A retenir

Les fonctions :

- On passe de la représentation de :
  - u(x) à u(x)+k par la translation de vecteur $k\vec{j}$
  - u(x) à u(x+k) par la translation de vecteur $-k\vec{i}$
  - de u(x) à –u(x) par symétrie axiale d'axe celui des abscisses.

- Pour trouver l'équation de l'axe de symétrie d'une courbe, on passe l'égalité suivante :

$$f(a+x)=f(a-x)$$

Les polynômes du second degré :

- La forme canonique : $a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{\Delta}{4a}$
- Factorisation :
  - si Δ<0, il n'y a pas de factorisation possible
  - si Δ=0, une factorisation possible est $a(x-racine)^2$
  - si Δ>0, une factorisation possible est $a(x-racine_1)(x-racine_2)$
- Signe d'un trinôme :

Si Δ<0

x	-∞		+∞
F(x)		Signe de a	

Si Δ=0

X	-∞		x0		+∞
F(x)		SDa		SDa	

Si Δ>0

x	-∞		x1		x2		+∞
F(x)		SDa		SD-a		SDa	

- Tableau de variation

Si a>0

x	-∞	-b/2a	+∞
F(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Si a<0

x	-∞	-b/2a	+∞
F(x)	$\nearrow$		$\searrow$

- Equation à partir d'un sommet

$$a(x-abs.du.sommet)^2+ord.sommet$$

- Equation de droite passant par un point et ayant un coeff dir connus

$a(x-xa)+ya$ ➔ a étant le coeff directeur.

- Méthode pour démontrer qu'une fonction est dérivable : f deriv en 2

$g(2)=3....g(2+h)=h^2+2h+3$

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{h^2+2h+3-3}{h}=h+2$$

$$\lim_{H\to 0}\left[\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]=2$$

Pour démontrer qu'elle n'est pas dérivable, on fait un tableau de valeur et on montre que ça tend vers l'infini.

- Le nombre dérivé en un point est le coef directeur de la tangente. Son équation est

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

- dérivée à connaître : NE PAS OUBLIER DE PRECISER L'ENSEMBLE

f(x)=k	0
f(x)=x	1
f(x)=x²	2x
f(x)=x^n	nx^{n-1}
f(x)=1/x	-1/x²
f(x)= $\sqrt{x}$	1/2 $\sqrt{x}$
f(x)=cosx	-sinx
f(x)=sinx	Cosx

- Les operations à connaître :

On peut additionner 2 dérivées ou multiplier une dérivée par un réel sans problème

Pour multiplier deux dérivées, on utilise la formule suivante : $u' \times v + v' \times u$

Pour diviser deux dérivées, on utilise la formule suivante : $\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$

Pour calculer l'inverse d'une dérivée, on utilise : $\frac{-u'}{u^2}$

Le calcul de la composé de deux dérivées est très utile dans le cas des racines carrées. Par exemple, pour calculer la dérivée de racine de 4x+5 on calcule la dérivée de racine de x et celle de 4x+5. Il suffit ensuite d'utiliser la formule :

$$[u(ax+b)]' = au'(ax+b)$$

- Les limites de la fonction inverse

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty\ (\text{si}.n.paire) - \infty\ (\text{si}.n.impaire)$$

$$\lim_{+/-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- On a une asymptote verticale d'équation x=a lorsque la limite en a est l'infini. On en a une horizontale d'équation y=a lorsque la limite en l'infini est a.
- ON NE PEUT CONCLURE POUR :

$$-\infty + (+\infty).ou.0 \times \infty.ou.\frac{\infty}{\infty}.ou.\frac{0}{0}$$

- Limite de polynôme : On cherche la limite du terme de plus haut degré.
- Limite de function rationnelle : On cherche la limite du quotient des termes de plus haut degré.
- On a une asymptote oblique si :

$\lim_{+/-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$ ax+b est l'équation de l'asymptote oblique.

ETUDE DE FONCTION :
DERIVEE, VARIATION, LIMITE AUX BORNES, EQUATIONS DES ASYMPTOTES, TABLEAU DE VARIATION.

- Il y a deux façon de calculer la variance d'une série stat :

$$v = \sum frequence(valeur - moyenne)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$v = \frac{1}{effect.tot} \times \sum effect \times valeur^2 - moyenne^2$$

• écart type : $\sigma = \sqrt{\text{var}\,iance}$

$|-x-1|$ pour enlever les barres de valeur absolue :
* on cherche les valeurs qui annulent et on fait un TDS.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$	$+$	0	$-$
$\lvert -x-1 \rvert$	$-x-1$	0	$x+1$

pour $x \leq -1$ $|-x-1| = -x-1$

pour $x \geq -1$ $|-x-1| = x+1$.

