



## Démonstrations mathématiques 1ère S

### Part I

## Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions : démonstrations

### 1 Variations de la fonction $f(x) = (u + v)(x)$ :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies respectivement sur  $I$  et  $J$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x$  de  $Df = I \cap J$ , on a  $f(x) = (u + v)(x) = u(x) + v(x)$  (par définition). Si  $u$  et  $v$  sont croissantes sur un intervalle  $K$  de  $Df$ , alors  $f$  est croissante sur  $K$  :  $u$  et  $v$  croissantes sur  $K$  signifie que pour tous nombres  $a$  et  $b$  de  $K$  tels que  $a < b$ , on a  $u(a) < u(b)$  et  $v(a) < v(b)$  donc  $u(a) - u(b) < 0$ . On peut donc écrire que  $(u(a) - u(b)) + (v(a) - v(b)) < 0$  (somme de deux nombres négatifs) et donc  $f(a) - f(b) < 0$  soit  $f(a) < f(b)$ .  $f$  est donc croissante sur  $K$ . De même, on peut montrer que si  $u$  et  $v$  sont décroissantes sur  $K$ ,  $f$  sera également décroissante sur  $K$ . Dans le cas où  $u$  et  $v$  n'ont pas les mêmes variations sur  $K$ , on ne peut pas conclure directement.

### 2 Variations de la fonction $f(x) = k.u(x)$ , avec $k$ réel :

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $f(x) = k.u(x)$  avec  $k$  réel.  $f$  est donc définie sur  $I$ . Si  $k > 0$ ,  $f$  a les mêmes variations que  $u$ , en effet, soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$  tels que  $a < b$ . Si  $u$  est croissante sur  $I$  (ou un intervalle de  $I$ , il faut alors prendre  $a$  et  $b$  de cet intervalle), alors  $u(a) < u(b)$  soit  $k.u(a) < k.u(b)$  soit  $f(a) < f(b)$  donc  $f$  est croissante sur cet intervalle. Donc si  $u$  est croissante sur  $I$ ,  $f$  le sera également. On montre de même que  $u$  étant décroissante sur  $I$ ,  $f$  sera également décroissante sur cet intervalle. On peut procéder de même dans le cas où  $k < 0$  (attention à ne pas oublier de changer le signe de l'égalité!), et nous trouvons que  $f$  a des variations opposées à  $u$  sur  $I$ . Dans le cas où  $k = 0$ ,  $f$  est la fonction nulle.

### 3 Variations de la fonction $f(x) = (v \circ u)(x)$ :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définies respectivement sur deux intervalles  $I$  et  $J$ . Soit  $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$ .  $f$  est donc définie pour tout  $x \in I$  et  $u(x) \in J$ . On note cet ensemble  $Df$ . Si  $u$  et  $v$  sont croissantes sur un intervalle  $K$  de  $Df$ , alors  $f$  est croissante sur  $K$ : en effet, soient deux réels  $a$  et  $b$  de  $K$  tels que  $a < b$ , on a  $u(a) < u(b)$  et  $v(a) < v(b)$ . On pose  $A = u(a)$  et  $B = u(b)$ , donc,  $A < B$  et  $v$  étant croissante sur  $K$ ,  $v(A) < v(B)$  soit  $v(u(a)) < v(u(b))$  soit  $f(a) < f(b)$ .  $f$  est donc croissante sur  $K$ . De même, on montre que si  $u$  et  $v$  sont décroissantes sur  $K$ ,  $f$  est croissante sur  $K$ , et que si  $u$  et  $v$  ont des variations contraires sur  $K$  (l'une est croissante, l'autre est décroissante),  $f$  est décroissante sur  $K$ .

### 4 Fonction associée et translation $f(x) = u(x + a) + b$ :

Soit  $u$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  (nous prenons  $\mathbb{R}$  pour simplifier, nous aurions très bien pu prendre un intervalle de  $\mathbb{R}$ ) et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et soit  $f(x) = u(x + a) + b$  (donc définie et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ). Soit  $C_f$  et  $C_u$  les courbes représentatives de  $f$  et  $u$  dans un repère  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  $C_f$  est la translatée de  $C_u$  par la translation de vecteur  $-a.\vec{i} + b.\vec{j}$ : Soit le point  $M \in C_u$  d'abscisse  $x + a$  et le point  $N \in C_f$  d'abscisse  $x$  ( $x, a$  et  $b$  réels). On a alors  $M(x + a; u(x + a))$  et  $N(x; f(x))$  c'est à dire  $N(x; u(x + a) + b)$ . Donc  $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x - (x + a) \\ u(x + a) + b - u(x + a) \end{pmatrix}$  soit  $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{MN} = -a.\vec{i} + b.\vec{j}$ .  $C_f$  est donc la translatée de  $C_u$  par la translation de vecteur