Olympiades Mathématiques Belges 2007
Eliminatoires

1. Des mouchoirs bleus sont disponibles en quantité illimitée, de même que des jaunes, des rouges et des verts. Combien, au minimum, faut-il placer de ces mouchoirs dans un tiroir pour être certain que le tiroir contienne au moins trois mouchoirs ayant la même couleur ?

(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 13
(E) Une telle valeur n'existe pas.

2. $(-1)^{1-2+3-4+5-\cdots+2007} =$

(A) $-2\,007$ (B) -1 (C) $1\,004$ (D) 1 (E) $2\,007$

3. Les nombres réels x et y sont tels que $x - y > x$ et $x + y < y$. On a certainement

(A) $x < y < 0$
(B) $x < 0$ et $y > 0$
(C) $y < x < 0$
(D) $x > y > 0$
(E) $x < 0$ et $y < 0$

4. Pascal pense à trois nombres entiers. En additionnant ces nombres deux à deux, il obtient les sommes 38, 44 et 52. Le plus petit des trois nombres est

(A) 13 (B) 15 (C) 21 (D) 23 (E) 29

5. Le nombre naturel n tel que $2\,007 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

(A) vaut 1 004
(B) vaut 87
(C) vaut 63
(D) vaut 64
(E) n'existe pas

6. Un coureur à pied fait un premier tour du stade à la vitesse de 15 km/h et le tour suivant à la vitesse de 10 km/h. Quelle est, en kilomètres par heure, sa vitesse moyenne sur le parcours total ?

(A) 11,5 (B) 12 (C) 12,5 (D) 13 (E) 13,5

7. *Sans réponse préformulée* — La grande base d'un trapèze non aplati mesure 100, la petite base mesure 40, un des côtés obliques mesure 50 et le quatrième côté a pour mesure un nombre naturel. Combien existe-t-il de tels nombres ?

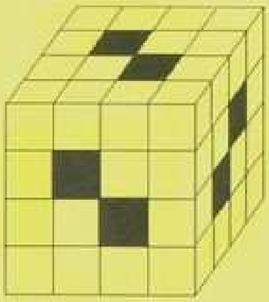
8. Il existe des alphas, des bétas et des gammas. On sait que certains alphas ne sont pas des bétas et qu'aucun béta n'est un gamma. On peut en conclure que

- (A) certains alphas sont des gammas ;
- (B) aucun alpha n'est un gamma ;
- (C) certains gammas sont des alphas ;
- (D) certains alphas ne sont pas des gammas ;
- (E) aucune des propositions précédentes n'est vraie.

9. L'une des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies ci-dessous admet, en $x = -2$, un maximum égal à 4. Laquelle ?

- (A) $f : x \mapsto |x-4| - 2$
- (B) $f : x \mapsto |x-2| + 4$
- (C) $f : x \mapsto |x+2| - 4$
- (D) $f : x \mapsto 4 - |x+2|$
- (E) $f : x \mapsto 4 - |x-2|$

10. *Sans réponse préformulée* — Ce solide est un grand cube formé de petits cubes et traversé par six tunnels. Chaque tunnel va d'une face du grand cube à la face opposée. Combien de petits cubes composent ce solide ?



11. Un train d'un kilomètre de long doit rouler à la vitesse de 1 km/h pour traverser un tunnel long lui aussi d'un kilomètre. Combien de temps s'écoulera-t-il entre l'entrée de l'avant du train dans le tunnel et la sortie du dernier wagon ?

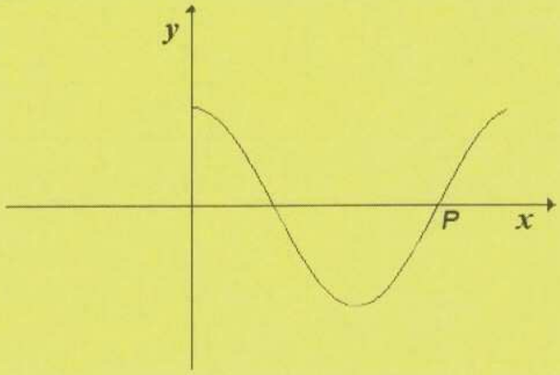
(A) 30 min (B) 1 h (C) 1 h 30 min (D) 2 h (E) 3 h

