La suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est l'une des suites mathématiques les plus connues. Elle doit son nom au mathématicien italien Leonardo Pisano, plus connu sous le nom de Fibonacci (1170 - 1250). Dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, Fibonacci décrit la croissance d'une population de lapins :
"Possédant initialement un couple de lapins (mâle et femelle), combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?"
Ce problème est à l'origine d'une suite qui sera notée (F_n), dont le n-ème terme correspond au nombre de couples de lapins au n-ème mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- le premier mois, il y a juste 1 couple de lapereaux.
- les lapereaux ne sont pubères qu'à partir de deux mois.
- chaque mois, tout couple susceptible de procréer engendre effectivement un nouveau couple (un mâle et une femelle).
- les lapins ne meurent jamais.

Partie 1 : Expression récurrente de la suite de Fibonacci

1. Calculer les 12 premiers termes de la suite (Fn). (On commencera à F_0)
2. En déduire une relation entre F_{n+1}, F_n et F_{n-1}, $n \geqslant 1$.

Partie 2 : Nombre d'or et suite de Fibonacci

Soit $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$(Φ s'appelle le nombre d'or.)

1. Montrer que :
   - $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ et $\Psi^2 - \Psi - 1 = 0$.
   - $\Phi + \Psi = 1$
   - $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$
2. Soit (U_n) une suite qui vérifie $U_n = a\Phi^n + b\Psi^n$ avec $U_0 = 1$ et $U_1 = 1$ et a et b des constantes réelles. Exprimer a en fonction de Φ et b en fonction de Ψ.
3. En déduire une expression de U_n.
4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1})$.
5. Avec un tableur, déterminer F_{25}.

Partie 3 : Approximation de Φ

On va chercher la limite de la suite $(\dfrac{F_{n+1}}{F_n})$. Supposons que cette suite a pour limite un réel l.

1. Quelle est la limite de $(\dfrac{F_n}{F_{n-1}})$?
2. De la relation vérifiée par F_{n+1}, F_n et F_{n-1}, déduire que l vérifie $l^2 - l - 1 = 0$.
3. On admettra qu'un polynôme du second degré n'a que deux racines. Quelles sont les solutions de cette équation ?
   En déduire la limite du quotient $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.
4. A l'aide d'un tableur, en déduire une valeur approchée de Φ à 10^{-8} près.
   Rendez avec votre copie, la feuille de votre tableur que vous aurez imprimée.