Les identités remarquables

Les identités remarquables sont des égalités qui permettent d'effectuer ou de factoriser rapidement certaines expressions mathématiques. La forme développée ou la forme factorisée sera plus pratique selon les chapitres.

Les trois identités remarquables les plus utilisées sont les suivantes :

Forme factorisée		Forme développée
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2$	=	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b)$	=	$a^2 - b^2$

1. Développe les expressions suivantes en t'aidant des identités remarquables :

Exemple :

$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

$(a + 3)^2$ = ____________________

$(2a + 3)^2$ = ____________________

$(2a + c)^2$ = ____________________

$(2a + 3d)^2$ = ____________________

$(x - 5)^2$ = ____________________

$(x - b)^2$ = ____________________

$(2x - b)^2$ = ____________________

$(2x - 3b)^2$ = ____________________

$(a + c)(a - c)$ = ____________________

$(s + 3)(s - 3)$ = ____________________

$(2m + n)(2m - n)$ = ____________________

$(8p - 7t)(8p + 7t)$ = ____________________

$(a^2 + b^3)(a^2 - b^3)$ = ____________________

$(m^2 - p^3)^2$ = ____________________

$(a - b)(b - a)$ = ____________________

$(x - 3)(3 - x)$ = ____________________

2. Factorise les expressions suivantes en t'aidant des identités remarquables :

Exemple :

$a^2 + 2ac + c^2 = (a+c)^2$

$m^2 + 2mp + p^2$ = ____________________

$n^2 + 4ns + 4s^2$ = ____________________

$4n^2 + 12nt + 9t^2$ = ____________________

$25t^2 - 70tv + 49v^2$ = ____________________

$4h^2 - 16hp + 16p^2$ = ____________________

$m^2 - n^2$ = ____________________

$4m^2 - 9s^2$ = ____________________

$81m^4 - 64n^6$ = ____________________

$-t^2 - 2tv - v^2$ = ____________________

$-v^2 + 2vx - x^2$ = ____________________

$-a^6 + 10a^3b^{10} - 25b^{20}$ = ____________________

Les produits remarquables $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$ peuvent être généralisés avec $(a + b)^n$ et $(a - b)^n$.

Observons les développements suivants :

$(a + b)^1 = 1\ a^1\ b^0 + 1\ a^0\ b^1$
$(a + b)^2 = 1\ a^2\ b^0 + 2\ a^1\ b^1 + 1\ a^0\ b^2$
$(a + b)^3 = 1\ a^3\ b^0 + 3\ a^2\ b^1 + 3\ a^1\ b^2 + 1\ a^0\ b^3$
$(a + b)^4 = 1\ a^4\ b^0 + 4\ a^3\ b^1 + 6\ a^2\ b^2 + 4\ a^1\ b^3 + 1\ a^0\ b^4$
$(a + b)^5 = 1\ a^5\ b^0 + 5\ a^4\ b^1 + 10\ a^3\ b^2 + 10\ a^2\ b^3 + 5\ a^1\ b^4 + 1\ a^0\ b^5$
…
$(a - b)^1 = 1\ a^1\ b^0 - 1\ a^0\ b1$
$(a - b)^2 = 1\ a^2\ b^0\ \ 2\ a^1\ b^1 + 1\ a^0\ b^2$
$(a - b)^3 = 1\ a^3\ b^0 - 3\ a^2\ b^1 + 3\ a^1\ b^2 - 1\ a^0\ b^3$
$(a - b)^4 = 1\ a^4\ b^0 - 4\ a^3\ b^1 + 6\ a^2\ b^2 - 4\ a^1\ b^3 + 1\ a^0\ b^4$
$(a - b)^5 = 1\ a^5\ b^0 - 5\ a^4\ b^1 + 10\ a^3\ b^2 - 10\ a^2\ b^3 + 5\ a^1\ b^4 - 1\ a^0\ b^5$
…

Trois éléments sont à observer, qui nous aideront à développer ces produits remarquables :

1. Comment connaître les exposants de *a* et de *b* ?

   L'exposant de *a* diminue de 1 d'un monôme au suivant, allant de *n* à 0.
   L'exposant de *b* augmente de 1 d'un monôme au suivant, allant de 0 à *n*.
   La somme des exposants de *a* et *b* est, pour tous les monômes, égale à *n*.