Pas de chg^t on enlève les $|.|$ négatif, on inverse les signes

Penser à cela pour les carrés de $\sqrt{}$.

• On trouve deux type de suite : les suites définies explicitement ou par récurrence.

• La variation d'une site s'obtient :

- Un+1-Un que l'on compare à zéro (si >0 : croissant et inversement)
- Si les termes sont positifs ou si le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ l'est, on peut comparer ce dernier à 1. Si >1 : Décroissant et inversement !

Note : Il est plus simple de calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ -1 et de comparer le résultat à 0 !

• Une suite est dite minorée si elle est toujours en dessous d'un réel (le contraire est majorée !). Si une suite est minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée.

• Une suite est arithmétique si et seulement si $U_{n+1} - U_n = R(raison)$

Il faut que cette raison soit un réel qui ne dépend pas de n.

Une suite arithmétique se définie par :

- $U_n = U_0 + nr$
- $U_n = (n - p)r + U_p$

Sa variation est donnée par le signe de R !

La somme des termes consécutifs est donnée par : $\left(\frac{1er.terme + dernier}{2}\right) \times (n+1)$

• Suite géométrique : si et seulement si : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q(raison)$

Une suite géométrique est définie par : $U_n = U_0 \times Q^n$ OU $U_n = U_p \times Q^{n-p}$

Sa variation est donnée par le signe de q et de U0

Q<0	Alternée	
Q=0	Constante	
0<q<1	Décroissante	Tenir compte du signe de U0 qui peut inverser le résultat !
Q=1	Constante	
q>1	Croissante	Tenir compte du signe de U0 qui peut inverser le résultat !

Somme de terme consécutif :

$$1er.terme \times \left[\frac{1 - raison^{n+1}}{1 - raison}\right]$$

- Représenter une suite définie par récurrence :

On trace la fonction $f(u_{n+1})$. On place U0 sur les abscisses. Sur les ordonnés, on a f(u0) qui correspond en fait à U1. On utilise la courbe y=x qui permet d'inverser abscisse et ordonné. On obtient donc U1 sur l'axe des abscisses. Il suffit de recommencer pour avoir les termes suivants. Note : L'intersection entre Cf et y=x donne le point de convergence.

POUR ETUDIER UNE SUITE ? ON DOIT TOUJOURS DIRE SI LA SUITE EST CROISSANCE , OU DECROISSANTE , BORNEE, ET/OU CONVERGENTE.

- Note diverse :

$1{,}2^{n+1}-1{,}2^{n}=0.2\times1.2^{n}$ car $1{,}2^{n+1}-1{,}2^{n}=1.2^{n}\times(1.2-1)= 0.2\times1.2^{n}$

- Les limites de suite : Elles se font toujours en $+\infty$
- Si la suite est def directement, on utilise les mêmes résultats que pour les fonctions.

Si la limite est l'infini, on dit que la suite ne converge pas. Si la limite est finie, on dit qu'elle converge vers ce point.

- Pour une suite non rationnelle, il n'y a pas de méthode, on doit faire du cas par cas.
- Si on a trois suites dont 2 convergent vers le même point (l) et si on peut encadrer 1 des suite par les deux autres, alors la suite encadrée converge vers le même point. C'est le THEOREME DU GENDARME.
- Limite d'une suite arithmétique :
  - Si r>0, la suite diverge vers $+\infty$
  - Si r>0, la suite diverge vers $-\infty$
- Limite d'une suite géométrique :
  - Si -1<q<1, alors (Un) converge vers 0
  - Si q=1, alors (Un) converge vers U0
  - Si $q \in \left]-\infty ; -1\right] \cup \left]1;+\infty\right[$ alors (Un) diverge
- Soit OA' et OA deux vecteurs colinéaires

  OB' et OB deux vecteurs colinéaires

Si la norme de OA et de OB est égale à 1, alors la mesure de l'angle orienté $(OA' \,;\, OB')$ est égale à celle de $(OA \,;\, OB)$

- Pour trouver la mesure principale d'un angle orienté :

On calcule le quotient $\frac{-\alpha}{2\pi}$ et on l'arrondi à l'entier le plus proche. On obtient k.

Mesure principale = $\alpha + k \times 2\pi$

- Si deux vecteurs sont colinéaires et qu'ils

- sont dans des sens opposés : la mesure de l'angle orienté qu'ils forment vaut π
- ont le même sens : la mesure vaut 0

• Si deux vecteurs sont orthogonaux et qu'ils
  - sont dans des sens opposés : la mesure de l'angle orienté qu'ils forment vaut -π/2
  - ont le même sens : la mesure vaut π/2

• $(ku;k'v) = (u;v)$ si k et k' ont le même signe

$(ku;k'v) = (u;v)$ +π si k et k' ont des signes différents.

