2007/2008 **DM n°1 : Suites.**
Terminale S à rendre vendredi 12 Octobre

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, $n \geq 0$ avec $f(x) = \frac{1}{5}(x^3+1)$

1° Montrer que f est croissante sur $[0\,;1]$.

2° Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$.

Exercice 2

On définit deux suites u et v par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2\,(u_n + v_n)}$$
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$0 < u_n < v_n$$
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$
4. Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
5. On pose pour tout entier naturel n : $a_n = u_n\,v_n$
   (a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (b) En calculant de deux façons différentes la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$, déterminer la limite commune ℓ des suites u et v.
6. En utilisant u_2 et v_2, donner un encadrement de ℓ par deux décimaux, d'amplitude 0,04.
