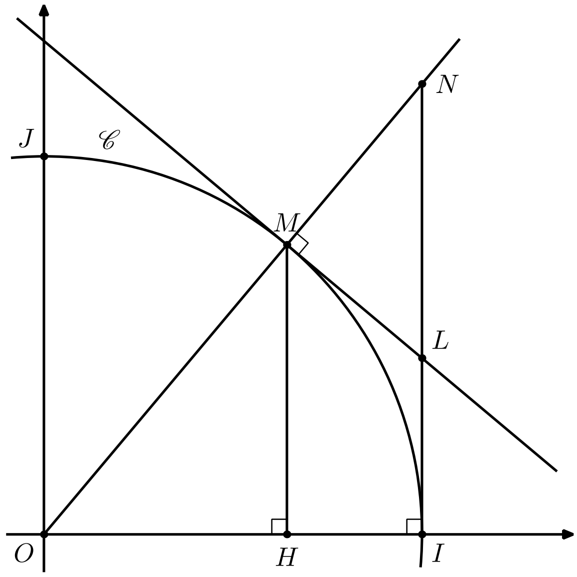
Partie A *Recherche de la limite en zéro de* $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on nomme $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.



M désignant un point de $\mathscr{C}$ libre sur l'arc $\widehat{IJ}$ et distinct des extrémités I et J, on appelle H le projeté orthogonal de M sur (OI).
La parallèle à (MH) qui passe par I coupe (OM) en N et la tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe (IN) en L.

1. On note x la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ et l la longueur de l'arc $\widehat{IM}$. Exprimer en fonction de x les longueurs OH, MH, NI, IM et l.

2. En s'appuyant sur des considérations géométriques, ranger dans l'ordre croissant l, MH, IN, IM et $IL + LM$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

a) Déduire de la question **2** que : $\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\quad \sqrt{2-2\cos(x)} \leqslant x$ et $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$

b) En exploitant judicieusement les inégalités de la question précédente, établir que :

$$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\quad 1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \text{ et } \cos(x) \leqslant g(x) \leqslant 1$$

c) Justifier que la fonction cosinus est continue en 0.

d) Prouver que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

Partie B *Fonctions dérivées des fonctions sinus et cosinus*

1. Établir que : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\quad \dfrac{\cos(x)-1}{x} = \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2 \times \dfrac{-x}{1+\cos(x)}$

2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.

3. Prouver que les fonctions sinus et cosinus sont toutes deux dérivables en zéro et préciser les valeurs respectives de leurs nombres dérivés en zéro.

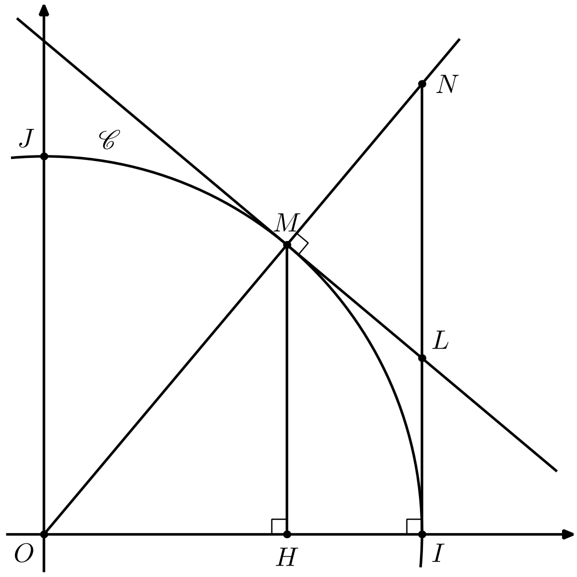
4. Vérifier que : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall h \in \mathbb{R}^* \quad \dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \dfrac{\cos(h)-1}{h} \times \sin(a) + \dfrac{\sin(h)}{h} \times \cos(a)$

5. En exploitant judicieusement l'égalité de la question précédente, justifier que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction cosinus.

6. Démontrer que la fonction cosinus est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa fonction dérivée.

Partie A *Recherche de la limite en zéro de* $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on nomme $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.



M désignant un point de $\mathscr{C}$ libre sur l'arc $\widehat{IJ}$ et distinct des extrémités I et J, on appelle H le projeté orthogonal de M sur (OI).
La parallèle à (MH) qui passe par I coupe (OM) en N et la tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe (IN) en L.

1. On note x la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ et l la longueur de l'arc $\widehat{IM}$. Exprimer en fonction de x les longueurs OH, MH, NI, IM et l.

2. En s'appuyant sur des considérations géométriques, ranger dans l'ordre croissant l, MH, IN, IM et $IL + LM$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

a) Déduire de la question **2** que : $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[\quad \sqrt{2 - 2\cos(x)} \leqslant x$ et $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$

b) En exploitant judicieusement les inégalités de la question précédente, établir que :

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \text{ et } \cos(x) \leqslant g(x) \leqslant 1$$

c) Justifier que la fonction cosinus est continue en 0.

d) Prouver que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

Partie B *Fonctions dérivées des fonctions sinus et cosinus*

1. Établir que : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[\quad \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2 \times \dfrac{-x}{1 + \cos(x)}$

2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$.

3. Prouver que les fonctions sinus et cosinus sont toutes deux dérivables en zéro et préciser les valeurs respectives de leurs nombres dérivés en zéro.

4. Vérifier que : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall h \in \mathbb{R}^* \quad \dfrac{\sin(a + h) - \sin(a)}{h} = \dfrac{\cos(h) - 1}{h} \times \sin(a) + \dfrac{\sin(h)}{h} \times \cos(a)$

5. En exploitant judicieusement l'égalité de la question précédente, justifier que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction cosinus.

6. Démontrer que la fonction cosinus est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa fonction dérivée.