12. Le nombre de couples d'entiers strictement positifs (x, y) solutions de l'équation $3x + 5y = 501$ est

(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

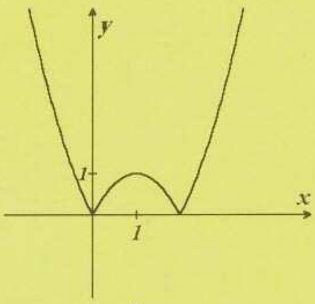
Olympiades Mathématiques Belges 2007
Eliminatoires

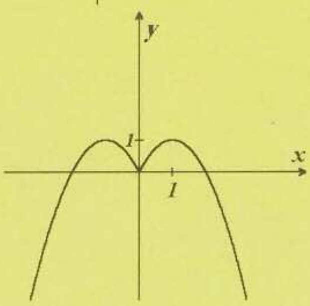
13. Ce graphe est celui de la fonction f définie par $f(x) = \cos 2x$. Le point P a pour abscisse

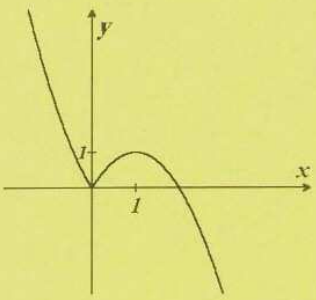


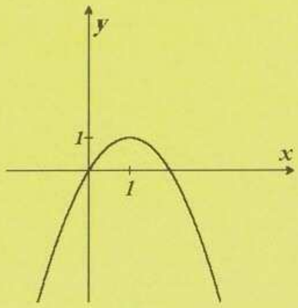
(A) $\dfrac{3\pi}{4}$ (B) π (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{3\pi}{2}$ (E) 2π

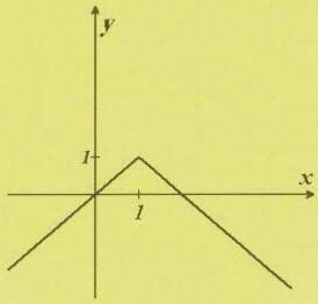
14. Lequel des 5 graphes représentés ci-dessous est celui de la fonction définie par $x \mapsto 1 - |x-1|^2$?

(A)


(B)


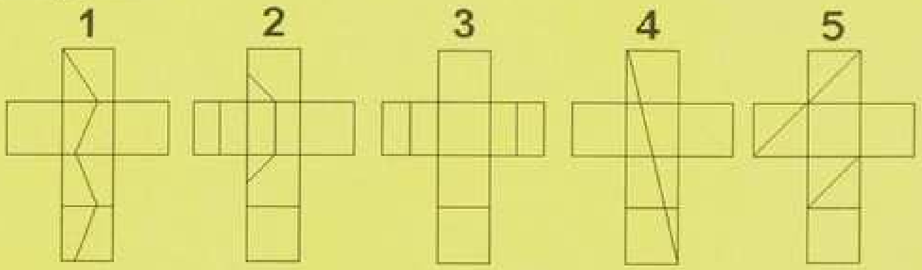
(C)


(D)


(E)


15. *Sans réponse préformulée* — Pour un nombre naturel non nul n, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Calculez la somme des diviseurs premiers de $20!$?

16. Un des développements suivants est celui d'un cube C sur lequel a été dessinée l'intersection de C avec un plan. Quel est le numéro de ce développement ?

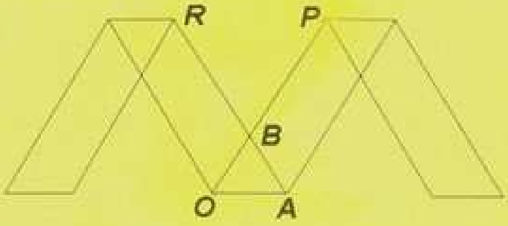


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

17. Parmi les fonctions f, g, h, i, j définies par
$f(x) = -\cos(x+\pi)$, $g(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $h(x) = \cos(x+\pi)$,
$i(x) = \cos(-x)$, $j(x) = -\cos x$
quelles sont celles qui sont égales ?

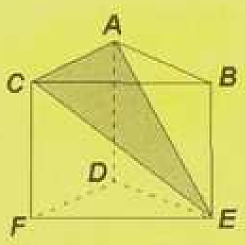
(A) On a uniquement $f = g$ et $h = i = j$.
(B) On a uniquement $f = g = h$.
(C) On a uniquement $f = g$.
(D) On a uniquement $h = j$.
(E) On a uniquement $f = g = i$ et $h = j$.

