

## Exercices sur les suites

### Exercice 1 :

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? géométriques ? ni l'une ni l'autre ?

$$u_n = 2n - 5 \quad u_n = \frac{2}{3^n} \quad u_n = n^2$$

### Exercice 2 :

Etudier la variation et la limite des suites suivantes :

$$u_n = n^n \quad u_n = \sqrt{n^2 - 1} \quad u_n = \frac{n}{2^n}$$

### Exercice 3 :

Soit les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  définies par  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ .

Le but est de démontrer que ces deux suites convergent vers une même limite qu'on déterminera.

Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante et que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.

En déduire que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

Démontrer que pour tout  $n, n \geq 1 : u_n \leq v_n \leq v_1$ . En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

Démontrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  ont même limite.

En utilisant la formule de Taylor Lagrange (voir développement limité, page 10) pour la fonction exponentielle sur l'intervalle  $[0,1]$ , démontrer que :

pour tout  $n$ , il existe  $c$  appartenant à  $]0; 1[$  tel que  $|e - u_n| = \frac{e^c}{(n+1)!}$ .

En déduire que pour tout  $n, |e - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ . Conclure.