Partie I
Statistiques Descriptives

Exercice 1 :

1- **Calculer la moyenne, l'écart-type et le coefficient de variation des rendements**

La moyenne : $\tilde{x} = \frac{\sum xi}{N}$
Ici N = 5
La somme des xi = 128 + 107 + 130 + 124 + 112
soit xi = 601

ainsi $\tilde{x} = \frac{601}{5} = 120{,}2$

la moyenne est donc de $\tilde{x} = 120{,}2$

l'écart-type : $\sigma = \sqrt{V}$
afin de calculer l'écart-type, il faut d'abord calculer la variance V

$$V = \frac{(\sum xi - \tilde{x})^2}{N}$$

Ainsi $V= \frac{[(128-\tilde{x})^2 + (107-\tilde{x})^2 + (130-\tilde{x})^2 + (124-\tilde{x})^2 + (112-\tilde{x})^2]}{5}$

Ce qui donne $V= \frac{(60{,}84+174{,}24+96{,}04+14{,}44+67{,}24)}{5}$

$V= \frac{412{,}8}{5} = 82{,}56$

Grâce à cela, nous pouvons calculer l'écart-type :
$\sigma = \sqrt{V}$
$\sigma = \sqrt{82{,}56}$
$\sigma = 9{,}09$
L'écart-type est donc égal à 9,09

Coefficient de variation :
$Cv = \frac{\sigma}{\tilde{x}}$

$Cv = \frac{9{,}09}{120{,}2} = 0{,}08$

2- Exprimer les résultats en kilogrammes par parcelle et en tonnes par hectare

Kilos / parcelle
$128/5$ = 25,6
$107/5$ = 21,4
$130/5$ = 26
$124/5$ = 24,8
$112/5$ = 22,4

Tonnes / Hectare
1 T = 1000 Kg
Pour 128, on a 25,6 Kg/parcelle soit 0,0256 T/parcelle
Pour 107, on a 21,4 Kg/parcelle soit 0,0214 T/parcelle
Pour 130, on a 26 Kg/parcelle soit 0,026 T/parcelle
Pour 124, on a 24,8 Kg/parcelle soit 0,0248 T/parcelle
Pour 112, on a 22,4 Kg/parcelle soit 0,0224 T/parcelle

Ainsi pour mettre en tonne/ hectare
128 = 0,0256 t/parcelle soit 17,07 t/hectare
107 = 0,0214 t/parcelle soit 14,27 t/hectare
130 = 0,026 t/parcelle soit 17,33 t/hectare
124 = 0,0248 t/parcelle soit 16,53 t/hectare
112 = 0,0224 t/parcelle soit 14,93 t/hectare

Exercice 2 :

Quels sont, dans ces conditions, les valeurs exactes de la moyenne et de l'écart-type ?

Pour dix observations, on a $\tilde{x}$ = 1,118 et σ = 0,097

La nouvelle moyenne $\tilde{y}$ va se calculer en ajoutant à l'ancienne moyenne $\tilde{x}$ la quantité : (1,13-1,31)/10 (Car au vu de la formule pour calculer une moyenne, le -1,31/10 va s'annuler avec la valeur utilisée pour calculer $\tilde{y}$ et on y ajoutera à la place 1,13/10).

Soit $\tilde{x}$ = 1,118 donc $\tilde{y}$ = 1,118 + $\frac{1,13}{10}$ soit $\tilde{y}$ = 1,231

Ainsi la valeur exacte de la moyenne est de 1,231

Pour la variance soit V = σ^2
on utilise le même principe grâce à la formule : V = $\frac{\sum xi^2}{N}$ - $\tilde{y}^2$

La nouvelle variance V' se calcule alors en y ajoutant la quantité ($1{,}13^2$ – $1{,}31^2$) / 10 pour la même raison que pour la moyenne

V = σ ^{2}
V = $\frac{\sum xi^2}{N}$ - $\tilde{y}^2$

V= $\frac{10^2}{10}$ – $1{,}231^2$

V= 10 – $1{,}231^2$

V= 8,48

Ainsi l'écart-type σ = $\sqrt{V}$ soit σ = $\sqrt{8{,}48}$ = 2,91

La valeur exacte de l'écart-type est de 2,91

Exercice 3 :
Calculer la moyenne et la variance des 35 observations

Au vu de la formule pour calculer la moyenne, soit $\tilde{x}$ = $\frac{\sum xi}{N}$ il faut que la somme de toutes les valeurs soit divisée par 35.
En effet, X1 comporte 15 valeurs et X2 en comporte 20. Donc si on multiplie X1 par (15/35) et X2 par (20/35) et qu'on additionne les 2 quantités obtenues, on trouve le résultat.

