

Maths T^{erm} ES

LAMBOLEZ Paul

2012 - 2013

Sommaire

I	Les suites	3
1	Définition	4
1.1	Définition Explicite	4
1.1.1	Exemples	4
1.2	Définition par récurrence	4
1.2.1	Exemples	4
1.3	Sens de variation	4
1.3.1	Exemples	5
2	Suites particulières	6
2.1	Les suites arithmétiques	6
2.1.1	Exemples	6
2.1.2	Expression du terme général en fonction de n	6
2.1.3	Somme des termes	6
2.1.4	Sens de variation	6
2.1.5	Limites	7
2.2	Les suites géométriques	8
2.2.1	Exemples	8
2.2.2	Expression du terme général en fonction de n	8
2.2.3	Somme des termes	8
2.2.4	Sens de variation	8
2.2.5	Limites	9
3	Synthèse	10

Première partie

Les suites

Chapitre 1

Définition

Une suite est la réduction d'une fonction définie sur les réels $f : x \mapsto y$ avec $x \in \mathbb{R}$ vers une fonction définie sur les entiers naturels $f : n \mapsto y$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Elle se note u_n (u indice n).

1.1 Définition Explicite

Une suite (u) définie explicitement l'est en fonction de n .

1.1.1 Exemples

1

Soit (u) la suite de terme général :

$$u_n = n - 2\sqrt{n-1} + 2 \quad \text{avec} \quad n-1 \geq 0 \iff n \geq 1$$

2

Soit (v) la suite de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{avec} \quad n \neq -1$$

1.2 Définition par récurrence

Une suite (u) définie par récurrence l'est en fonction de son terme précédent.

1.2.1 Exemples

1

Soit (u) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{4u_n} + 2 \\ u_0 &= 1 \end{cases}$$

2

Soit (v) la suite définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} &= \frac{v_n+4}{3} \\ v_1 &= 3 \end{cases}$$

1.3 Sens de variation

Soit u_n une suite avec $n \in \mathbb{N}$.

Si $\forall n$ (ou tout du moins à partir d'un certain rang), $\boxed{u_{n+1} > u_n}$ alors cette suite est *croissante*.

Inversement,

Si $\forall n$ (ou tout du moins à partir d'un certain rang), $\boxed{u_{n+1} < u_n}$ alors cette suite est *décroissante*.

1.3.1 Exemples

Exemple d'une suite croissante

$$(u) / u_n = (n - 10)^2$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n - 9)^2 - (n - 10)^2 \\ &= (n^2 - 18n + 81) - (n^2 - 20n + 100) \\ &= n^2 - 18n + 81 - n^2 + 20n - 100 \\ &= 2n - 19 \end{aligned}$$

Pour $n \geq 10$, $2n - 19 > 0$

donc $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$ et (u) croissante.

Exemple d'une suite décroissante

$$(v) / v_n = 4 - 3n$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 4 - 3(n + 1) - (4 - 3n) \\ &= 3n - 3n + 4 - 4 - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Pour $\forall n$, $-3 < 0$

donc $v_{n+1} - v_n < 0 \iff v_{n+1} < v_n$ et (v) croissante.

Chapitre 2

Suites particulières

2.1 Les suites arithmétiques

2.1.1 Exemples

1

Soit une suite dont les termes sont :

$$-10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots$$

Il s'agit d'une suite (u) *arithmétique* de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -10$.

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 3 \\ u_0 &= -10 \end{cases}$$

2

Soit une suite dont les termes sont :

$$7, 5, 3, 1, -1, -3, \dots$$

Il s'agit d'une suite (v) *arithmétique* de raison $r = -2$ et de premier terme $v_0 = 7$.

$$\begin{cases} v_{n+1} &= v_n - 2 \\ v_0 &= 7 \end{cases}$$

2.1.2 Expression du terme général en fonction de n

$u_{min} = u_0$	$u_{min} = u_1$	$u_{min} = u_p$
$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = u_p + (n-p)r$

2.1.3 Somme des termes

La somme S d'une suite arithmétique est :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{[(\text{premier terme}) - (\text{dernier terme})]}{2}$$

2.1.4 Sens de variation

$$\forall n, u_{n+1} = u_n + r$$

Si $r > 0$, la suite est *croissante*.

