SUITE HARMONIQUE

On appelle suite harmonique la suite (S_n) *telle que* $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$

$$\left.\begin{aligned} &S_1 = 1 \\ &S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ &S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \\ &S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{44+6}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12} \end{aligned}\right\}$$

Il semble que les sommes partielles apparaissent comme $\frac{p_n}{q_n}$ *avec* p_n *impair et* q_n *pair*

Conjecturons ce résultat en le prenant comme hypothèse de récurrence :

$S_n = \frac{p_n}{q_n}$ *avec* p_n *impair et* q_n *pair* $, n > 1$ *et donc* S_n *non entier*

Etudions S_{2n} *en séparant pairs et impairs:* $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2} S_n + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p_n}{q_n} + \frac{N}{D} \quad avec\ D = ppcm(3, 5, \ldots, 2n-1) \\ &= \frac{2Nq_n + p_n}{2Dq_n} \quad \begin{cases} 2Nq_n + p_n\ est\ impair \\ 2Dq_n \quad est\ pair \end{cases} \Rightarrow la\ fraction\ est\ du\ type\ \frac{impair}{pair} \end{aligned}$$

On mène un raisonnement semblable pour $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$

Ainsi, si $S_n \notin \mathbb{N}$ *, il en est de même de* S_{2n} *et* S_{2n+1} *. Comme* S_2 *,* S_3 *et* S_4 *sont non entiers, on voit de proche en proche qu'aucun* S_n *est entier*

Conclusion:
la suite harmonique (S_n) *est divergente vers l'infini sans jamais prendre de valeur entière*