18. Quatre parallélogrammes isométriques forment la lettre "M". Les droites OA et RP sont parallèles. Dans le repère (O, A, B), les coordonnées de P sont (0,3). Quelles sont les coordonnées de R ?



(A) $(-2, 3)$ (B) $(-3, -3)$ (C) $(-3, 3)$ (D) $(3, -3)$
(E) $(3, -2)$

19. Le prisme droit ci-contre a pour base le triangle ABC rectangle en A. Quelle est la distance du point B au plan ACE, sachant que $|AB| = |AD| = 4$ et $|AC| = 3$?



(A) 4 (B) 5 (C) $20\sqrt{41}$ (D) $2\sqrt{2}$
(E) $\frac{\sqrt{41}}{2}$

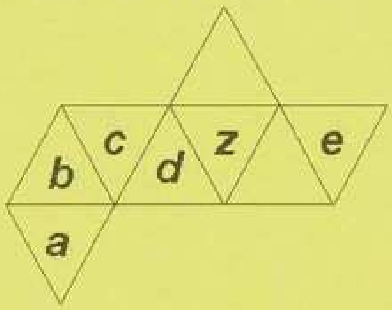
20. La pyramide de Bhlops repose sur une base carrée. Toutes ses arêtes mesurent 20 m. Pour se rendre d'un sommet de la base au sommet opposé, un scarabée se déplace sur les faces triangulaires et parcourt le chemin le plus court. Quelle est, en mètres, la longueur de ce chemin ?

(A) $10\sqrt{2}$ (B) $20\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{3}$ (D) $20\sqrt{3}$ (E) 40

21. L'erreur sur la mesure du côté d'un carré est au plus de 10 % ; dans ce cas, l'erreur sur l'aire du carré est au plus de

(A) 5 % (B) 10 % (C) 19 % (D) 20 % (E) 21 %

22. Voici le développement d'un octaèdre.



Quelle est la face opposée à la face z ?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

23. Dans $\mathbf{R}^2$, l'équation $(x-y)^2+(y-x)=0$ est celle

(A) d'un cercle ;
(B) d'une parabole ;
(C) de la réunion de deux droites sécantes non perpendiculaires ;
(D) de la réunion de deux droites perpendiculaires ;
(E) de la réunion de deux droites parallèles.

24. Pour $x \neq 1$, la fonction f est définie par $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Dans ce cas, $x =$

(A) $f(y)$ (B) $-f(y)$ (C) $f\left(\frac{1}{y}\right)$ (D) $f(-y)$ (E) $-f(-y)$

Olympiades Mathématiques Belges 2007
Eliminatoires

25. Quelle est, parmi les suivantes, la fonction dont le graphe admet l'axe Ox pour asymptote ?

(A) $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(B) $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$

(C) $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$

(D) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

(E) $x \mapsto \dfrac{1}{\sin \frac{1}{x}}$

26. $\sqrt{9-2\sqrt{14}} =$

(A) $3-\sqrt{2}\sqrt[4]{14}$

(B) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{7}-2\sqrt{2}$

(D) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

(E) $\sqrt{2}-\sqrt{7}$

27. Sachant que x est un réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et que tg $x = a$, que vaut $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$?

(A) $\sqrt{1+a^2}$

(B) $\dfrac{-1}{\sqrt{1+a^2}}$

(C) $\dfrac{-a}{\sqrt{1+a^2}}$

(D) $\dfrac{-\sqrt{1+a^2}}{a}$

(E) $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

28. *Sans réponse préformulée* — Dans une pièce carrée de 5 m de côté, est posé un carrelage formé de dalles carrées de 50 cm de côté. La première dalle est posée dans le coin supérieur gauche et les diagonales des dalles sont parallèles aux côtés de la pièce comme indiqué sur la figure. Combien de dalles entières sont-elles posées ?

29. Si $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$, alors

(A) $x^2-x-1=0$

(B) $x^2+x-1=0$

(C) $x^2-x+1=0$

(D) $x^2+x+1=0$

(E) $x^2-1=0$

30. Les trois solutions de l'équation $64x^3-144x^2+92x-15=0$ forment une progression arithmétique. Que vaut la différence entre la plus grande et la plus petite des trois solutions ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) 2 (E) $\frac{5}{4}$