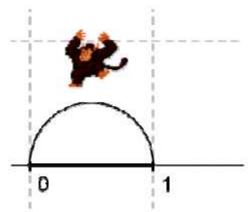
Devoir maison n°8 - 1$^{\text{ère}}$S2

A rendre pour le 09/04/12

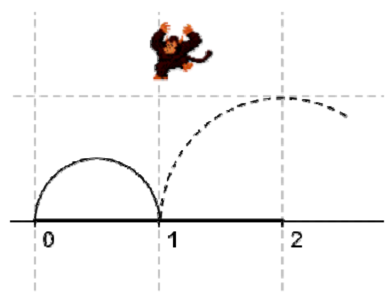
Exercice 1 :

Un singe sauteur passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière. Le nombre n est dit **atteignable** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, ... , n (effectués dans cet ordre) et sans jamais sortir du segment $\left[0;n\right]$. Par exemple :

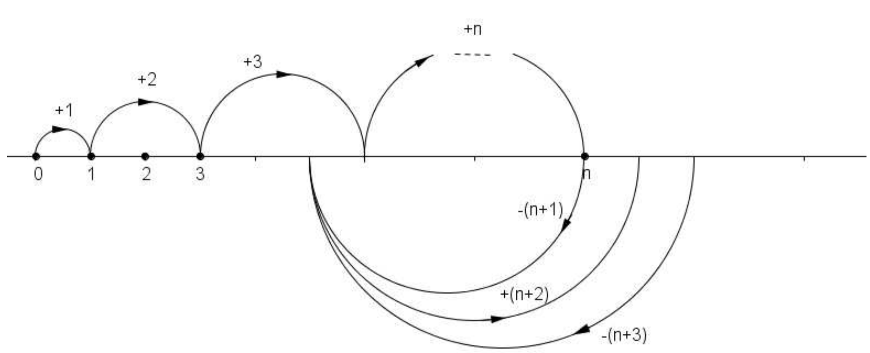
◇ le nombre 1 est atteignable.



◇ le nombre 2 n'est pas atteignable car après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire en avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière, il sort de l'intervalle $\left[0;2\right]$.



1. Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison. Laquelle ?
2. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
3. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable. On pourra illustrer les différents cas par un dessin.
4. Montrer que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables.
5. Le nombre 9 est-il atteignable ?
6. On veut démontrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables. Le mécanisme est le suivant : le singe fait successivement en avant des bonds de longueur 1, 2, 3 , ... jusqu'à n. Ensuite il fait un bond en arrière de longueur $n+1$, puis un bond en avant de longueur $n+2$, un bond en arrière de longueur $n+3$, ... (en alternant les bonds en avant et en arrière) :



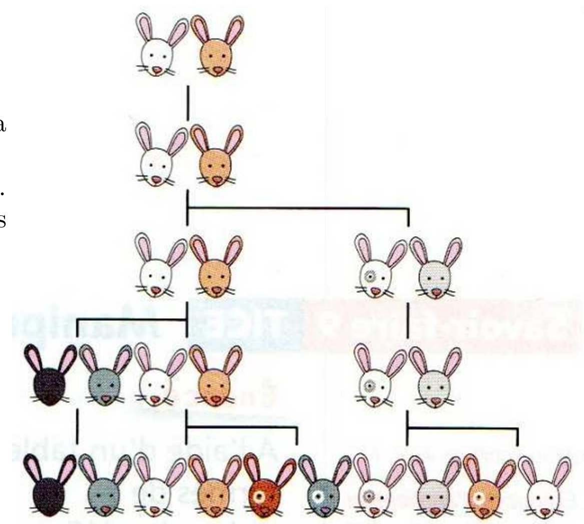
Indication : on sera amené à utiliser la formule du cours donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Exercice 2 :

En 1202, Leonardo Pisano Fibonacci a posé le problème suivant :
"Supposons qu'un couple (un mâle et une femelle) de lapins naisse au début de l'année (mois 0), avec les hypothèses théoriques suivants :

1. la maturité sexuelle du lapin est atteinte après un mois ;
2. la durée de gestation du lapin est de 1 mois ;
3. chaque portée comporte toujours un mâle et une femelle ;
4. les lapins sont immortels.

Combien y aura-t-il de lapins après un an ?"



Ainsi, comme l'indique le schéma ci-contre, au mois 1, le couple a simplement grandi et se trouve en maturité sexuelle.
Au mois 2, le couple vit toujours et donne naissance à un nouveau couple.
Au mois 3, le "vieux" couple donne encore naissance à un couple, alors que le couple né le mois précédent arrive à maturité sexuelle.
etc...

Notons u_n le nombre de couples de lapins au mois n (pour $n \geqslant 1$).
On a donc $u_0 = 0$ (par convention), $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $u_3 = 3$.

1. Déterminer u_4 et u_5. Justifier.
2. Il devient assez vite difficile de suivre la prolifération des lapins. Il vaut alors mieux s'interroger plus généralement sur ce qui se passe à un mois donné par rapport aux deux mois précédents.
   Justifier soigneusement la formule de récurrence
   $$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$
   Attention, il ne suffit pas de constater que cette formule est vraie pour les premières valeurs de n.
3. A l'aide de la formule de récurrence précédente, calculer u_6 et u_7.
4. Soient α et β les deux racines réelles de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   Donner les valeurs exactes de α et β (on notera α la plus petite valeur des deux).
5. Soient p et q deux nombres réels quelconques. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = p\alpha^n + q\beta^n$ vérifie la relation de récurrence précédente, c'est-à-dire que :
   $$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$
6. Déterminer les valeurs de p et q pour que l'on ait $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$.
7. On admet désormais que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.
   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
   Déduire des questions précédentes l'expression de S_n en fonction de n.
8. Répondre à la question posée par Fibonacci.
9. Déterminer à l'aide d'un tableur le nombre de mois nécessaires pour obtenir un million de lapins. Et pour un milliard ?