Démonstration de l'identité de Bachet - Bézout.

- Pour tout a et b premiers entre eux avec la condition $a > \frac{b}{2}$ où $b > a$, on a :

$$(a \times b) - (b - a) = a \times b - b + a.$$
$$= b\,(a-1) + a.$$

On obtient ainsi une liste de nombres inférieurs à $a \times b$ s'écrivant sous forme de : $xa + yb$ (où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$).

Ces nombres sont :

un seul nombre $\longrightarrow b\,(a-1) + a$.

deux nombres $\longrightarrow b\,(a-2) + 2a \;/\; b\,(a-2) + a$.

trois nombres $\longrightarrow b\,(a-3) + 3a \;/\; b\,(a-3) + 2a \;/\; b\,(a-3) + a$.

$\vdots$

$a-1$ nombres $\longrightarrow b\,(a-(a-1)) + a(a-1) \;/\; b(a-(a-1)) + a(a-2)$ ......

D'où la somme de ces nombres est :

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + a-2 + a-1,$$
$$= \frac{a-1 \times ((a-1)+1)}{2}$$
$$= \frac{a \times (a-1)}{2}.$$

Puisque $b + a$ est le plus petit nombre de cette liste, on considère l'intervalle $[a+b\,;\, a \times b]$.

On peut regrouper tous les nombres de cette intervalle en couples de nombres $(\alpha ; \beta)$ tel que $\alpha + \beta = a \times b + a + b$
$= a \times (b+1) + b$.
En effet on a :

$$a+b \; ; \; a+b+1 \; ; \; a+b+2 \; \cdots\cdots \; a \times b - 2 \; ; \; a \times b - 1 \; ; \; a \times b$$

$a \times (b+1) + b$

$a \times (b+1) + b$

$a \times (b+1) + b$

D'où à chaque nombre de la liste précédente s'écrivant sous forme de $xa + yb$, on peut lui associer un autre nombre tel que :

$$a \times (b+1) + b - (xa + yb)$$
$$= a \times (b+1) + b - xa - yb.$$
$$= a \times (\underbrace{b+1-x}_{z}) - (\underbrace{y-1}_{w})\, b.$$

d'où à chaque nombre s'écrivant sous forme de $xa + yb$ on lui associe un nombre s'écrivant sous forme de $za - wb$ $[z ; w \in \mathbb{N}]$
[les multiples de a et de b en font partie].

- Ces nombres sont distinct des nombre de l'autre liste car on ne peut pas trouver un nombre qui s'écrit à la même fois comme somme de deux multiples de a et b et comme différence d'autres multiples.

En effet si :
$$xa + yb = za - wb.$$
on a.
$$(y + w)\, b = (z - x)\, a.$$

ce qui ne peut pas être puisque $PGCD(a ; b) = 1$ et on travaille dans l'intervalle $[a+b \, ; \, a \times b]$.

d'où on on a :

- $\dfrac{a \times (a+1)}{2}$ nombres s'écrivant sous forme de $xa + yb$
- $\dfrac{a \times (a-1)}{2}$ nombres s'écrivant sous forme de $za - wb$

En total on a : $\dfrac{a\times(a-1)}{2} + \dfrac{a\times(a-1)}{2} = \boxed{a\times(a-1)}$

- Puisque $a > \dfrac{b}{2}$ donc $a-2 > \dfrac{b-1}{2}$.

alors $a(a-2) > \dfrac{a(b-1)}{2}$.

d'où

$$a(a-2)+a > \frac{a(b-1)}{2} + \frac{b}{2}$$

d'où

$$a(a-1) > \frac{a(b-1)+b}{2}.$$

On considère l'intervalle $[a+b\,;\,a\times b]$ le nombre de ses éléments est

$$a\times b-(a+b) = a(b-1)+b.$$

et puisque $a(a-1) > \dfrac{a(b-1)+b}{2}$

alors le nombre des entiers qui s'écrivent sous forme de $za-wb$ ou $xa+yb$ est supérieur à la moitié des éléments de l'intervalle $[a+b\,;\,a\times b]$.

Donc, il doit y avoir deux nombres consécutifs de cette intervalle s'écrivant soit $za-wb$ ~~soit~~ $xa+yb$.

On obtient 3 cas :

$\boxed{\text{1er Cas}}$

Ces deux nombres consécutifs n et $n+1$ s'écrivent :

$$n+1 = xa+yb$$
$$n = za-wb.$$

d'où

$$n+1-n = xa+yb-za+wb.$$

$$\underline{1 = (x-z)a + (y+w)b}.$$

2ème Cas

Ces deux nombres successifs n et n+1 s'écrivent

$$n+1 = za - wb.$$
$$n = z'a - w'b.$$

$$n+1-n = za - wb - z'a + w'b.$$

$$\underline{1 = (z-z')\,a + (w'-w)\,b}.$$

3ème Cas

Ces deux nombres successifs n et n+1 s'écrivent.

$$n+1 = xa + yb.$$
$$n = x'a + y'b.$$

$$n+1-n = xa + yb - x'a - y'b.$$
$$\underline{1 = (x - x')\,a + (y-y')\,b}.$$

D'où pour tout a et b premiers entre eux avec $a > \frac{b}{2}$: $(b>a)$.
Il existe deux nombres "i" et "j" tel que.

$$ia + jb = 1 \quad \text{avec} \quad (i; j \in \mathbb{Z}).$$

Prenons deux nombres a et b ne vérifiant pas la condition $a > \frac{b}{2}$.
(quand $b > a$). On a donc : $b = qa + r$.
avec $r < a$ d'où $r < qa$.
donc $qa > \frac{b}{2}$.
on a donc la relation

$$\underline{(i.q.)a + jb = 1}.$$

D'où pour tous a et b premiers entre eux il existe deux entiers i et j tel que $\boxed{ia + jb = 1}$