2. Comment connaître le signe de chaque monôme ?

   Quand la base est une somme, le signe de chaque monôme est positif.
   Quand la base est une différence, le signe alterne d'un monôme au suivant, en commençant par le positif.

3. Comment connaître le facteur réel de chaque monôme ?

   Les facteurs réels des monômes s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal peut être construit comme une pyramide partant de sa pointe et creusant à l'infini.

Chaque élément de la pyramide s'obtient par la somme des deux éléments qui le surplombent.

$(a + b)^0$	1							
$(a + b)^1$	1	1						
$(a + b)^2$	1	2	1					
$(a + b)^3$	1	3	3	1				
$(a + b)^4$	1	4	6	4	1			
$(a + b)^5$	1	5	10	10	5	1		
$(a + b)^6$	1	___	___	___	___	___	1	
$(a + b)^7$	___	___	___	___	___	___	___	___

3. Développe alors les identités remarquables suivantes :

$(a + b)^6$ = ____
$(a - b)^7$ = ____
$(a + b)^5$ = ____
$(a - b)^9$ = ____

4. Développe les expressions suivantes en t'aidant des identités remarquables :

Exemple :

$(a - 2x)^5 = 1\ a^5\ x^0 - 10\ a^4\ x^1 + 40\ a^3\ x^2 - 80\ a^2\ x^3 + 80\ a^1\ x^4 - 32\ a^0\ x^5$

$(a + 3)^4 =$ ______________________________

$(2a - 3)^3 =$ ______________________________

$(2a + c)^5 =$ ______________________________

$(2a - 3d)^6 =$ ______________________________

$(x - 5)^4 =$ ______________________________

$(x - b)^8 =$ ______________________________

$(2x^2 - b)^5 =$ ______________________________

$(x^3 + b^2)^4 =$ ______________________________

Compléter le polynôme remarquable :

Il arrive parfois qu'un monôme ou plusieurs manquent pour obtenir un polynôme remarquable. Quand on cherche ces monômes manquants, on dit qu'on complète le polynôme remarquable, notamment le carré quand $n = 2$.

Exemple :

$$4m^2 + 12mn$$

Il nous manque un monôme pour obtenir un trinôme remarquable. Nous devons tout d'abord identifier a.

$$4m^2 = a^2 \text{ donc } 2m = a$$

Nous devons alors substituer a à 2m pour résoudre l'équation $2ab = 6mn$ pour trouver la valeur de b.

$$2ab = 12mn$$

$$\sim \quad 2ab = 6an$$

$$\sim \quad b = 3n$$

Nous pouvons alors compléter le carré.

$$4m^2 + 12mn + 9n^2$$

$$= (2m+3n)^2$$

5. Complète les polynômes remarquables suivants :

$4s^2 + 24st^3$ ______________________

$9v^4 - 18v^2w^5$ ______________________

$a^3 + 6a^2b$ ______________________

$m^4 - 20m^3b^2$ ______________________

$n^8 + 20n^6t$ ______________________

$v^2 - vw$ ______________________

$v^3 + 3v^2w^{-1}$ ______________________

$v^4 - v^3z^3$ ______________________

$3s^2 + 3st$ ______________________

$5s^2 + 10st^2$ ______________________

$5s^3 - 7s^2y^3$ ______________________

$11s^4 + 23s^3x^{-1}$ ______________________

D'autres identités remarquables sont de la forme suivante :

$a^1 - b^1 = (a - b)(a^0\ b^0) = (a - b)(1) = (a - b)$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a^1\ b^0 + a^0\ b^1) = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2\ b^0 + a^1\ b^1 + a^0\ b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3\ b^0 + a^2\ b^1 + a^1\ b^2 + a^0\ b^3) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a - b)(\qquad\qquad) = (a - b)(\qquad\qquad)$

