Exercice 1 (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{2(1-x)}{x^2+1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. (a) Calculer $f'(x)$; vérifier que $f'(x) = \dfrac{-2(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$.

   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
   On ne demande pas les valeurs exactes des extremums mais une valeur arrondie aux centièmes.

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

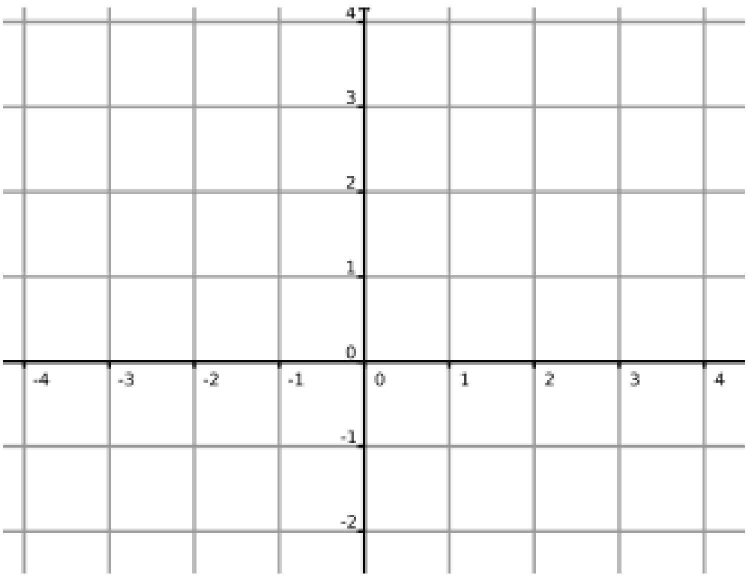
3. On veut montrer qu'il existe un point B de $\mathscr{C}_f$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en B soit parallèle à la droite Δ d'équation $y = -x$.

   (a) Montrer que le problème revient à résoudre l'équation $x^4 + 4x + 3 = 0$.

   (b) Vérifier que $x^4 + 4x + 3 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3)$.

   (c) Conclure.

4. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous ainsi que ses tangentes.



5. Résoudre $f(x) = 0$ et interpréter graphiquement.

6. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2$, puis la position relative entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$. Tracer $\mathscr{D}$.

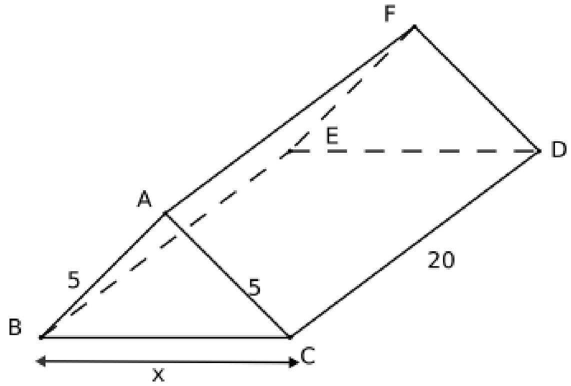
7. Démontrer que la fonction f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $f(x) > -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (10 pts)

Un chocolatier veut faire fabriquer une nouvelle boîte de présentation pour Pâques. Elle aura la forme d'un prisme droit dont deux des faces sont deux rectangles de 20 cm de longueur sur 5 cm de largeur.

Une section de ce prisme par un plan perpendiculaire à la face $BCDE$ est le triangle ABC isocèle en A. La longueur $BC = x$ représente l'écartement entre les deux rectangles.

Le but du problème est de déterminer x tel que le volume de cette boîte soit le plus grand possible.



1. (a) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   (b) Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de x.
   (c) Exprimer le volume V du prisme en fonction de x.
2. Soit la fonction f définie sur $[0; 10]$ par : $f(x) = x^2(100 - x^2)$
   (a) Etudier le sens de variation de f.
   (b) Pour quelle valeur de x, f admet-elle un maximum ?
3. (a) Vérifier que $V(x) = 5\sqrt{f(x)}$.
   (b) En utilisant les variations de f, déterminer les variations de la fonction V sur $[0; 10]$.
   (c) En déduire les dimensions de la boîte ayant le plus grand volume et donner la valeur de ce volume maximal.