Table des matières

Première partie
SUITES ARITHMETIQUES

1 Déterminer si une suite est arithmétique

1.1 méthode

Il faut calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que cette différence est constante pour tout entier naturel n.

1.2 Exemples

❒ **Exemple 1 Montrer qu'une suite est arithmétique**

Déterminer si les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = 6n - 2$ et $v_n = n^2 + 2n - 1$ sont arithmétiques.

☛ **Solution**:

$u_n = 6n - 2$ donc $u_{n+1} = 6(n+1) - 2 = 6n + 6 - 2 = 6n + 4$
$u_{n+1} - u_n = (6n+4) - (6n-2) = 6n + 4 - 6n + 2 = 6$
donc $u_{n+1} - u_n$ est constant pour tout entier naturel n
donc **la suite** (u_n) **est arithmétique de raison** $r = 6$

$v_n = n^2 + 2n - 1$ donc $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 4n + 2$
$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 4n + 2) - (n^2 + 2n - 1) = n^2 + 4n + 2 - n^2 - 2n + 1 = 2n + 3$
donc $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant (dépend de n) pour tout entier naturel n
donc **la suite** (u_n) **n'est pas arithmétique**

2 Déterminer le premier terme et la raison

2.1 Méthode

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel k, on a $u_n = u_k + (n-k)r$.

Si on donne deux termes de la suites (u_n), cette relation permet d'écrire une équation d'inconnue r (raison de la suite)

Pour calculer le premier terme, on a alors $u_n = u_0 + nr$ (r étant alors connu)

2.2 Exemple

❒ **Exemple 2 Déterminer le premier terme et la raison**

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r telle que $u_6 = 12$ et $u_{11} = 36$

☛ **Solution**:

Calcul de r :

$u_{11} = u_6 + (11 - 6)r$ (en prenant $n = 11$ et $k = 6$ dans $u_n = u_k + (n-k)r$)
$\iff 36 = 12 - 5r$
$\iff 14 = 5r$
$\iff r = \dfrac{14}{5}$

Calcul de u_0

$u_6 = u_0 + 6r$
$\iff 12 = u_0 + 6 \times \dfrac{14}{5}$
$\iff u_0 = 12 - \dfrac{84}{5}$
$\iff u_0 = \dfrac{-24}{5}$

donc la suite (u_n) a pour premier terme $u_0 = \dfrac{-24}{5}$ et de raison $r = \dfrac{14}{5}$

3 Somme de ternes consécutifs

3.1 Méthode

Rappels de cours : La somme S des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par : $S =$nombre de termes$\times\dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

- Déterminer le dernier terme de la somme et le nombre de termes de cette somme
- Calculer S

Attention, le nombre de termes de la somme $u_0 + u_1 + u_2 ..... + u_n$ est $n + 1$.
Le nombre de termes de la somme $u_k + u_{k+1} + ... + u_{n-1} + u_n$ (avec $k < n$) est $n - k + 1$

3.2 Exemples

❒ Exemple 3 Somme des termes consécutifs

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et raison $r = 4$.
Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{19}$

☛ Solution:

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et raison $r = 4$
donc $u_n = u_0 + nr = 2 + 4n$

- Calcul de u_{19}
  $u_{19} = 2 + 4 \times 19 = 78$
  Il y a $19 + 1 = 20$ termes dans cette somme (19 de u_1 à u_{19} plus u_0).
- $S = 20 \times \dfrac{2 + 78}{2} = 800$

❒ Exemple 4 Calcul d'une somme avec une suite

Calculer $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + ...100$ en utilisant une suite arithmétique.

☛ Solution:

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et raison $r = 2$,
on a alors $u_n = u_0 + nr = 2 + 2n$

- Calcul du nombre de termes de la somme
  $u_n = 2 + 2n = 100$
  $\iff 2n = 98$
  $\iff n = 49$
  On veut calculer $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49}$ et il y a alors $49 + 1 = 50$ termes.

- Calcul de la somme
  $S = 2 + 4 + 6 + ... + 100 = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49} = 50 \times \dfrac{2 + 100}{2} = 2550$

Deuxième partie
SUITES GEOMETRIQUES

4 Déterminer si une suite est géométrique

4.1 méthode

Il faut calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que ce quotient (égal à la raison) est constant pour tout entier naturel n.

4.2 Exemples

❒ Exemple 5 Montrer qu'une suite est géométrique

Déterminer si la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3}{2^n}$ est géométrique.

☛ Solution:

$u_n = \dfrac{3}{2^n}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{3}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2^n}}\\ &= \frac{3}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3}\\ &= \frac{2^n}{2^{n+1}}\\ &= \frac{2^n}{2 \times 2^n}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout entier naturel n

donc **la suite** (u_n) **est géométrique de raison** $q = \dfrac{1}{2}$

5 Déterminer le premier terme et la raison

5.1 Méthode

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel k, on a $u_n = u_k \times q^{n-k}$.

Si on donne deux termes de la suites (u_n), cette relation permet d'écrire une équation d'inconnue q (raison de la suite)

Pour calculer le premier terme, on a alors $u_n = u_0 q^n$ (q étant alors connu)

5.2 Exemple

❒ Exemple 6 Déterminer le premier terme et la raison

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q telle que $u_6 = 36$ et $u_8 = 324$

☛ **Solution**:

Calcul de q :

$u_8 = u_6 \times q^{8-6}$ (en prenant $n = 8$ et $k = 6$ dans $u_n = u_k \times q^{n-k}$)

$\Longleftrightarrow 324 = 36q^2$

$\Longleftrightarrow q^2 = \dfrac{324}{36}$

$\Longleftrightarrow q^2 = 9$

$\Longleftrightarrow q = \sqrt{9} = 3$ ou $q = -\sqrt{9} = -3$

Calcul de u_0

$u_6 = u_0 q^6$

$\Longleftrightarrow 36 = u_0 \times 729$ ($3^6 = (-3)^6 = 729$)

$\Longleftrightarrow u_0 = \dfrac{36}{729} = \dfrac{4}{81}$

donc la suite (u_n) a pour premier terme $u_0 = \dfrac{4}{81}$ et raison $rq = \dfrac{4}{81}$

6 Somme de ternes consécutifs

6.1 Méthode

Rappels de cours : La somme S des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par : $S =$premier terme$\times\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

- Déterminer la raison et le nombre de termes de cette somme
- Calculer S

Attention, le nombre de termes de la somme $u_0 + u_1 + u_2 ..... + u_n$ est $n + 1$.

Le nombre de termes de la somme $u_k + u_{k+1} + ... + u_{n-1} + u_n$ (avec $k < n$) est $n - k + 1$

6.2 Exemples

❒ Exemple 7 Somme des termes consécutifs

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et raison $q = 4$.
Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{19}$

☛ **Solution**:

- Il y a $19 + 1 = 20$ termes dans cette somme (19 de u_1 à u_{19} plus u_0).
- $S = 2 \times \dfrac{1-4^{20}}{1-4} = 733007771850$