

Mathématiques.

Devoir à la maison n°6.
A rendre le samedi 18 décembre 2004.

*La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la rigueur des raisonnements. Les parties **A.** et **B.** sont obligatoires. La partie **C.** est hors-barème et facultative (mais sera corrigée comme le reste du problème pour ceux qui l'auront traitée.)*

La partie **A.** de ce problème établit des inégalités vérifiées par la fonction logarithme. On étudie deux applications de ces inégalités dans les parties **B.** et **C.**, qui sont indépendantes l'une de l'autre.

A. Etude de fonctions.

Dans cette partie, on entend par l'étude d'une fonction la détermination de son domaine de définition, l'étude des limites aux bornes de ce domaine, puis celle de ses variations. On récapitulera ces résultats dans un tableau de variations. Le tracé de la représentation graphique de la fonction n'est par contre pas demandé¹.

1. **a.** Etudier la fonction $f : x \mapsto x - \ln(1 + x)$.
- b.** En déduire que pour tout réel x tel que $\ln(1 + x)$ est défini, on a l'inégalité :

$$(1) \quad \ln(1 + x) \leq x.$$

2. **a.** Etudier la fonction $g : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$.
- b.** En déduire que pour tout réel x tel que $\ln(1 - x)$ est défini, on a l'inégalité :

$$(2) \quad \ln\left(\frac{1}{1 - x}\right) \geq x.$$

B. La constante γ d'Euler.

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \text{ pour tout entier naturel non nul } n.$$

Il a été établi² dans le devoir surveillé n°2 que cette suite est croissante, non majorée, et diverge vers $+\infty$. On précise ici ce résultat en comparant S_n avec $\ln n$.

¹Bien sûr, il n'est pas interdit et il est même recommandé de visualiser cette représentation graphique sur l'écran d'une calculatrice afin de vérifier ses résultats.

²Cette partie n'utilise cependant aucun résultat de l'exercice du devoir surveillé n°2.

1. a. A l'aide de l'inégalité (1) de la partie **A.**, établir qu'on a pour tout entier $i \geq 1$ l'inégalité :

$$(1') \quad \ln\left(\frac{i+1}{i}\right) \leq \frac{1}{i}.$$

b. En combinant ces inégalités pour i entier variant entre 1 et n , en déduire pour tout entier naturel non nul n l'inégalité :

$$\ln(n+1) \leq S_n.$$

c. Retrouver alors la limite de la suite (S_n) .

2. a. A l'aide de l'inégalité (2) de la partie **A.**, établir qu'on a pour tout entier $i \geq 2$ l'inégalité :

$$(2') \quad \frac{1}{i} \leq \ln\left(\frac{i}{i-1}\right).$$

b. En déduire qu'on a pour tout entier naturel non nul n l'inégalité :

$$S_n \leq 1 + \ln n.$$

3. On voit ainsi que la suite (S_n) a un comportement asymptotique similaire à celui de $\ln n$. On veut préciser ce résultat. On définit pour cela deux suites (a_n) et (b_n) en posant, pour $n \geq 2$:

$$a_n = S_n - \ln n \text{ et } b_n = S_{n-1} - \ln n.$$

a. Calculer la différence $a_n - a_{n-1}$, et en utilisant l'inégalité (2'), en déduire que (a_n) est décroissante.

b. Calculer la différence $b_{n+1} - b_n$, et en utilisant l'inégalité (1'), en déduire que (b_n) est croissante.

c. Calculer la limite de la différence $a_n - b_n$. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune γ , et qu'on a pour tout $n \geq 2$ l'encadrement :

$$b_n \leq \gamma \leq a_n.$$

On appelle *constante γ d'Euler* cette limite.

4. a. Montrer qu'on a, pour tout entier $n \geq 2$, les inégalités :

$$0 \leq a_n - \gamma \leq \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq \gamma - b_n \leq \frac{1}{n}.$$

b. Calculer numériquement les valeurs approchées a_{1000} et b_{1000} de la constante γ et en déduire l'encadrement :

$$0,5767 \leq \gamma \leq 0,5778.$$

(Pour calculer S_n pour de grandes valeurs de n , on pourra écrire un petit programme sur sa calculatrice³.)

³et demander de l'aide au professeur à ce sujet, mais le mode d'emploi de la calculatrice reste la meilleure référence...

C. Inégalités entre moyennes.

Cette dernière partie est facultative.

Soit n un entier naturel non nul et soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. On définit la *moyenne arithmétique* m_a , la *moyenne géométrique* m_g , et *moyenne harmonique* m_h de ces réels par les formules suivantes⁴ :

$$m_a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i;$$

$$m_g = (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}};$$

$$m_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

1. a. Appliquer l'inégalité (1) de la partie **A.** à $x = \frac{a_i}{m_a} - 1$, où i est un entier compris entre 1 et n . En combinant les n inégalités obtenues, montrer l'inégalité :

$$m_g \leq m_a.$$

b. Si l'une au moins des n inégalités de la question précédente est stricte, que peut-on dire de l'inégalité obtenue ? En déduire dans quel cas on a l'égalité $m_g = m_a$.

2. a. Appliquer l'inégalité obtenue à la question **1. a.** de cette partie en remplaçant les nombres a_i par leurs inverses $\frac{1}{a_i}$ (ce qui est licite car l'inégalité est vraie pour toute famille de n réels strictement positifs.) En déduire l'inégalité :

$$m_h \leq m_g.$$

b. Dans quel cas cette dernière inégalité est en fait une égalité ?

⁴On pourra utiliser selon sa convenance les formules développées (avec points de suspension) ou les notations condensées à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$. Si l'on est malgré tout encore perturbé par les notations, on pourra traiter la partie **C.** dans le cas particulier $n = 2$ au brouillon ; le cas général se traite exactement de la même façon.