EXERCICE :

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds. Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul, par :
u_n = 2 000 ×1,008^{n-1} où un représente le coût en euros du forage de la n-ième dizaine de mètres.
On a ainsi : u_1 = 2 000 et u_2 = 2 016, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2 000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2 016 euros.
Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.
1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.
2. Pour tout entier naturel n non nul :
a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).
b. En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la (n +1)-ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n-ième dizaine de mètres.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :
INITIALISATION
    u prend la valeur 2 000
    S prend la valeur 2 000
TRAITEMENT
    Saisir n
    Pour i allant de 2 à n
    u prend la valeur u ×1,008
    S prend la valeur $S + u$
Fin Pour
SORTIE
Afficher S
La valeur de n saisie est 5.
a. Faire fonctionner l'algorithme précédent pour cette valeur de n. Résumer les résultats obtenus à chaque étape dans le tableau ci-dessous (à recopier sur la copie et à compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire).

Valeur de i		2	
Valeur de u	2 000		
Valeur de S	2 000		

b. Quelle est la valeur de S affichée en sortie ? Interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.
4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n), n étant un entier naturel non nul. On admet que : S_n = −250 000+250 000 ×1,008^n. Le budget consenti pour le forage du premier puits est de 125 000 euros. On souhaite déterminer la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget.
a. Calculer la profondeur maximale par la méthode de votre choix (utilisation de la calculatrice, résolution d'une inéquation...).
b. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Corrigé :
1. u_3 = 2000×1,0082 ≈2032,13
Le coût total de forage des 30 premiers mètres est la somme des coûts pour la 1-ère dizaine de mètres, 2-ème dizaine de mètres et 3-ème dizaine de mètres :
$u_1 + u_2 + u_3$ ≈6048,13 €
2. Pour tout entier naturel n non nul : u_{n+1} = 2000×1,008^n =(2000×1,008^{n-1})x1,008 = u_n ×1,008
Donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+1} = 1{,}008 \times u_n$ La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison q = 1,008 et de premier terme $u_1 = 2000$.

2. b. On passe de u_n à u_{n+1} en multipliant par le coefficient multiplicateur q = 1,008 ce qui d'après le cours correspond à une augmentation de : t% = q−1 = 0,008 = 0,8%

3. a.

Valeur de i		2	3	4	5
Valeur de u	2 000	2016	2032.13	2048.39	2064.77
Valeur de S	2 000	4016	6048.13	8096.51	10161.29

b. La valeur de S affichée en sortie est S ≈ 10161,29 ce qui, dans le contexte de cet exercice, correspond au coût total de forage des 50 premiers mètres soit 10161,29 euros.

4. a. • Méthode 1 : calculatrice La suite (S_n) correspond à la somme des n premiers termes de la suite (u_n) donc les termes de la suite (S_n) nous donnent le coût de n dizaines de mètres de forage.

Il suffit alors en utilisant la fonction TABLE de la calculatrice, de déterminer les valeurs de la suite (S_n).

n	46	47	48	49	50	51	52
S_n	110 682,01	113 567,47	116 476,01	119 407,82	122 363,08	125 341,98	128 344,72

Toutes les valeurs avant u_{50} sont bien inférieures à 125 000 et on a : ($u_{50} \approx 122363{,}08 < 125000$

$u_{51} \approx 125341{,}98 > 125000$ On peut donc dire que la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget de 125000 euros est de 50 dizaines de mètres soit 500 mètres.

• Méthode 2 : inéquation. On va résoudre dans l'ensemble des entiers naturels non nuls l'inéquation

$S_n = -250000 + 250000 \times 1{,}008^n < 125000$

Pour tout entier naturels n non nul :

$S_n = -250000 + 250000 \times 1{,}008^n < 125000 \Longleftrightarrow 250000 \times 1{,}008^n < 375000$

$\Longleftrightarrow 1{,}008^n < 375000/250000 = 1{,}5$

En composant par la fonction ln définie et croissante sur]0 ; +∞[, on a :

$S_n < 125000 \Longleftrightarrow \ln 1{,}008^n < \ln 1{,}5$ On applique alors la propriété $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ définie pour a > 0 et n entier :

$S_n < 125000 \Longleftrightarrow n \ln 1{,}008 < \ln 1{,}5$ En divisant chaque membre par $\ln 1{,}008 > 0$, l'ordre ne change pas et :

$S_n < 125000 \Longleftrightarrow n < \ln 1{,}5 / \ln 1{,}008 \approx 50{,}88$ Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à 50.

S ={1 ; 2 ; ··· ; 49 ; 50} On peut donc dire que la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget de 125000 euros est de 50 dizaines de mètres soit 500 mètres.

4. b.

```
INITIALISATION
        u prend la valeur 2000
        S prend la valeur 2000
        i prend la valeur 0
TRAITEMENT
        TANT QUE S < 125000 FAIRE
        u prend la valeur u×1,008
        S prend la valeur S + u
        i prend la valeur i + 1
FIN TANT QUE
SORTIE
Afficher 10×i
```