• Le couple (r ; θ) est la coordonnée polaire d'un point dans le repère orthonormal. r= distance entre ce point et le centre du repère. θ est l'angle entre les abscisses et ce point. Pour la TI, la structure du calcul est [1 ;1]➔Polar ou toutes les autres commandes qui permettent de n'avoir que x, y, θ ou r ! (l'autre coordonnée est appelée rectangulaire) Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, on utilise :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

• Le cosinus de la mesure principale ou d'une autre mesure sont égaux. (de même sinus)

• les formules de trigo à retenir :

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
$\tan x = \sin x / \cos x$
$1 + \tan^2 x = 1 / \cos^2 x$;
$\cos^2 x = 1/(1 + \tan^2 x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
$\sin(\pi/2 + x) = \cos x$
$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$
$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$

Tableau des valeurs

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
sin θ	0	1/2	√ 2/2	√ 3/2	1	0
cos θ	1	√ 3/2	√ 2/2	1/2	0	-1
tan θ	0	√ 3/3	1	√ 3		0

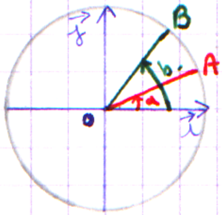
LES AUTRES FORMULES A CONNAÎTRE :

Soient a et b deux réels.

On cherche à trouver l'expression de $\cos(b-a)$

c'est à dire le cosinus d'un angle de mesure $= b-a$.

Soit :



$(\vec{i}\,;\vec{OB}) = b \quad (\vec{i}\,;\vec{OA}) = a.$

en calculant : $(\vec{OA};\vec{OB}) = (\vec{OA};\vec{i}) + (\vec{i};\vec{OB})$

$= -a + b$

$= b - a.$

On obtient la mesure voulue.

L'expression "cosinus d'un angle orienté" se retrouve dans les scalaires
on calcule donc $(\vec{OA};\vec{OB})$ de 2 façons pour avoir une égalité

- $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \|OA\| \times \|OB\| \times \cos(\vec{OA};\vec{OB})$
  $= 1 \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$
- coordonnées de OA et de OB
  $OA(\cos A\,;\sin A) \quad OB(\cos B\,;\sin B).$
  $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \cos A \times \cos B + \sin A \times \sin B.$

$$\boxed{\cos(b-a) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b}$$

pour cos(a+b) il suffit de remplacer b par (–b)

$$\boxed{\cos(b+a) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b}$$

On cherche a trouver une autre écriture de $\sin(a+b)$

pour cela, on calcule $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$, puis $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \cos a + \sin a \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
  $= \sin a.$

grâce à ce résultat, on peut calculer $\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)$ de 2 façon différentes.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right) = \cos\left((a+b)-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(a+b)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) \times \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) \times \sin b.$

$= \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b.$

$$\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \sin b \times \cos a$$

pour sin(a-b) il suffit de remplacer b par (–b)

$$\sin(a+b) = \sin a \times \cos b - \sin b \times \cos a$$

Pour appliquer tout cela, il faut penser à décomposer les angles donnés dans les sinus.

On peut donc en déduire sin2a et cos 2a en sachant que sin2a = sin (a+a) (idem pour cos)

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2\sin a \times \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 1 - 2\sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \end{aligned}$$

On peut aussi déduire des deux formules précédentes

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{\cos 2a + 1}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

ON RETIENT : (car c'est plus facile à utiliser en sachant par exemple que pour l'utilisation, il faut transformer cosπ/8 en cos(π/4/2))

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\cos a + 1}{2} \qquad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{-\cos a + 1}{2}$$

Un autre résultat est à savoir retrouver :

$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \times \cos x - \sin 2x \times \sin x.$
$= (2\cos^2 x - 1) \times \cos x - (2\sin^2 x \times \cos x) \times \sin x$
$= 2\cos x^2 \times \cos x - \cos x - 2\sin x^2 \times \cos x.$
$= 2\cos x^3 - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \times \cos x.$
$= 2\cos x^3 - \cos x - 2(\cos x - \cos x^3)$
$= 2\cos x^3 - \cos x - 2\cos x + 2\cos x^3$
$= 4\cos x^3 - 3\cos x.$

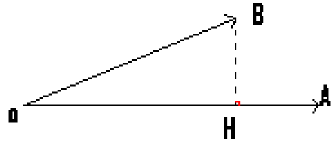
$\sin 3x = \sin(2x+x)$
$= 2\sin x \times \cos x + \sin x \times \cos 2x$
$= 2\sin x \times (1 - \sin x^2) + \sin x - 2\sin x^3$
$= 2\sin x - 2\sin x^3 + \sin x - 2\sin x^3$
$= -4\sin x^3 + 3\sin x.$

- Les méthodes pour le produit scalaire :

  - $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
  - $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$
  - $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
  -

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OH \times OA$ soit

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. On projette un des deux vecteurs sur l'autre orthogonalement. Soit H ce projeté.



