équation $x^2 - dy^2 = 1$

On appelle *solution fondammentale* le couple (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont minimum, avec y_0 non nul. Nous allons montrer que cette équation admet une infinité de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

1. Résoudre l'équation lorsque $d = m^2$. Nous supposerons par la suite d non carré parfait.
2. Soit (x_0, y_0) une solution fondammantale. Montrer que les autres couples solutions (x_n, y_n) sont donnés, pour tout naturel $n > 0$, par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x_n = \frac{\left(x_0+y_0\sqrt{d}\right)^n+\left(x_0-y_0\sqrt{d}\right)^n}{2} \\ y_n = \frac{\left(x_0+y_0\sqrt{d}\right)^n-\left(x_0-y_0\sqrt{d}\right)^n}{2\sqrt{d}} \end{cases}$$

   Nous admettrons que toute équation de Pell-Fermat admet une solution fondammentale.
3. Montrer que les couples (x_n, y_n) sont les seuls couples satisfaisant l'équation.

3.11.2 Résolution de l'équation $ax^2 - dy^2 = 1$

1. Montrer que si $ad = k^2$, avec $k > 1$, alors l'équation n'admet aucune solution.
2. Soit (a_0, d_0) la solution fondammentale de l'équation :

$$u^2 - adv^2 = 1$$

   On définit les couples (u_n, v_n) comme ceux satisfaisant cette dernière équation. Montrer que les couples solutions (x_n, y_n) de l'équation initiale sont données, pour tout naturel $n > 0$, par les formules :

$$\begin{cases} x_n = a_0 \cdot u_n + dd_0 \cdot v_n \\ y_n = d_0 \cdot u_n + aa_0 \cdot v_n \end{cases}$$

3.11.3 Résolution de l'équation $x^2 - dy^2 = -1$

Soit (x_0, y_0) la solution fondammentale (si elle existe) de l'équation considérée. On définit les couples (u_n, v_n) comme ceux satisfaisant l'équation :

$$u^2 - dv^2 = 1$$

Montrer que les couples solutions (x_n, y_n) de l'équation initiale sont données, pour tout naturel $n > 0$, par les formules :

$$\begin{cases} x_n = y_0 \cdot u_n + dx_0 \cdot v_n \\ y_n = x_0 \cdot u_n + y_0 \cdot v_n \end{cases}$$

3.11.4 Applications

Famille de triangles

Déterminer tous les triangles ayant leurs côtés entiers et consécutifs ainsi que leur aire entière.

College Mathematics Journal

Déterminer toutes les paires (k, m) d'entiers positifs tel que $k < m$ et vérifiant :

$$1 + 2 + \cdots + k = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + m$$

Equation diophantienne

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation suivante :

$$x^2 + y^2 - 1 = 4xy$$

Carré parfait

Montrer que si $5x^2 + 4$ ou $5x^2 - 4$ est un carré parfait si, et seulement si, x est un terme de la suite de Fibonacci.

Suite d'entiers

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{3u_n^2 + 1} \end{cases}$$

Montrer que pour tout n, u_n est un entier.

3.12 Partie entière

On rappelle que la partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier n vérifiant

$$x - 1 < n \leq x$$

Les questions suivantes sont toutes indépendentes.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité suivante :
$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$$
2. Déterminer le plus grand $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ 2^k \mid \left\lfloor \left(3 + \sqrt{11}\right)^{2n-1} \right\rfloor$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$8 \mid \left\lfloor \left(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2}\right)^3 \right\rfloor + 1$$
4. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$2^n \mid \left\lfloor \left(3 + \sqrt{5}\right)^n \right\rfloor + 1$$

4 Géométrie

4.1 Olympiade de Russie 1989

Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle de périmètre 1. Montrer l'inégalité suivante :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$$

4.2 Concours Général 1994

Soit ABC un triangle. Si P est un point de son plan, on note L, M, N les projetés orthogonaux de P respectivement sur (BC), (CA) et (AB).
Déterminer le(s) point(s) P pour le(s)quel(s) la quantité $BL^2 + CM^2 + AN^2$ est minimale.

4.3 Tournoi des villes 2007

Soient A et B deux points du plan et ℓ une droite, la droite (AB) étant parallèle à ℓ.
Construire le(s) points C de ℓ de sorte que la quantité $AC \cdot BC$ soit minimale.

4.4 Théorème de Napoléon généralisé

1. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

2. On construit sur les côtés d'un triangle ABC trois n-gones réguliers, de sorte que ces n-gones soient extérieurs à ce dernier. Déterminer toutes les valeurs de n tels que les centres de ces trois n-gones forment un triangle équilatéral.

4.5 Puissance d'un point par rapport à un cercle

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. Soit M un point quelconque du plan. Montrer que si une droite passant par M coupe $\mathcal{C}$ en A et B alors :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - R^2$$

Le réel $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ est appelé *puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.*

2.

5 Nombres complexes

5.1 Somme trigonométrique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels. On considère la somme

$$S(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt$$

Montrer que $S(t) = 0$ pour tout réel t si, et seulement si, les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont tous nuls.

5.2 Oral Polytechnique, filière PC

Soient a et b des complexes tels que $|a|, |b| < 1$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{a - b}{1 - \overline{a}b} \right| < 1$$

6 Divers

6.1 Ensemble infini

Soit Ω un ensemble de points du plan tel que chacun de ses points soit le milieu de deux autres. Montrer que Ω contient une infinité de points.

6.2 Parlement de Sikinie

Au parlement de Sikinie, chaque député a *au plus* trois ennemis. Montrer que l'on peut séparer le parlement en deux sous-parlements de sorte que chaque député ait *au plus* un ennemi dans son propre sous-parlement.

6.3 Dragon aux 100 têtes

Un dragon a 100 têtes. Un chevalier peut couper exactement soit 15, soit 17, soit 20 ou 5 têtes en un seul coup d'épée. Il repousse alors respectivement 24, 2, 14 ou 17 nouvelles têtes. Si toutes les têtes sont coupées, le dragon meurt. Peut-il mourir ?

6.4 Cercle circonscrit et n-gone

Montrer que dans tout n-gone[2] convexe (avec $n \geq 3$), il existe trois sommets consécutifs A, B et C tels que le cercle circonscrit au triangle ABC contienne tout le n-gone.

2. Un n-gone est un polygone à n côtés