Limites

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2007}-2007x+2006}{(x-1)^2}$$

Pour lever l'indétermination, on va essayer de factoriser le numérateur.
On remarque immédiatement que $x=1$ est une racine; on va donc factoriser par $(x-1)$

$$\begin{aligned}x^{2007}-2007x+2006 &= (x-1)(a_{2006}x^{2006}+a_{2005}x^{2005}+a_{2004}x^{2004}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0)\\ &= a_{2006}x^{2007}+a_{2005}x^{2006}+a_{2004}x^{2005}+\cdots\ldots\ldots+a_2x^3+a_1x^2+a_0x\\ &\qquad -a_{2006}x^{2006}-a_{2005}x^{2005}-a_{2004}x^{2004}-\cdots-a_2x^2-a_1x-a_0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{2006}=1 \\ a_{2005}-a_{2006}=0 \;\rightarrow\; a_{2005}=1 \\ a_{2004}-a_{2005}=0 \;\rightarrow\; a_{2004}=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1-a_2=0 \;\rightarrow\; a_1=1 \\ a_0-0=2006 \;\rightarrow\; a_0=2006 \end{cases}$$

Donc $x^{2007}-2007x+2006=(x-1)(x^{2006}+x^{2005}+x^{2004}+\cdots+x^2+x-2006)=(x-1)P(x)$

$P(x)$ a 2006 termes qui sont de la forme x^n avec $n\in\mathbb{N}$ et variant de 1 à 2006 et un terme constant: -2006
Si $x=1$ on a 2006 termes égaux à 1: $x=1$ est donc une racine de $P(x)$ et on peut factoriser par $(x-1)$

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-1)(b_{2005}x^{2005}+b_{2004}x^{2004}+ba_{2003}x^{2003}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0)\\ &= b_{2005}x^{2006}+b_{2004}x^{2005}+b_{2003}x^{2004}+\cdots\ldots\ldots\ldots+b_2x^3+b_1x^2+b_0x\\ &\qquad -b_{2005}x^{2005}-b_{2004}x^{2004}-ba_{2003}x^{2003}-\cdots-b_2x^2-b_1x-b_0\end{aligned}$$

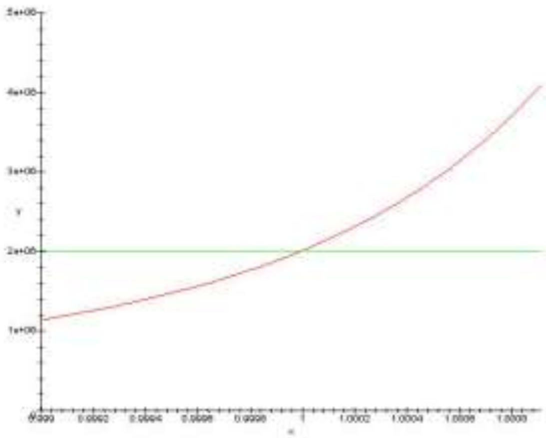
$$\begin{cases} b_0=2006 \\ b_0-b_1=0 \;\rightarrow\; b_1=2005 \\ b_1-b_2=0 \;\rightarrow\; b_2=2004 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{2004}-b_{2005}=0 \;\rightarrow\; b_{2004}=2 \\ b_{2005}-0=1 \;\rightarrow\; b_{2005}=1 \end{cases}$$

Donc $P(x)=(x-1)(x^{2005}+2x^{2004}+3x^{2003}+\cdots+2004x^2+2005x+2006)=\sum_{k=1}^{k=2006}kx^{(2006-k)}$

Au final: $x^{2007}-2007x+2006=(x-1)^2\sum_{k=1}^{k=2006}kx^{(2006-k)}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2007}-2007x+2006}{(x-1)^2}=\sum_{k=1}^{k=2006}k=\frac{2006*(2006+1)}{2}=1003*2007=2\,013\,021$$

```
plot([(x^2007-2007*x+2006)/(x-1)^2,2007*2006/2],x=0.998999..1.00091,y=-1..5000000);
```



Autre méthode

$On\ pose\ \ x = 1 + \varepsilon\ \ dans\ l'idée\ de\ faire\ tendre\ x\ vers\ 1\ \ donc\ \varepsilon\ vers\ 0$

$$f(1+\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^{2007} - 2007(1+\varepsilon) + 2006}{(1+\varepsilon-1)^2} = \frac{(1+\varepsilon)^{2007} - 2007\varepsilon - 1}{\varepsilon^2}$$

$On\ \ utilise\ le\ développement\ limité\ \ (1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)$

$$f(1+\varepsilon) = \frac{1 + 2007\varepsilon + \frac{2007 * 2006}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) - 2007\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{2007 * 2006}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} = \frac{2007 * 2006}{2} + O(1)$$