Si les 2 vecteurs sont dans le même sens.

Si les deux vecteurs sont dans des sens opposés :

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=-OH\times OA$$

Note : Il n'est pas nécessaire de faire un projeté si les deux vecteurs sont colinéaires.

- Les règles ressemblent bcp aux calculs algébriques (dvlpt…)

La seule différence, c'est qu'il n'y a pas de simplification :

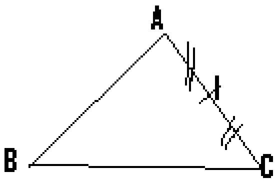
$\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$ mais v et w peuvent être différents.

$\vec{u}.\vec{v}=0$ sans que ni u ni v ne soit égal à zéro. Si u et v sont orthogonaux.

- Le carré scalaire :

$$\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2 \text{ et } \vec{u}=\sqrt{\vec{u}^2}$$

- Le théorème de la médiane :



$$MA^2+MB^2=2MI^2+1/2AB^2$$
$$\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-1/4AB^2$$

- Le théorème d'al Kashi :

Soit un triangle ABC. Les angles sont ceux des sommets a,b,c et les lettres a,b,c dans les formules correspondent aux côtés opposés au sommet.

$a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\hat{a}$ ou $b^2=a^2+c^2-2ac\times\cos b$ ou $c^2=b^2+a^2-2ab\times\cos\hat{a}$

- S correspond à l'aire du triangle :

$$\frac{abc}{2S}=\frac{a}{\sin a}=\frac{b}{\sin b}=\frac{c}{\sin c}$$

- Soient 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le vecteur $\vec{w}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont donc colinéaires.

$\vec{w}=q\vec{u}$

$\vec{w}.\vec{u}=q\vec{u}^2=\vec{v}.\vec{u}$

$w=\dfrac{q\vec{u}^2}{\left\|\vec{u}\right\|^2}\times\vec{u}$ (on est obligé de passer au carré car la division par un vecteur est impossible)➔

$$\boxed{w=\frac{\vec{v}.\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}\times\vec{u}} \text{ et } q=\frac{\vec{w}.\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$$

- Pour trouver des vecteurs colinéaires avec une norme précise :

EX : $\vec{u}(-4\ ;3)$

$\vec{u}^{\,2}=25$

$\|\vec{u}\|=5$

$1/5\,\vec{u}$ et $-1/5\,\vec{u}$ sont colinéaires à $\vec{u}$ de norme 1.

- Théorème du toît : si une droite D est parallèle à deux plans sécants en delta, alors D//delta
- Pour prouver :
  - qu'une droite est // à un plan, il faut que cette droite soit // à au moins une droite du plan.
  - Que deux plans sont //, ils faut dmq un des plans // à deux dte sécantes de l'autre
  - Une droite perpendiculaire à un plan si la droite est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan
  - Deux plans perpendiculaire, si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.
  - Deux droites sont orthogonales si leurs // mené en un points sont perpendiculaires.
- Un plan est médiateur s'il passe par la médiatrice d'un segment. C'est donc l'ensemble des points équidistant de chaque extrémité du segment.
- M€D(a ; $\vec{u}$) si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
- Pour dmq trois vecteurs sont coplanaires, il faut dmq 2 des 3 ne sont pas colinéaires et que le troisième peut s'écrire $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

Cette dernière expression sert aussi pour démontrer qu'un point appartient à un plan :

Si $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ alors, le point M a pour coordonnée (x ;y) dans le plan ABC.

- Trois points sont alignés si les vecteurs qu'ils forment (un point commun aux deux vecteurs) sont colinéaires. C'est à dire si : $X_{ef}\times Y_{ei}+X_{ei}\times Y_{ef}=0$
- La norme d'un vecteur dans un repère orthonormal :

$$AB=\sqrt{(xb-xa)^2+(yb-ya)^2+(zb-za)^2}$$

- Pour découvrir la relation qui lie deux vecteur suivant cette équation : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$
- Les Barycentres :

Un point est dit pondéré si on lui affecte un coefficient : (A,α). C'est donc le point A pondéré du coefficient α.

- Si (A, α) et (B,β) et $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, alors G bary de (A, α) et (B,β)

LE BARYCENTRE N'EST PAS MODIFIE SI L'ON MULTIPLIE LES COEFS PAR UN M NB.

Pour placer ce barycentre, on utilise : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ (exception : L'isobarycentre qui est le bary de deux points ayant les mêmes coefficient, il est donc au milieu du segment formé par ces points.)

Si les 2 coefs ont le même signes, alors le barycentre est sur [AB]

S'ils ont des signes différents, il est sur (AB) mais pas sur [AB]