$a^6 - b^6 =$ ______________________ = ______________________

6. Factorise les binômes remarquables suivants :

Exemple :

$a5 - b^{10} = (a - b^2)(a^4 + a^3b^2 + a^2b^4 + ab^6 + b^8)$

$a^3 - b^6 =$ ______________________

$a^4 - b^8 =$ ______________________

$t^3 - v^9 =$ ______________________

$s^2 - z^6 =$ ______________________

$a^3 - 27 =$ ______________________

$a^4 - 16 =$ ______________________

$a^2 - 1 =$ ______________________

$a^3 - 1 =$ ______________________

$a^4 - 1 =$ ______________________

$1 - a^2 =$ ______________________

$1 - a^3 =$ ______________________

$1 - a^4 =$ ______________________

Les identités remarquables

Les identités remarquables sont des égalités qui permettent d'effectuer ou de factoriser rapidement certaines expressions mathématiques. La forme développée ou la forme factorisée sera plus pratique selon les chapitres.

Les trois identités remarquables les plus utilisées sont les suivantes :

Forme factorisée		Forme développée
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2$	=	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b)$	=	$a^2 - b^2$

1. Développe les expressions suivantes en t'aidant des identités remarquables :

Exemple :

$(a + x)^2$	=	*$a^2 + 2ax + x^2$*
$(a + 3)^2$	=	$a^2 + 6a + 9$
$(2a + 3)^2$	=	$4a^2 + 12a + 9$
$(2a + c)^2$	=	$4a^2 + 4ac + c2$
$(2a + 3d)^2$	=	$4a^2 + 12ad + 9d2$
$(x - 5)^2$	=	$x^2 - 10x + 25$
$(x - b)^2$	=	$x^2 - 2bx + b2$
$(2x - b)^2$	=	$4x^2 - 4bx + b2$
$(2x - 3b)^2$	=	$4x^2 - 12bx + b2$
$(a + c)(a - c)$	=	$a^2 - c^2$
$(s + 3)(s - 3)$	=	$s^2 - 9$
$(2m + n)(2m - n)$	=	$4m^2 - n^2$
$(8p - 7t)(8p + 7t)$	=	$64p^2 - 49t^2$
$(a^2 + b^3)(a^2 - b^3)$	=	$a^4 - b^6$
$(m^2 - p^3)^2$	=	$m^4 - 2m^2p^3 + p^6$
$(a - b)(b - a)$	=	$(a - b)(-1)(a - b) = (-1)(a - b)(a - b) = (-1)(a^2 -2ab + b^2) = -a^2 + 2ab -b^2$
$(x - 3)(3 - x)$	=	$(x - 3)(-1)(x - 3) = (-1)(x - 3)(x - 3) = (-1)(x^2 - 6x + 9) = -x^2 + 6x - 9$

2. Factorise les expressions suivantes en t'aidant des identités remarquables :

Exemple :

$a^2 + 2ac + c^2$	=	*$(a + c)^2$*
$m^2 + 2mp +p^2$	=	$(m + p)^2$
$n^2 + 4ns + 4s^2$	=	$n + 2s)^2$
$4n^2 + 12nt + 9t^2$	=	$(2n + 3t)^2$
$25t^2 - 70tv + 49v^2$	=	$(5t - 7v)^2$
$4h^2 - 16hp + 16p^2$	=	$(2h - 4p)^2$
$m^2 - n^2$	=	$m + n)(m - n)$
$4m^2 - 9s^2$	=	$(2m + 3)(2m - 3)$
$81m^4 - 64n^6$	=	$(9m^2 + 8n^3)(9m^2 - 8n^3)$
$-t^2 - 2tv - v^2$	=	$(-1)(t^2 + 2tv + v^2) = (-1)(t + v)^2 = -(t + v)^2$
$-v^2 +2vx - x^2$	=	$(-1)(v^2 - 2vx + x^2) = (-1)(v - x)^2 = -(v - x)^2$
$-a^6 + 10a^3b^{10} - 25b^{20}$	=	$(-1)(a^6 - 10a^3b^{10} + 25b^{20}) = (-1)(a^3 - 5b^{10})^2 = -(a^3 - 5b^{10})^2$

Les produits remarquables $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$ peuvent être généralisés avec $(a + b)^n$ et $(a - b)^n$.