Ainsi X1 = 40
Donc X1 = 40 x $15/35$
X1 = 17,14

Pour X2 = 50
X2 = 50 x $20/35$
X2 = 28,57

Ainsi pour les 35 observations, on a $\tilde{x}$ = X1 + X2

$\tilde{x}$ = 17,14 + 28,57 = 45,71

La moyenne des 35 observations est donc de 45,71

Pour la variance, c'est le même principe, mais en y ajoutant la moyenne $X1^2$ à V1 et la moyenne $X2^2$ à V2

Afin d'obtenir seulement la quantité ($\frac{\sum xi^2}{N}$), et on réapplique le même principe précédent (on multiplie ($X1 + V1^2$) par (15/35), ($X2 + V2^2$) par (20/35), et on ajoute ces 2 quantités

Ainsi V1 = $\frac{(\sum x1 - \widetilde{X1})^2}{N}$

V1 = $\frac{(15-17{,}14)^2}{15/35}$

V1 = $\frac{4{,}59}{0{,}43}$

V1 = 10,71

V2 = $\frac{(\sum x2 - \widetilde{X2})^2}{N}$

V2 = $\frac{(20-28{,}57)^2}{20/35}$

V2 = $\frac{73{,}47}{0{,}57}$

V2 = 128,57

Exercice 4 :

1- **Quelle est la probabilité de ne trouver aucune bactérie de ce type dans un échantillon d'1 ml ?**

On suppose qu'on a autant de chance de trouver la bactérie dans chaque portion de 1ml. Puisqu'en moyenne, il y en a 1 pour 100ml, on a alors 0,01 % de chance d'en trouver une dans une portion de 1ml (pour être plus rigoureux, la probabilité moyenne PM = 1 pour 100 ml = $\sum pi/100$, où les pi représente la probabilité de trouver la bactérie dans une portion de 1ml, ces pi sont tous égaux puisqu'il n'y a pas de raison qu'une portion ait plus de chance de comporter la bactérie qu'une autre, alors comme ces pi sont au nombre de 100,

on voit que pi = PM = 1 pour 100 ml = 0,01 pour 1ml).

La probabilité cherchée P est donc 1 – 0,01 = 0,99 %

2- **Quelle est cette probabilité dans 5 échantillons indépendants d'1 ml chacun ?**

Comme les échantillons sont indépendants, on utilise la formule :

P' = $produit\ des$ pi

les pi étant tous égaux à P d'après la question précédente, on calcule la probabilité de l'intersection des événements : « trouver la bactérie dans l'échantillon ».

Donc P' = 5*P.

Soit P' = 5 x 0,99

P' = 4,95 %

3- **Calculer cette probabilité pour une bouteille de 1 L**

1L = 1000 ml = 10*100ml, il y a en moyenne 1 bactérie pour 100ml, donc pour un échantillon d'1L, on trouvera en moyenne 10 bactéries.

Ainsi 100 ml = 0,1 L

Donc P = 10 x 0,1 = 1

4- **Etablir l'ensemble des diverses distributions de probabilités considérées et déterminer la moyenne et l'écart-type**

Les échantillons étant supposés indiscernables, on aura la même probabilité d'en chacun d'entre eux comportant la même quantité d'eau.

Soit $\tilde{x} = \frac{\sum xi}{N}$ V = $\frac{(\sum xi - \tilde{x})^2}{N}$

$\tilde{x} = \frac{100}{100} = 1$ V = $\frac{(100-1)^2}{100}$ = 98,01

Ecart-type $\sigma = \sqrt{V}$ soit $\sigma = \sqrt{98{,}01}$ = 9,9

Exercice 5 :

Quelle est la valeur du coefficient de corrélation rxz, entre les hauteurs initiales et les accroissements en hauteur ?

On a

x = 204 SX= 26 y = 296 Sy = 33 z = 92 Sz = 11

coefficient de corrélation : r = $\frac{\sigma xz}{\sigma x \times \sigma z}$

il nous faut d'abord calculer la moyenne $\tilde{x}$ et la moyenne $\tilde{z}$

ainsi $\tilde{x} = \frac{\sum xi}{N}$ $\tilde{z} = \frac{\sum zi}{N}$

$\tilde{x} = \frac{204}{2} = 102$ $\tilde{z} = \frac{92}{2} = 46$

Puis la variance de X et de Z

V(X) = $\frac{\sum nixi^2}{N} - \tilde{x}^2$

V(X) = $\frac{204^2}{2} - 102^2$

V(X) = $\frac{41\,616}{2} - 10\,404$

V(X) = 10 404

V(Z) = $\frac{\sum nizi^2}{N} - \tilde{z}^2$

V(Z) = $\frac{92^2}{2} - 46^2$

V(Z) = $\frac{8464}{2} - 2116$

V(Z) = 2 116

Comme σxz est égal à la covariance, il faut le calculer

$$\sigma xz = \frac{\sum xizi}{N} - \tilde{x}\tilde{z}$$

$$\sigma xz = \frac{204 \times 92}{2} - (102 \times 46)$$

$\sigma xz =$ 9284 – 4692

$\sigma xz =$ 4692

Nous pouvons donc calculer le coefficient de corrélation

r = $\frac{\sigma xz}{\sigma x \times \sigma z}$

r = $\frac{4692}{\sigma x \times \sigma z}$

il nous faut encore calculer l'écart-type de x et de z

$\sigma x = \sqrt{V(x)}$

= $\sqrt{10404}$

= 102

$\sigma z = \sqrt{V(z)}$

= $\sqrt{2116}$

= 46

Enfin

r = $\frac{4692}{102 \times 46}$

= $\frac{4692}{4692}$ = 1

Ainsi le coefficient de corrélation de rxz est de 1

Partie II
Statistiques Inférentielles