Si $r < 0$, la suite est *décroissante*.

Exemples

Suite arithmétique croissante : $(u) / u_n = u_0 + n \times 2.5$ et $u_0 = -7$
 $r = 2.5, r > 0$ donc (u) *croissante*

Suite arithmétique décroissante : $(v) / v_n = v_0 + n \times -4$ et $v_0 = 12$
 $r = -4, r < 0$ donc (v) *décroissante*

2.1.5 Limites

Soit (u) une suite arithmétique de forme : $u_n = u_0 + n \times r$,

Si $r > 0$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$	et (u) <i>divergente</i>
Si $r < 0$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$	et (u) <i>divergente</i>
Si $r = 0$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = u_0$	et (u) <i>convergente</i>

Exemples

Avec une raison > 0 : $(u) / u_n = -5 + 2n$ de raison $r = 2$.
 Comme $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$

Avec une raison < 0 : $(v) / v_n = 4 - 3n$ de raison $r = -3$,
 Comme $r < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = -\infty$

Avec une raison $= 0$: $(w) / w_n = 42$ de raison $r = 0$ et de premier terme $w_0 = 42$
 Comme $r = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = w_0 = 42$

2.2 Les suites géométriques

2.2.1 Exemples

Soit une suite dont les termes sont :

$$4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$$

Il s'agit d'une suite (u) *géométrique* de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 4$.

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2 \times u_n \\ u_0 &= 4 \end{cases}$$

2

$$5, -15, 45, -135, 405, \dots$$

Il s'agit d'une suite (v) *géométrique* de raison $q = -3$ et de premier terme $v_0 = 5$.

$$\begin{cases} v_{n+1} &= -3 \times v_n \\ v_0 &= 5 \end{cases}$$

2.2.2 Expression du terme général en fonction de n

$u_{min} = u_0$	$u_{min} = u_1$	$u_{min} = u_p$
$u_n = q^n \times u_0$	$u_n = q^{(n-1)} \times u_0$	$u_n = q^{(n-p)} \times u_0$

2.2.3 Somme des termes

La somme S d'une suite géométrique de raison r est :

$$S = \frac{(\text{premier terme}) \times (1 - r^{(\text{nombre de termes})})}{1 - r}$$

2.2.4 Sens de variation

De la forme $u_n = q^n$

si $q = 1$, (u) *constante*.

si $q > 1$, (u) *croissante*.

si $q < 1$, (u) *décroissante*.

De la forme $u_n = u_0 \times q^n$

Si $u_0 \geq 0$: même variation que $u_n = q^n$

Si $u_0 < 0$:

si $q = 1$, (u) *constante*.

si $q > 1$, (u) *décroissante*.

si $q < 1$, (u) *croissante*.

2.2.5 Limites

De la forme $u_n = q^n$

Soit (u) une suite géométrique de forme : $u_n = q^n$,

Si $q > 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$	et (u) <i>divergente</i>
Si $q = 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$	et (u) <i>convergente</i>
Si $0 < q < 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$	et (u) <i>convergente</i>
Si $q < 0$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \text{indéterminée}$	et (u) <i>alternée</i>

De la forme $u_n = u_0 \times q^n$

Quand $u_0 > 0$,

Si $q > 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$	et (u) <i>divergente</i>
Si $q = 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = u_0$	et (u) <i>convergente</i>
Si $0 < q < 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$	et (u) <i>convergente</i>
Si $q < 0$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \text{indéterminée}$	et (u) <i>alternée</i>

Quand $u_0 < 0$,

Si $q > 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$	et (u) <i>divergente</i>
Si $q = 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = u_0$	et (u) <i>convergente</i>
Si $0 < q < 1$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$	et (u) <i>convergente</i>
Si $q < 0$,	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \text{indéterminée}$	et (u) <i>alternée</i>

