Question : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, dite si f est concave ou convexe et sur quels intervalles.

f est définie si et seulement si $1 - x^2 \geq 0$ donc si et seulement si $x \in [-1,1]$. Donc $D_f = [-1,1]$.

- La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ comme composées de fonctions dérivables sur $]-1,1[$et,

$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \sqrt{1-x^2} > 0$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $-x$.

Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc f est croissante sur $[-1,0]$ et décroissante sur $[0,1]$.

- La fonction f' est dérivable sur $]-1,1[$ comme somme et composées de fonctions dérivables sur $]-1,1[$ et,

$$\forall x \in]-1,1[, f''(x) = \frac{-\left(\sqrt{1-x^2}\right) + x\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{-\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{\dfrac{-(1-x^2)+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{2x^2-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$\forall x \in]-1,1[, \sqrt{1-x^2} > 0$ et $\forall x \in]-1,1[, 1-x^2 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $2x^2-1$.

$$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} ou\ x = -\frac{1}{4}$$

Donc $2x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1,-\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{4},1\right[$ et $2x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$.
Donc f est convexe sur $\left]-1,-\frac{1}{4}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{4},1\right[$ et f est concave sur $\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$.