*Montrez que* $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, a \equiv 7b\ [13] \Leftrightarrow b \equiv 2a\ [13]$

<u>Enoncé direct :</u> $a \equiv 7b\ [13] \Rightarrow b \equiv 2a\ [13]$

$$a \equiv 7b\ [13] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 7b - a = 13k$$

$$\Rightarrow 14b - 2a = 13k'$$

$$k' = 2k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 14b \equiv 2a\ [13]$$

Et : $13b \equiv 0[13]$

Par compatibilité avec la soustraction :

$$\Rightarrow 14b - 13b \equiv 2a - 0[13]$$

$$\Rightarrow \boxed{b \equiv 2a[13]}$$

<u>Enoncé réciproque :</u> $a \equiv 7b\ [13] \Leftarrow b \equiv 2a\ [13]$

$$b \equiv 2a\ [13] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2a - b = 13k$$

$$\Rightarrow 14a - 7b = 13k'$$

$$k' = 7k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 14a \equiv 7b\ [13]$$

Or, $13a \equiv 0\ [13]$ :

$$\Rightarrow 14a - 13a \equiv 7b - 0\ [13]$$

$$\Rightarrow \boxed{a \equiv 7b\ [13]}$$

---

*Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, pour les propositions de 1 à 4* $a$ *et* $b$ *désignent des entiers relatifs.*

<u>P1 : $a \equiv b\ [5] \Rightarrow a \equiv b\ [10]$</u>

On a :

$$10 - 5 = 5 \times 1 \Rightarrow 10 \equiv 5\ [5]$$

Mais :

$$10 - 5 = 10k \Rightarrow k = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$\nexists k \in \mathbb{Z}$ tel que $10 \equiv 5\ [10]$

Donc la proposition P1 est fausse.

P2 : $a \equiv b\ [9] \Rightarrow a \equiv b\ [3]$

$$a \equiv b\ [9] \Leftrightarrow b - a = 9k$$

$$b - a = 3k', \text{où } k' \in \mathbb{Z}, k' = 3k$$

$$\Rightarrow a \equiv b\ [3]$$

Donc P2 vraie.

P3 : $2a \equiv 2b\ [11] \Rightarrow a \equiv b\ [11]$

$$2a \equiv 2b\ [11]$$

$$2(a - b) = 11k$$

$11k$ est pair (puisque $11k = 2k'$, $k' = a - b$)

Donc $k$ est pair.

D'où :

$$a - b = 11\frac{k}{2}, \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a \equiv b\ [11]$$

Donc P3 est vraie.

P4 : $2a \equiv 2b\ [10] \Rightarrow a \equiv b\ [10]$

$$2a \equiv 2b\ [10] \Leftrightarrow 2b \equiv 2a\ [10]$$

$a = 6\ et\ b = 1$, on a bien : $2 \times 6 - 2 \times 1 = 12 - 2 = 10 \ \Rightarrow 2 \times 6 \equiv 2 \times 1\ [10]$

Mais :

$$a - b = 5$$

Et : $5 = 10k \Rightarrow k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Donc :

$\nexists k \in \mathbb{Z}$ tel que $6 \equiv 1\ [10]$

Donc la proposition P4 est fausse.

P5 : $\forall n \in \mathbb{N}, n^4 + 3n^2$ est divisible par 4

Supposons que $n$ soit pair, alors :

$$n = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Et :

$$n^4 + 3n^2 = n^2(n^2 + 3)$$

$$n^4 + 3n^2 = 4k^2(4k^2 + 3) = 4k' \text{où: } k' = k^2(4k^2 + 3)$$

Supposons que $n$ soit impair, alors :

$$n^4 + 3n^2 = (2k+1)^2((2k+1)^2+3)$$

$$n^4 + 3n^2 = (4k^2+4k+1)(4k^2+4k+4)$$

$$n^4 + 3n^2 = 4(4k^2+4k+1)(k^2+k+1)$$

Donc P5 vraie.

<u>P6 : $2014^{2015} \equiv 2\ [7]$</u>