Chapitre 3

Synthèse

Suites arithmétiques	Suites géométriques																											
$\forall n,$ $u_{n+1} = u_n + r$	$\forall n,$ $u_{n+1} = q \times u_n$																											
(u) est arithmétique si : $\forall n, u_{n+1} - u_n = k \quad \text{où } k \text{ constante}$	(u) est géométrique si : $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} = k \quad \text{où } k \text{ constante}$																											
$\forall n,$ $u_n = u_0 + n \times r$ $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$ $u_n = u_p + (n - p) \times r$	$\forall n,$ $u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ $u_n = u_p \times q^{n-p}$																											
Somme des termes : $S = (\text{nbr de termes}) \times \frac{[(1^{\text{er}} \text{ terme}) - (\text{dernier terme})]}{2}$	Somme des termes (avec r la raison) : $S = \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme}) \times (1 - r^{(\text{nbr de termes})})}{1 - r}$																											
Variations de $u_n = u_0 + (n \times r)$ <table><tr><td></td><td>$r = 0$</td><td>$r > 0$</td><td>$r < 0$</td></tr><tr><td>(u) est</td><td>Constante</td><td>Croissante</td><td>Décroissante</td></tr></table>		$r = 0$	$r > 0$	$r < 0$	(u) est	Constante	Croissante	Décroissante	Variations de $u_n = u_0 \times q^n$ <table><tr><td>$\begin{matrix} & q \\ u_0 & \backslash \end{matrix}$</td><td>$q = 0$</td><td>$q > 0$</td><td>$q < 0$</td></tr><tr><td>$u_0 = 0$</td><td>Constante</td><td>Constante</td><td>Constante</td></tr><tr><td>$u_0 > 1$</td><td>Constante</td><td>Croissante</td><td>Décroissante</td></tr><tr><td>$u_0 < 1$</td><td>Constante</td><td>Décroissante</td><td>Croissante</td></tr></table>	$\begin{matrix} & q \\ u_0 & \backslash \end{matrix}$	$q = 0$	$q > 0$	$q < 0$	$u_0 = 0$	Constante	Constante	Constante	$u_0 > 1$	Constante	Croissante	Décroissante	$u_0 < 1$	Constante	Décroissante	Croissante			
	$r = 0$	$r > 0$	$r < 0$																									
(u) est	Constante	Croissante	Décroissante																									
$\begin{matrix} & q \\ u_0 & \backslash \end{matrix}$	$q = 0$	$q > 0$	$q < 0$																									
$u_0 = 0$	Constante	Constante	Constante																									
$u_0 > 1$	Constante	Croissante	Décroissante																									
$u_0 < 1$	Constante	Décroissante	Croissante																									
Limites de $u_n = u_0 + r \times n$ <table><tr><td></td><td>$r > 0$</td><td>$r < 0$</td><td>$r = 0$</td></tr><tr><td>$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) =$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$u_0$</td></tr><tr><td>$(u)$ est</td><td>Divergente</td><td>Divergente</td><td>Convergente</td></tr></table>		$r > 0$	$r < 0$	$r = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) =$	$+\infty$	$-\infty$	u_0	(u) est	Divergente	Divergente	Convergente	Limites de $u_n = u_0 \times q^n$ <table><tr><td>$\begin{matrix} & q \\ u_0 & \backslash \end{matrix}$</td><td>$q > 1$</td><td>$q = 1$</td><td>$0 < q < 1$</td><td>$q < 0$</td></tr><tr><td>$u_0 > 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$u_0$</td><td>0</td><td>$\backslash$</td></tr><tr><td>$u_0 < 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$u_0$</td><td>0</td><td>$\backslash$</td></tr></table>	$\begin{matrix} & q \\ u_0 & \backslash \end{matrix}$	$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	$q < 0$	$u_0 > 0$	$+\infty$	u_0	0	$\backslash$	$u_0 < 0$	$-\infty$	u_0	0	$\backslash$
	$r > 0$	$r < 0$	$r = 0$																									
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) =$	$+\infty$	$-\infty$	u_0																									
(u) est	Divergente	Divergente	Convergente																									
$\begin{matrix} & q \\ u_0 & \backslash \end{matrix}$	$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	$q < 0$																								
$u_0 > 0$	$+\infty$	u_0	0	$\backslash$																								
$u_0 < 0$	$-\infty$	u_0	0	$\backslash$																								