Entraînement aux Olympiades Académiques

Guillaume B.

3 février 2007

Exercice 1 a) *Trouver tous les entiers naturels n et k tels que :*

$$(k+1)(2n+k) = 154$$

b) *En déduire tous les entiers naturels n et k tels que :*

$$n + (n+1) + ... + (n+k) = 77$$

Solution a) $154 = 2 * 7 * 11 = 2 * 77 = 11 * 14 = 22 * 7 = 1 * 154$
On a alors les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k+1 & = & 2 \\ 2n+1 & = & 77 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k+1 & = & 11 \\ 2n+1 & = & 14 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k+1 & = & 7 \\ 2n+1 & = & 22 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k+1 & = & 1 \\ 2n+1 & = & 154 \end{array} \right.$$

Qui nous donnent respectivement les couples $(n;k) = (38;1);(2;10);(8;6);(77;0)$

b) $n + (n+1) + ... + (n+k) = 77$

Posons $n + n + n + ...n(kfois) = n_1 + n_2 + ...n_k$, on a alors :

$(n + n_1 + n_2 + ...n_k) + (1 + 2 + 3 + ...k) = 77 \Longleftrightarrow (k+1)n + \frac{k(k+1)}{2} = 77 \Longleftrightarrow$
$(k+1)(n+k) = 154$

Les solutions sont alors : $(n;k) = (76;1), (4;10), (16;6), (154;0)$

Exercice 2 *Si x et y sont des entiers tels que $(x-y)^2 + 2y^2 = 27$, quelles sont les valeurs possibles pour x ?*

Solution Vu que l'expression est une somme, pour une question de grandeur on a $2y^2 < 27$, inégalité vérifiée pour $y = \{0;1;2;3\}$. Testons ces valeurs :

$y = 0$

$$x^2 = 27 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{27}$$

Or $x \in \mathbb{N}$, donc cette valeur n'est pas solution.

$y = 1$

$$(x-1)^2 + 2 = 27 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 25 \Longleftrightarrow (x-6)(x+4) = 0$$

Or, $x \in \mathbb{N}$, donc seule la valeur 6 est admise.

$y = 2$

$$(x-2)^2 - 8 = 27 \Longleftrightarrow (x-2)^2 = 19$$

19 n'étant pas un carré parfait, l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{N}$.

$y = 3$

$$(x-3)^2 + 18 = 27 \Longleftrightarrow (x-11)(x+6) = 0$$

Au final, seules $x = \{6;11\}$ vérifient le problème posé.

Exercice 3 *Pour quels entiers naturels n, le nombre $N = \frac{n}{20-n}$ est-il un carré parfait ?*

Solution Pour que tout cela ait un sens, on a forcément $n \neq 20$. Un carré parfait est forcément positif, N l'est donc pour $n < 20$. En testant les valeurs entières de l'intervalle $[0;20[$, les seules valeurs retenues sont $n = \{4;10;16;18\}$

Exercice 4 *a) Soit n un entier naturel non nul. Résoudre dans R^2 le système :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & n \\ xy & = & n \end{array} \right.$$

b) Le système admet-il des solutions dans N^2 ?

Solution Supposons x et y les racines d'un polynôme P du second degré. Soit a, b et c ses coefficients on a alors par définition :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & \frac{-b}{a} \\ xy & = & \frac{c}{a} \end{array} \right.$$

avec $P(z) = az^2 + bz + c$

Ce qui nous ramène à deux polynômes différents :

$$P(z) = -nz^2 + n^2z - n^2$$

$$\Delta_n = n^4 + 4n^3$$

Alors,

$$x = \frac{-n^2-\sqrt{n^4+4n^3}}{-2n} = \frac{-n-\sqrt{n^2+4n}}{-2}$$

$$y = \frac{-n^2+\sqrt{n^4+4n^3}}{-2n} = \frac{-n+\sqrt{n^2+4n}}{-2}$$

ou

$$P(z) = nz^2 - n^2z + n^2$$

$$\Delta_n = n^4 - 4n^3$$

Alors,

$$x = \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$$

$$y = \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}$$

Vu que l'on est dans $\mathbb{R}$, x et y sont définis pour tout $n \neq 0$ sous les couples :

$(x;y) = (\frac{-n-\sqrt{n^2+4n}}{-2}; \frac{-n+\sqrt{n^2+4n}}{-2}); (\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}; \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2})$ et leurs permutations.

b) Le système se résout dans N^2 avec par exemple $x = y = 2$ et $n = 4$.