Observons les développements suivants :

$(a + b)^1 \quad = \quad 1\ a^1\ b^0 + 1\ a^0\ b^1$
$(a + b)^2 \quad = \quad 1\ a^2\ b^0 + 2\ a^1\ b^1 + 1\ a^0\ b^2$
$(a + b)^3 \quad = \quad 1\ a^3\ b^0 + 3\ a^2\ b^1 + 3\ a^1\ b^2 + 1\ a^0\ b^3$
$(a + b)^4 \quad = \quad 1\ a^4\ b^0 + 4\ a^3\ b^1 + 6\ a^2\ b^2 + 4\ a^1\ b^3 + 1\ a^0\ b^4$
$(a + b)^5 \quad = \quad 1\ a^5\ b^0 + 5\ a^4\ b^1 + 10\ a^3\ b^2 + 10\ a^2\ b^3 + 5\ a^1\ b^4 + 1\ a^0\ b^5$

…

$(a - b)^1 \quad = \quad 1\ a^1\ b^0 - 1\ a^0\ b1$
$(a - b)^2 \quad = \quad 1\ a^2\ b^0 \quad 2\ a^1\ b^1 + 1\ a^0\ b^2$
$(a - b)^3 \quad = \quad 1\ a^3\ b^0 - 3\ a^2\ b^1 + 3\ a^1\ b^2 - 1\ a^0\ b^3$
$(a - b)^4 \quad = \quad 1\ a^4\ b^0 - 4\ a^3\ b^1 + 6\ a^2\ b^2 - 4\ a^1\ b^3 + 1\ a^0\ b^4$
(a - b)5 = 1 a5 b0 - 5 a4 b1 + 10 a3 b2 - 10 a2 b3 + 5 a1 b4 - 1 a0 b5

…

Trois éléments sont à observer, qui nous aideront à développer ces produits remarquables :

1. Comment connaître les exposants de *a* et de *b* ?

   L'exposant de *a* diminue de 1 d'un monôme au suivant, allant de *n* à 0.
   L'exposant de *b* augmente de 1 d'un monôme au suivant, allant de 0 à *n*.
   La somme des exposants de *a* et *b* est, pour tous les monômes, égale à *n*.

2. Comment connaître le signe de chaque monôme ?

   Quand la base est une somme, le signe de chaque monôme est positif.
   Quand la base est une différence, le signe alterne d'un monôme au suivant, en commençant par le positif.

3. Comment connaître le facteur réel de chaque monôme ?

   Les facteurs réels des monômes s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal peut être construit comme une pyramide partant de sa pointe et creusant à l'infini.

Chaque élément de la pyramide s'obtient par la somme des deux éléments qui le surplombent.

$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 1
$(a + b)^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a + b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a + b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1

3. Développe alors les identités remarquables suivantes :

$(a + b)^6 \quad = \quad a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
$(a - b)^7 \quad = \quad a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$
$(a + b)^5 \quad = \quad a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a - b)^9 \quad = \quad a^9 - 9a^8b + 36a^{7s}b^2 - 84a^6b^3 + 126a^5b^4 - 126a^4b^5 + 84a^3b^6 - 36a^2b^7 + 9ab^8 - b^9$

4. Développe les expressions suivantes en t'aidant des identités remarquables :

Exemple :

$(a - 2x)^5$	=	*$1\ a^5\ x^0\ -\ 10\ a^4\ x^1\ +\ 40\ a^3\ x^2\ -\ 80\ a^2\ x^3\ +\ 80\ a^1\ x^4\ -\ 32\ a^0\ x^5$*
$(a + 3)^4$	=	$a^4 + 12a^3 + 54a^2 + 108a + 81$
$(2a - 3)^3$	=	$8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$
$(2a + c)^5$	=	$32a^5 + 80a^4c + 80a^3c^2 + 40a^2c^3 + 10ac^4 + c^5$
$(2a - 3d)^6$	=	$64a^6 - 576a^5d + 2160a^4d^2 - 4320a^3d^3 + 4860a^2d^4 - 2916ad^5 + 729d^6$
$(x - 5)^4$	=	$x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625$
$(x - b)^8$	=	$^8 - 8x^7b + 28x^6b^2 - 56x^5b^3 + 70x^4b^4 - 56x^3b^5 + 28x^2b^6 - 8xb^7 + b^8$
$(2x^2 - b)^5$	=	$32x^{10} - 80x^8b + 80x^6b^2 - 40x^4b^3 + 10x^2b^4 - b^5$
$(x^3 + b^2)^4$	=	$^{12} + 4x^9b^2 + 6x^6b^4 + 4x^3b^6 + b^8$

Compléter le polynôme remarquable :

Il arrive parfois qu'un monôme ou plusieurs manquent pour obtenir un polynôme remarquable. Quand on cherche ces monômes manquants, on dit qu'on complète le polynôme remarquable, notamment le carré quand $n = 2$.

Exemple :

$4m^2 + 12mn$

Il nous manque un monôme pour obtenir un trinôme remarquable. Nous devons tout d'abord identifier a.

$4m^2 = a^2$ *donc* $2m = a$

Nous devons alors substituer a à 2m pour résoudre l'équation $2ab = 6mn$ pour trouver la valeur de b.

	$2ab$	=	$12mn$
~	$2ab$	=	$6an$
~	b	=	$3n$

Nous pouvons alors compléter le carré.

$4m^2 + 12mn + 9n^2$

= $(2m+3n)2$

5. Complète les polynômes remarquables suivants :

$4s^2 + 24st^3 + 36t^6$

$9v^4 - 18v^2w^5 + 9w^{10}$

$a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

$m^4 - 20m^3b^2 + 150m^2b^4 - 500mb^6 + 625b^8$

$n^8 + 20n^6t + 150n^4t^2 + 500n^2t^3 + 625t^4$

$v^2 - vw + w^2/4$

$v^3 + 3v^2w^{-1} + 3vw^{-2} + w^{-3}$

$v^4 - v^3z^3 + 3v^2z^6/8 - vz^9/16 + z^{12}/256$

$3s^2 + 3st + 3t/4$

$5s^2 + 10st^2 + 5t^4$

$5s^3 - 7s^2y^3 + 49sy^6/15 - 343y^9/675$

$11s^4 + 23s^3x^{-1} + 1587s^2x^{-2}/88 + 12167sx^{-3}/1936 + 279841x^{-4}/340736$

D’autres identités remarquables sont de la forme suivante :

$a^1 - b^1 = (a - b)(a^0b^0) \quad = (a - b)(1) \quad = (a - b)$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a^1b^0 + a^0b^1) \quad = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2\ ^0 + a^1b^1 + a^0b^2) \quad = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3\ ^0 + a^2b^1 + a^1b^2 + a^0b^3) \quad = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4b^0 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + a^0b^4) \quad = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5b^0 + a^4b^1 + a^3b^2 + a^2b^3 + a^1b^4 + a^0b^5) \quad = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

6. Factorise les binômes remarquables suivants :

Exemple :

a5 - b^{10} = $(a - b^2)(a^4 + a^3b^2 + a^2b^4 + ab^6 + b^8)$

$a^3 - b^6 = (a - b^2)(a^2 + ab^2 + b^4)$

$a^4 - b^8 = (a - b^2)(a^3b^2 + a^2b^4 + ab^6)$

$t^3 - v^9 = (t - v^3)(t^2 + tv^3 + v^6)$

$s^2 - z^6 = (s - z^3)(s + z^3)$

$a^3 - 27 = (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$

$a^4 - 16 = (a - 2)(a^3 + 2a^2 + 4a + 8)$

$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$

$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$

$a^4 - 1 = (a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1)$

$1 - a^2 = (1 - a)(1 + a)$

$1 - a^3 = (1 - a)(1 + a + a^2)$

$1 - a^4 = (1 - a)(1 + a + a^2 + a^3)$